理论结构收敛法

张喜升　张霁雯
张霁霞　吕凤芝　著

河南科学技术出版社

豫新登字02号
封面设计:田军

INSBN7-5349-1601-1/T·320
定 价:19.80元

理论结构收敛法

张喜升　张霁雯
张霁霞　吕凤芝　著

豫新登字 02 号

理论结构收敛法

张喜升　张霁雯
张霁霞　吕凤芝　著

责任编辑　冯　英
河南科学技术出版社出版发行
（郑州市农业路 73 号）
河南省周口地区印刷厂印刷
787×1092 毫米　16 开本　印张 190 千字
1994 年 12 月第 1 版　1994 年 12 月第 1 次印刷
印数：1—3000 册
ISBN　7—5349—1601—1/T·320

定价：19.80 元

写在前面

理论结构收敛法，是20世纪60年代初，基于工程设计计算的实践需要而提出的工程结构力学的研究课题。其直接目标是建立精确而简便的计算超静定结构的理论方法，服务于工程设计。

经过长期的理论研究和工程实践，我们终于创立了“适用范围普遍化，计算理论精确化，计算程式简便化和理论体系科学化”的理论方法。在创立、完善这一理论的过程中，曾得到化学工业部化工矿山设计研究院副院长孙希田、陈崑山，化工矿山专科学校党委书记田传谨，黄河水利学校校长杨俊杰，河南省周口水利学校校长王苏森等领导的支持。研究成果先后在化工部等设计系统，河南省力学学术会，北方七省市区力学学术会广为交流，深受工程界和学术界的好评。

1992年，河南省力学学会理事长寿楠椿教授在一次学术会议上指出：希望将理论结构收敛法写成系统易懂的形式介绍给广大同行。后遇校友朱柯祥和路国治，通过他们结识了新友吴书安总经理。他们热情支持本书的出版。朱柯祥同志为本书的出版多方奔走相助。吴书安总经理所领导的建筑安装公司，有一定物质和技术实力，组织严密，管理科学，注重质量，讲究信誉，在工程界有较高的知名度。吴书安总经理亲自参予筹划组织本书的撰写等工作，并对本书的总体布局和具体要求提出了许多宝贵意见和建议，为本书的出版作出了多方面的贡献。数学讲师张景兰，曾同作者一起，为研究建立数学理论结构收敛法作了有益的工作。郑州工学院土建系主任霍达教授审阅了本书初稿，提出了许多宝贵意见和建议。作者对此都深表谢意。

本书的理论研究、撰写和出版，首先归功于领导的支持，学者的关怀，同行的鼓励和朋友的帮助。书中不足、不妥之处，欢迎广大读者指出。

著者于1993年12月

目　　录

第一章　绪　论

§1—1　理论结构收敛法的任务

1930年力矩分配法问世，它是一个不解方程组的计算超静定杆系结构的方法。力矩分配法受到力学理论界和结构工程界的高度评价。它在理论上指出了不解方程组研究方向，为解超静定结构的基本理论通向工程实践架起了一座桥梁，人们预言它对结构力学的发展将产生革命性的影响。力矩分配法发表以来，引起力学理论界和结构工程界极大的兴趣，许多学者和工程师们都在认真学习，积极研究这一力学理论的应用和推广，期望找到适用于各种超静定杆系结构不解方程组的计算方法。理论结构收敛法吸取了前人众多方法中的精华，通过著者在长期应用中探索，在探索中应用的多次认识上的飞跃，以高度理论化、普遍化、精确化和简便化的成果，完善地实现了这一目标。

抽象概括是由感性通向理性，由实践通向理论的桥梁。著者成功地应用了这一科学方法。结构计算简图是实际结构简化的图形表示。按照研究结构计算的观点，可把各种超静定结构的计算简图视为基本未知量(以后简称未知量)及其相互关系的图。如图1—1—1所示为四跨连续梁的计算简图，按照研究其力法计算的观点，可将其视为有三个多余约束及其多余约束力的相互关系的图。但结构计算简图对结构的这种属性的描述带有隐暗性(即隐蔽，暗中所藏，不直观，不易理解。)理论结构图旨在揭示结构的计算属性，使其对结构这种属性的描述带有明显性(即明确、直观、易于理解)，以便于研究其计算理论。理论结构图是从计算的观点出发，对结构的计算简图进行计算、改造、抽象概括的结果。研究表明，结构图具有四个要素：未知量、未知量初始值，体现未知量关系的调整系数以及未知量间有无直接调整关系(两未知量调整系数为非零值的称为有直接调整关系，否则称为无直接调整关系)。凡是能直观简明表示出以上四个要素的图，称其为理论结构图。其中未知量的初始值和未知量调整系数是建立理论结构图的关键。

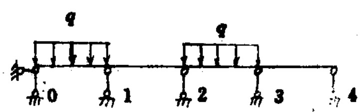

图1—1—1

理论结构收敛法的研究对象是理论结构图。其特征是随着计算的进展，理论结构图由繁变简，最终成为只有一个未知量的最简的理论结构图，称其为理论结构收敛，由此得名为理论结构收敛法。理论结构收敛是著者于1983年在河南省力学学会学术会议上首次提出的概念。它的计算收敛是“理论结构”的收敛，使多未知量的理论结构图收敛于一个未知量的理论结构图。它同力矩分配法、迭代法计算收敛有着本质区别。前者是指图形收敛，后者是指数字收敛。数字收敛概念实际上是从数学学科那里借用的概念。“结构”收敛概念是力学上的一种创新。

为了便于论述理论结构收敛法，将理论结构进行分级。与计算简图等价的理论结构图，称为零级理论结构图，其中相应未知量的初始值称为零级载常数。相应的调整系数，称为零

级形常数。建立零级理论结构图，研究其计算规律及其力学意义，是理论结构收敛法的基本任务。研究理论结构收敛法的推广应用，解决力学中的其它问题和应用于其它学科，乃是理论结构收敛法的发展任务。

§1—2 理论结构收敛法的发展

60 年代初，笔者由高等学校调入工程设计部门，工程设计工作需要解决较复杂工程结构计算问题。为此，专门成立了组织，笔者有幸参加其工作，对研究解决这一问题有所体验。经过多年在工作实践中研究、应用，笔者于 1974 年完成《角变位移力矩法》(一)、(二)的撰写工作，并作为内部资料在化工部、煤炭部、石油部的设计部门交流。1983 年笔者又由工程设计部门调入学校工作，根据对角变力矩法的进一步研究，首次提出结构收敛理论概念，这是认识上的一次飞跃。事物都是一分为二的。当时的结构收敛理论有两个局限性，其一局限于应用结构计算简图研究结构收敛理论；其二局限于力矩分配法能求解的结构。这种局限影响到这一理论的普遍性和应用性，特别是对连续梁以外结构的收敛成为不可理解。结构收敛理论产生的这些矛盾，促进了研究的发展。研究矛盾，揭露矛盾，目的是为了找到解决矛盾的方法，促进事物的发展。原结构收敛理论应用上的局限性，根源是理论基础的局限性，解决这一矛盾的方法是，不局限于以角变力矩法(力矩分配法的变形、改进方法)为基础，而以结构力学普遍理论力法、位移法、混合法为基础，提出结构收敛力法，结构收敛位移法，结构收敛混合法。原结构收敛理论对 连续梁以外结构难以理解的矛盾，根源是结构计算简图在计算属性上的局限性，解决这一矛盾的方法是，放弃以结构计算简图作为结构收敛理论的直接研究对象，以等价的理论结构图作为直接研究对象，使矛盾得到解决，使这一理论得到了完善。

不满足已有成果，是研究者的可贵品质。能在已有成果中发现问题，是研究者的一种重要能力。理论结构收敛法理论的完善，只是从某种意义上说的。当这一理论达到相对完善之时，笔者又提出一个似乎不应该提的问题：既然力法、位移法，混合法都是一种解线性方程组方法，而以力法、位移法和混合法为基础的理论结构收敛法又是一种不解 线性方程组的方法，那么这种不解线性方程组的方法能否解线性方程组呢？问题的关键是建立与线性方程组等价的理论结构图，称其为数学理论结构图，并研究了其计算规律，称这一理论为数学理论结构收敛法。通过数学理论结构收敛法与理论结构收敛法的比较研究，我们终于以定义、定理的严密体系完成了理论结构收敛法的理论建构。

理论结构收敛法发展成数学理论结构收敛法，为这一理论的推广应用展现出广阔的前景。1992 年笔者提出的理论结构收敛有限差分法，又把这一理论由力的计算发展成为位移计算，这是力学应用中又一新分支的开端。数学理论结构收敛法是纯数学问题，它使这一理论推广应用于其它学科成为可能，其理论和实践意义将会超越结构力学范围。

§1—3 基础计算方法的选择

超静定结构的基础计算方法，有力法、位移法、角变力矩法和混合法等。计算超静定结构的理论结构收敛法，是这些基础计算方法的应用、统一和发展。以力法为基础，称为理论结构

收敛力法；以位移法为基础，称为理论结构收敛位移法；以角变力矩法为基础，称为理论结构收敛角变力矩法；以混合法为基础，称为理论结构收敛混合法。那么，在实际工作中究竟以何法为基础呢？这就是本节要研究解决的问题——基础计算方法的选择问题。

选择基础计算方法的原则是：选优弃劣。优劣的一般标准：未知量数目少者为优，多者为劣。对于一个具体结构，采用不同的基础计算方法，其未知量数目是不同的，需要作具体分析确定未知量的数目。

超静定结构力法未知量的数目，等于使其成为静定结构需要解除多余约束的数目。如图1－3－1*a*、*b*、*c*、*d* 所示，其力法未知量数目分别为1，2，3，4。

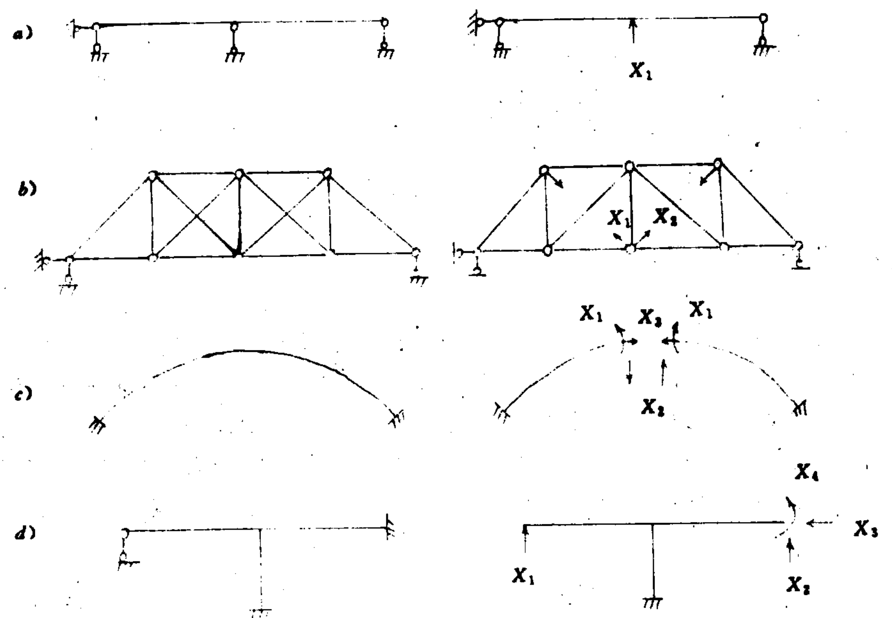

图1－3－1

超静定结构位移法未知量数目，等于刚结点数目与铰化后使其成为不变体系需要增加的最少链杆约束数目之和。如图1－3－2*a*、*b*、*c*、*d* 所示，其位移法未知量数目分别为1，2，3，4。

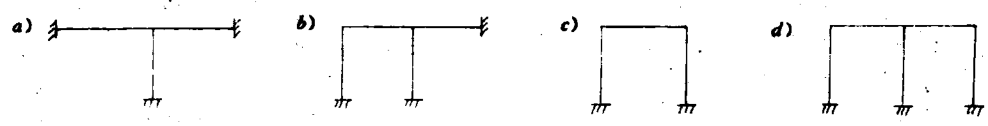

图1－3－2

超静定结构角变力矩法未知量的数目等于刚结点的数目。必须指出：这种方法像力矩分配法一样，只适用于无结点线位移的结构计算。

超静定结构混合法未知量的数目依据力法和位移法确定部分结构的力法未知量数目与位移法未知量数目之和；亦可依据力法和角变力矩法确定部分结构的力法未知量数目与角

变力矩法未知量数目之和；还可依据位移法和角变力矩法确定部分结构的位移法未知量数目与角变力矩法未知量数目之和；又可依据力法、位移法和角变力矩法确定部分结构的力法未知量数目，位移法未知量数目与角变力矩法未知量数目之和。前三种称为两法混合，后一种称为三法混合。

如图 1－3－3 所示的超静定结构，若以力法为基础有 4 个未知量；若以位移法为基础有 5 个未知量；若以混合法为基础有 2 个未知量。根据选择计算方法的原则和标准，应选择混合法为基础的理论结构收敛法计算。

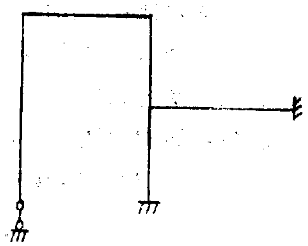

图 1－3－3

§1－4 结构对称性的利用

超静定结构的解题技巧，如基础计算方法的选择，结构对称性的利用等，如果运用得好，常可达到事一功万简化计算之效。这里对结构对称性利用给予总结性的研究和创造性的运用。

一、结构对称性利用的基础

1、对称结构的分类：

(1)内部对称结构：结构内部杆轴线的几何形状对称且对称位置上相应刚度相等，结点构造相同，而支座反力性质不对称且支座反力为静定的结构。称为内部对称结构。

(2)、全对称结构：结构内部杆轴线的几何形状对称且对称位置上相应刚度相等、结点构造相同，支座反力性质对称的结构。称为全对称结构。所谓支座反力性质对称，是指对称位置的两支座都能产生性质相同的水平反力或竖直反力或力矩，而不限定支座反力的大小，指向或转向。

2、对称性原理：

(1)全对称结构，在对称外因素作用下，只产生对称的内力和满足变形协调条件的对称位移，反对称内力和位移为零。

(2)、全对称结构，在反对称外因素作用下，只产生反对称的内力和满足变形协调条件下的反对称位移，对称的内力和位移为零。

3、推论：

(1)内部对称结构，在结构上的对称外因素和支座对称外因素作用下，只产生对称的内力和满足变形协调条件的对称位移，反对称内力和位移为零。

(2)内部对称结构，在结构上的反对称外因素和支座反对称外因素作用下，只产生反对称的内力和满足变形协调条件的反对称位移，对称内力和位移为零。

4、结构对称性利用的途径和方法：

(1)分解外因素为对称与反对称的叠加(包括支座静定反力、荷载、支座移动、温度改变和制造误差等)。

(2)利用对称性原理将结构化成半结构。

(3)取对称的基本结构，区分基本未知量为对称与反对称两组。

(4)利用结构对称性修正形常数和载常数。

(5)反复利用结构对称性和综合应用有关技巧。

5、对称与反对称外因素：

(1)对称荷载：绕对称轴折叠计算简图，相互重叠的荷载大小相等，指向或转向一致，称其为对称荷载。

(2)反对称荷载：绕对称轴折叠计算简图，相互重叠的荷载大小相等，指向或转向相反，称其为反对称荷载。

(3)对称支座反力：绕对称轴折叠计算简图，相互重叠的支座反力大小相等，指向或转向一致，称其为对称支座反力。

(4)反对称支座反力：绕对称轴折叠计算简图，相互重叠的支座反力大小相等，指向或转向相反，称其为反对称支座反力。

(5)对称支座移动：绕对称轴折叠计算简图，相互重叠的支座移动大小相等，指向或转向一致，称其为对称支座移动。

(6)反对称支座移动：绕对称轴折叠计算简图，相互重叠的支座移动大小相等，指向或转向相反，称其为反对称支座移动

(7)对称温度改变：绕对称轴折叠计算简图，相互重叠杆件同一侧温度改变值大小相等，符号相同，称其为对称温度改变。

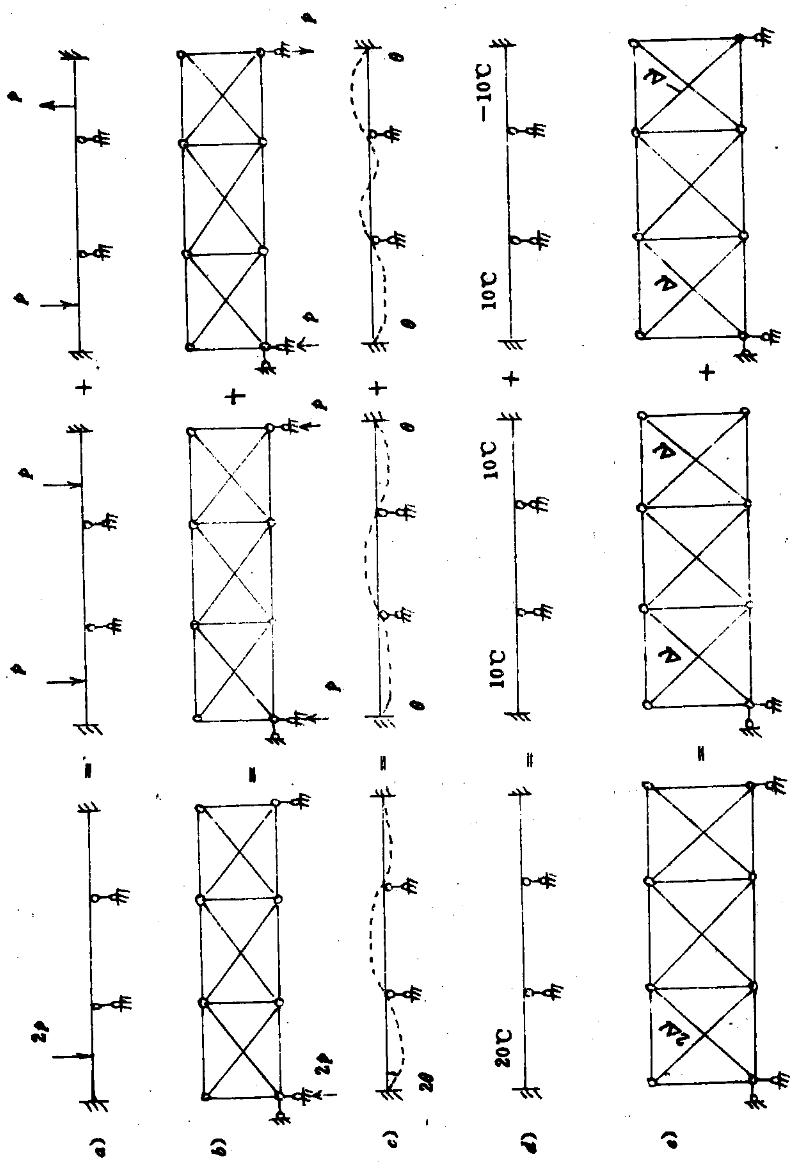

图1-4-1

(8)反对称温度改变：绕对称轴折叠计算简图，相互重叠杆件同一侧温度改变值大小相

等，符号相反，称其为反对称温度改变。

(9)对称制造误差：绕对称轴折叠计算简图，相互重叠杆制造误差大小相等，性质相同，称其为对称制造误差。

(10)反对称制造误差：绕对称轴折叠计算简图，相互重叠杆的制造误差大小相等，性质相反，称其为反对称制造误差。

6、区分任意外因素为对称与反对称外因素的叠加。如图 1—4—1*a*、*b*、*c*、*d*、*e* 所示，分别为荷载，支座反力，支座移动，温度改变，制造误差分解为对称与反对称情况的叠加。

二、可化为静定结构的特定超静定结构举例

例 1、特定条件 $m=2^n-1$，n 为自然数，在柱顶水平荷载作用下，等高等刚度 m 有限跨铰接排架。解题框图如图 1—4—2。当 $n=3$ 时，$m=7$，如图 1—4—3 所示，按框图图 1—4—2 循环三次即得解。

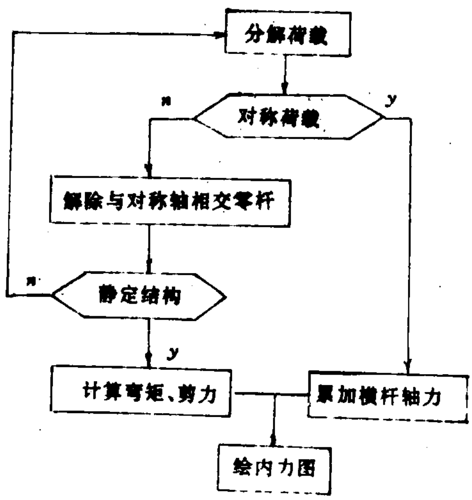

图 1—4—2

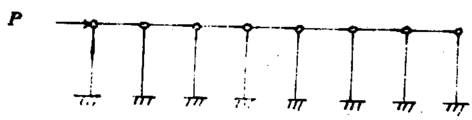

图 1—4—3

例 2、特定条件 $m=2^n$，n 为自然数，在柱顶水平荷载作用下，内柱刚度为边柱刚度的二倍，m 有限跨铰接等高排架。解题框图如图 1—4—4 所示。当 $n=3$，，$m=8$。如图 1—4—5 所示，按框图图 1—4—4 循环四次即得解。

例 3、特定条件：在柱顶水平荷载作用下，边柱刚度为 1，在反复化半结构的过程中，若对称轴与横杆相交，则联系此横杆两柱刚度为 1；若对称轴与柱轴线相重合，则该柱刚度为 2 的任意跨等高铰接排架。本例包括例 1 和例 2 的解法。如图 1—4—6 所示六跨排架。又如图 1—4—7 所示十跨排架，其柱的刚度分布如图中所示的情况，皆可化为静定结构计算。

例 4 特定条件 $m=2^n$，n 为自然数，m 跨任意层连续柱，内柱刚度为边柱刚度的二倍，水平横杆除顶层外，其余均为二力杆，水平集中荷载作用于边柱各结点，柱下端均为固 定铰支座的刚架。当 $n=2$，$m=4$，如图 1—4—8 所示。解题框图如图 1—4—9。

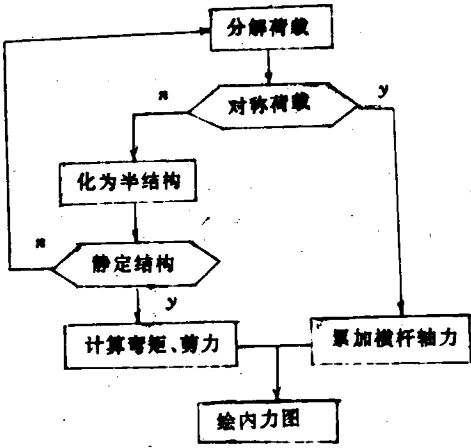

图 1—4—4

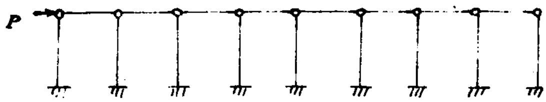

图 1—4—5

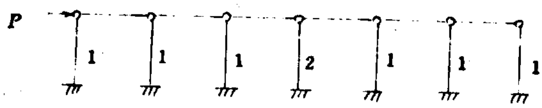

图 1—4—6

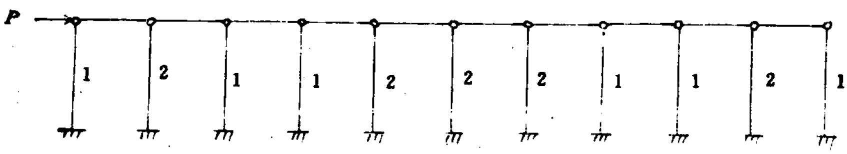

图 1—4—7

三、可化为单跨半刚架的特定刚架举例

特定条件 $m=2^n$，n 为自然数，m 有限跨任意多有限层，内柱刚度为边柱刚度的二倍，同层横梁刚度相同，柱支座相同，承受结点水平荷载的刚架。当 $n=2$，$m=4$，如图 1—4—10 所示。解题框图如图 1—4—11 所示。

这类题，可利用结构对称性，将 $3mk$ 次超静定刚架化为 k 次超静定单跨半刚架。其中 k 为层数。

四、外部静定、内部对称的超静定结构

分析外部静定、内部对称的超静定结构，首先根据平衡条件计算支座反力，然后将外力(包括支座反力)分解成对称与反对称，以便利用结构的对称性。

如图 1—4—12a 所示结构为一外部静定、内部为二次超静定对称的结构。

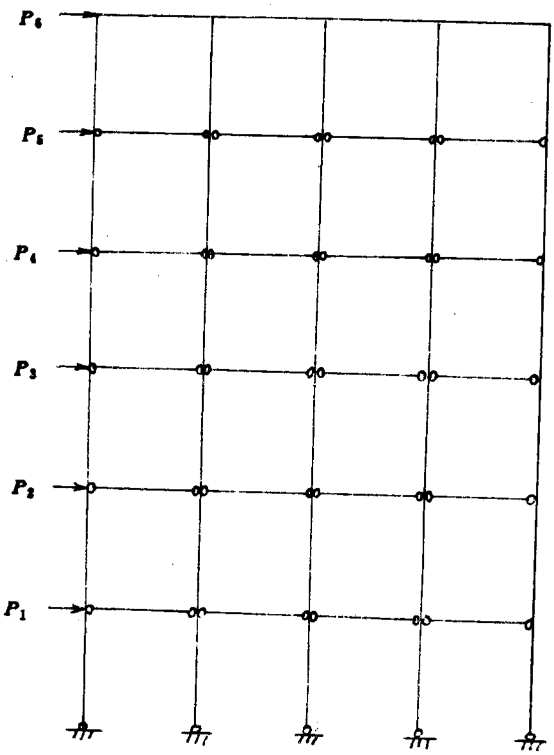

图 1—4—8

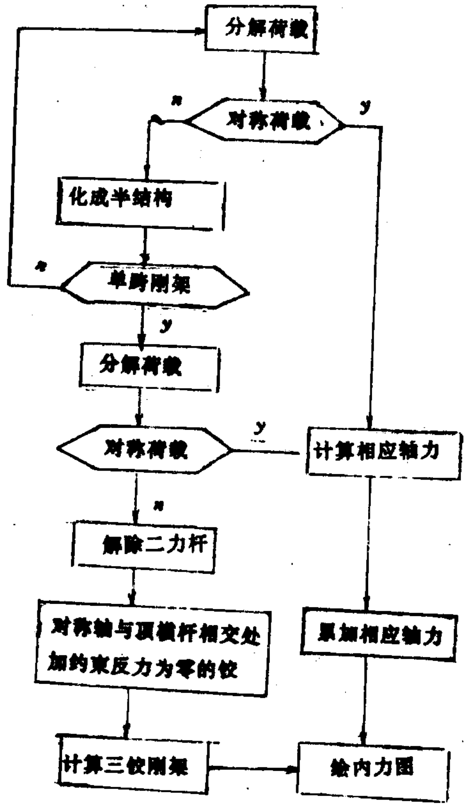

图 1—4—9

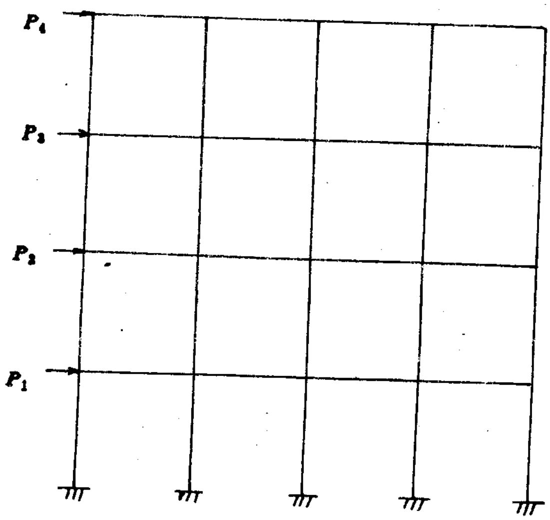

图 1—4—10

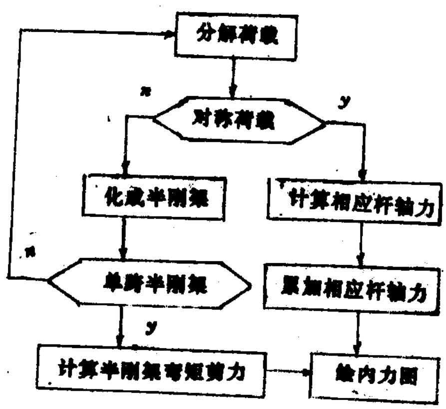

图 1—4—11

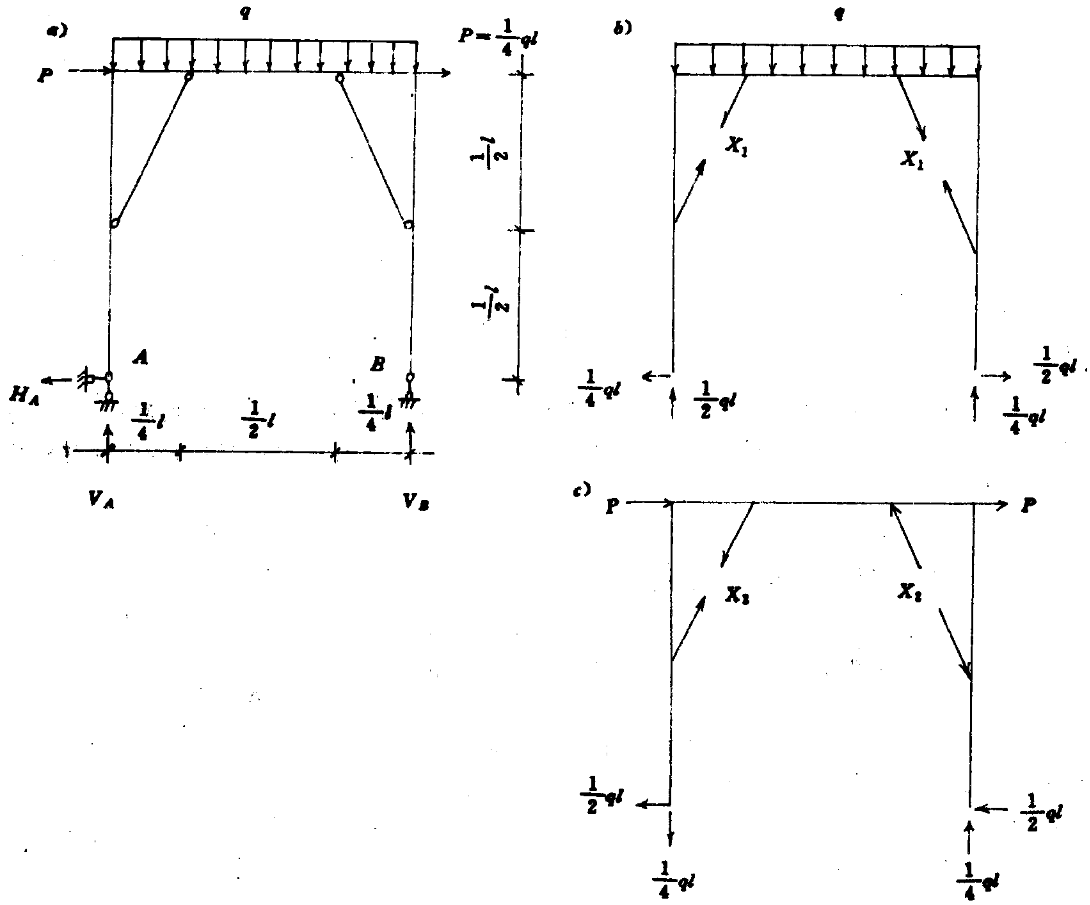

图 1—4—12

$\Sigma X=0$

$H_A=2p=\frac{1}{2}ql$

$\Sigma M_A=0$, $V_Bl-2pl-\frac{1}{2}ql^2=0$

$V_B=2p+\frac{1}{2}ql=ql$

$\Sigma Y=0, V_A+V_B-ql=0$

$V_A=ql-2p-\frac{1}{2}ql=\frac{1}{2}ql-2p=0$

将非零支座反力和原荷载分解为对称与反对称两种情况如图 1—4—12b、c 所示。

图 1—4—13a 可化成图 1—4—13b、c 的叠加。

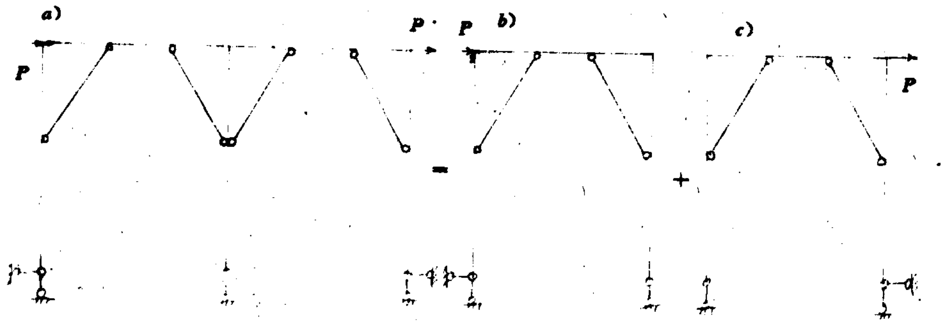

图 1—4—13

图 1—4—13b、c 与图 1—4—12a 情况类似，属于外部静定，内部对称的超静定结构，可首先求得支座反力，然后将荷载，支座反力分解成对称与反对称，即可利用结构内部对称性的简化计算。

§1—5　倍数原理及其应用

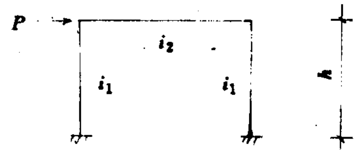

图 1—5—1

如图 1—5—1 所示刚架的结点角位移和线位移的解法如下：

如图 1—5—1 所示为对称结构，两个结点的角位移相等为 Z_1，结点线位移为 Z_2。将结构化成半结构，应用位移法推得：

$$Z_1=\frac{pi_1(4i_1+6i_2)h}{8(i_1^2+6i_1i_2)(2i_1+3i_2)} \qquad (1-5-1)$$

$$Z_2=\frac{P(4i_1+6i_2)h^2}{24(i_1^2+6i_1i_2)} \qquad (1-5-2)$$

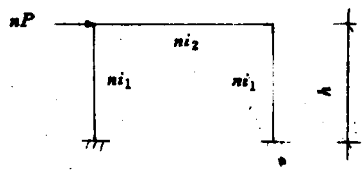

图 1—5—2

如图 1—5—2 所示刚架结点的角位移和线位移的解法如下：

以 np 代替 P，以 ni_1 代替 i_1 以 ni_2 代替 i_2，代入式(1—5—1)，(1—5—2)所得结果同(1—5—1)，(1—5—2)即图 1—5—1，图 1—5—2 结构具有相同的结点位移。

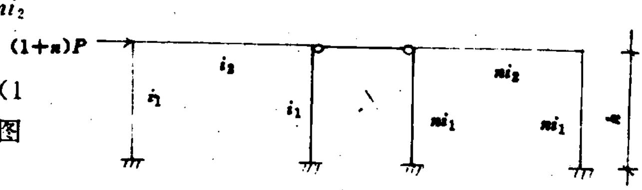

图 1—5—3

如图 1—5—3 所示刚架的结点角位移和线位移的解法如下：

显然图 1—5—3 所示刚架各结点线位移均相等。

设二力杆的轴力为 N，将图 1—5—3 分解成图 1—5—4 和图 1—5—5 所示刚架。由于图 1—5—4 和图 1—5—5 两刚架线位移相等，由式(1—5—2)得：