全国水利水电类高职高专统编教材

SHUIWEN TONGJIXUE

水文统计学

宋萌勃　主编

吴瑞新　主审

黄河水利出版社

全国水利水电类高职高专统编教材

水文统计学

主　编　宋萌勃
主　审　吴瑞新

黄河水利出版社
·郑州·

内 容 提 要

本书是全国水利水电类高职高专统编教材，是根据全国水利水电高职教研会制定的水文统计学课程教学大纲编写完成的。本书比较系统地介绍了水文学中常用的概率论和数理统计学的原理与方法，由事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、频率计算、统计估计、假设检验、相关分析、误差分析基础和随机过程等九章组成。全书条理清晰，叙述简练通俗，特别注重实际应用，列举了大量的例题。每章配有适量的习题，书后附有参考答案和常用数表，便于自学和应用。

本书为水利水电类高职高专水文与水资源专业的教材，也可供其他相关专业教学参考。

图书在版编目(CIP)数据

水文统计学/宋萌勃主编. —郑州：黄河水利出版社，2010.2

全国水利水电类高职高专统编教材

ISBN 978-7-80734-794-1

Ⅰ.①水… Ⅱ.①宋… Ⅲ.①水文统计-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.①P333.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 017801 号

组稿编辑：王路平　电话：0371-66022212　E-mail：hhslwlp@163.com

出 版 社：黄河水利出版社

地址：河南省郑州市顺河路黄委会综合楼 14 层　邮政编码：450003

发行单位：黄河水利出版社

发行部电话：0371-66026940、66020550、66028024、66022620(传真)

E-mail：hhslcbs@126.com

承印单位：黄河水利委员会印刷厂

开本：787 mm×1 092 mm　1/16

印张：15

字数：350 千字　　印数：1—3 000

版次：2010 年 2 月第 1 版　　印次：2010 年 2 月第 1 次印刷

定价：30.00 元

前　言

本书是根据教育部《关于加强高职高专教育人才培养工作意见》和《面向21世纪教育振兴行动计划》等文件精神，以及由全国水利水电高职教研会拟定的教材编写规划，报水利部批准，由全国水利水电高职教研会组织编写的水利水电类全国统编教材。

本书是根据高职高专水文与水资源专业教材建设规划要求，依据水文与水资源专业修订后的教学大纲编写的，主要作为高职高专水文与水资源专业水文统计学课程的教材，也可供相关专业教学人员参考。

全书共九章，由概率论、数理统计、误差分析和随机过程四大部分组成，较全面系统地介绍了水文统计学的基本原理和方法。本书注重与本科教材的区别，强调水文工作的实际需要和实用性，尽量避免抽象的数学推导和烦琐的公式演绎。力求结构合理，条理清楚，概念清晰正确，知识系统完整，文字通顺流畅，语言简练易懂。书中举例较多，每章配有学习指导和适量的习题，书后还附有习题答案和常用数表，便于自学和应用。

本书编写人员及编写分工如下：长江工程职业技术学院宋萌勃编写绪论、第一章、第五章、第六章和第九章，长江工程职业技术学院徐成汉编写第二章、第三章、第七章，长江工程职业技术学院李太星编写第四章，长江工程职业技术学院吴士夫编写第八章。本书由宋萌勃担任主编并统稿，由长江工程职业技术学院吴瑞新担任主审。

在编写过程中主要参考了河海大学黄振平教授编著的《水文统计学》以及其他有关教材、文献资料，在此谨向有关作者表示衷心感谢！

由于时间仓促，编者水平有限，书中定有许多不足和错漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2009年11月

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

绪　论

一、概率论研究对象

自然界和社会中存在着各种各样的现象，但归纳起来，可以分为两种类型。一种是确定性现象，或称必然现象，其特点是：在一定条件下，某种结果一定会发生。例如，在标准大气压下，将水加热到 100 ℃，“水沸腾”这一结果一定会发生；使两个带正电的小球相靠近，“两小球互相排斥”这一结果一定会发生；在一段导线两端施加电压时，“导线内产生相应的电流”这一结果也一定会发生，等等。这类现象与其形成的条件之间存在着比较固定的因果联系，可以用经典的数学物理方法和定律来描述。因此，对于这类现象，只要满足一定条件，人们可以准确地预测其结果。另一种是随机现象，或称偶然现象，其特点是：在一定条件下，有多种可能发生的结果，但究竟哪个结果会发生，事先不能确定。例如，抛一枚质地均匀的硬币，有两种可能发生的结果，正面朝上和反面朝上（有币值的一面称为正面），在抛硬币之前，我们不能确定哪面朝上；投掷一颗骰子，观测向上那面的点数，有 6 种可能结果，投掷前，我们不能确定将出现几点。在水文领域，很多水文现象都属于随机现象。例如，观察某地的年降水量，有无穷多个可能结果，在年终之前，我们不能确定该年的降水量是多少。观测河流某断面处的年最高水位、年最大洪峰流量等，也都属于随机现象。这类现象带有很大的偶然性，所以又称为偶然现象。这类现象之所以具有不确定性，是因为它们除受基本的起主导作用的因素制约外，还受许多次要且多变的偶然因素影响。

随机现象虽然具有显著的不确定性，但并不是说它们没有规律可循。实践表明，在对一种随机现象作了大量的观测或试验之后，就能揭示出某种规律性。例如，若抽检产品的件数足够多，就会发现，该批产品的合格率总是稳定地在某一常数附近摆动；若上抛一枚质地均匀的硬币次数足够多，就会发现，落下后出现正面和反面的次数大体相等；若在同一条件下对靶射击次数足够多，就会发现，命中点大体对称地分布于靶心周围，且命中点的密度从靶心向边缘递减；物理学告诉我们，在一个盛满水的容器中，水对器壁的压力是由各个水分子对器壁的冲击力汇合而成的，虽然每个水分子的运动速度和轨迹都是随机的，致使它们对器壁的冲击力千差万别，但从宏观角度看，器壁各点所受的压力都是稳定的，可以用水力学定律来描述。随机现象的这种规律称为统计规律。它是随机现象的宏观规律，与随机现象个别观测结果的特性几乎没有关系。

概率论就是用数学的方法，研究随机现象的统计规律的一个数学分支。与概率论相提并论的是数理统计方法，它的内容是以概率论为基础，用数学的理论和方法，对实测数据进行分析和计算。概率论与数理统计是密切联系着的，有时就合称概率统计。

二、水文现象的必然性和随机性

水文现象和其他自然现象一样，在其发生、发展过程中，具有必然性和随机性的特点。

自然界水分循环的结果，必然会引起降水而产生径流。同时，随着气候条件的变化，河流水情也发生相应的变化，一年中可划分为丰水期、中水期和枯水期三个特征时期，这种变化具有明显的周期性等。这都充分表明了水文现象的必然性。例如，由实测水文资料可知，河流的某一断面上，每年汛期总要出现一个最大洪峰流量，这是具有周期性的，也就是每年必然出现的事情。但是由于水文现象具有不重复的特点，这个最大洪峰流量出现的数值大小，每年则不完全一样，具体出现的时间也每年不同，直到现在人们还不能准确地预测。这是由于影响最大洪峰流量的因素，如气候因素和下垫面因素（地形、土壤地质、植被以及其他因素等）极其错综复杂，同时有些影响因素本身也是变化的。这就说明了水文现象的随机性和不确定性的一面。

由于水文现象具有明显的随机性特点，使得概率论与数理统计在水文学的各个领域都得到了广泛的应用。例如，在水文测验中，观测站网的规划、观测规范的制定、观测资料质量的分析等；在水文预报中，某些预报方案（特别是中长期预报方案）的制定、预报误差分析与预报质量评定等；在水文水利计算中，水利系统的规划设计和运营管理等，都离不开概率统计方法。通常，人们把水文学中的概率统计方法称为水文统计法。

但是，这里必须指出：在水文现象演变过程中，不但必然性和随机性始终同时存在，而且还相互联系着，不能把它们看做是绝对对立的。在现代水文分析中，概率统计方法虽说是探索水文现象统计性规律的有效的数学工具，但它毕竟只是一种数学工具，并不能说明或表达水文现象的本质及其内在的关系。因此，我们不能迷信概率统计。事实上，从地球上的水量平衡这个角度来看，可以肯定在水文现象中起主导作用和决定性作用的是必然性规律。当前，从物理成因分析方面以及综合各个自然地理特征的方法，来研究探讨水文现象的必然性规律是非常重要的。实际工作中，应该将研究统计性规律的概率统计方法和研究必然性规律的物理成因分析密切地结合起来，才能收到较好的效果。

第一章　事件与概率

第一节　事件及其运算

一、事件的含义及类型

(一)事件的含义

众所周知，为了研究某种自然或社会现象，就要对它进行观测、调查或试验，我们将这类活动统称为“试验”。例如，观测一次水位、观测某年年降水量、抽检一件产品、投掷一次骰子、对靶射击一次等，都称做一次“试验”。每作一次试验就有一个结果。例如，记录一次水位，就有一个水位数值；投掷一颗骰子，就会出现某个点数；打靶一次，就有一个命中环数等。在概率论中，习惯把在一定条件下某试验的每一个结果，称为该试验的一个事件。通常用大写字母 A，B，C 等表示。如果一次试验出现了结果 A，则我们说“事件 A 发生了”，或“事件 A 出现了”。例如，若观测 1 h 降水量，其记录为 9.5 mm，就说“1 h 降水量等于 9.5 mm”这一事件发生了，或“1 h 降水量等于 9.5 mm”这一事件出现了。

(二)事件的类型

自然界中所有客观复杂的现象以及社会现象中，就其发生的情况来说，事件可分为以下三种类型。

1. 必然事件(全集)

在一定试验条件下必然会发生的事情，称为必然事件，用符号 Ω 表示。例如，“在标准大气压下，纯净水加热到 100 ℃时，水一定会沸腾”。这就是说，在标准大气压下，加热到 100 ℃这两个条件都实现之下，纯净水就必然会发生沸腾现象。又如“同性的电荷互相排斥”是一个必然事件，因为只要是两种同性的电荷相碰，就必然会出现互相排斥的现象。再如，河流某断面处河床稳定，当上游洪水来临时，此断面水位必定会上升。

2. 不可能事件(空集)

在一定试验条件下一定不会发生的事情，称为不可能事件，用符号 $\varnothing$ 表示。如“在标准大气压下，60 ℃的水结成冰”是一个不可能事件，因为在标准大气压下，温度为 60 ℃的水必然不会结成冰。又如“钢在温度 100 ℃以下熔化”是一个不可能事件，因为钢在 100 ℃以下不可能熔化。

3. 随机事件

显然，对各种确定性现象所作的试验，在试验之前我们就能准确预测它将会出现怎样的结果。而对随机现象作试验时，我们却不能根据试验的条件预测试验将会出现怎样的结果，对于这种试验，由于结果具有随机性，所以称之为随机试验。下面给出它的明确含义。若一种试验满足下列三个条件，则称之为随机试验：

(1)试验可以在相同条件下重复进行；

(2)每次试验的结果可能不止一个，但在试验之前能明确知道有哪些可能的结果；

(3)每次试验中必然而且只能出现这些结果中的某一个，但在试验前却不能肯定该次试验将会出现哪一个结果。

我们将随机试验简称试验，并用符号 E 表示，随机试验的结果称为随机事件。

显然，必然事件和不可能事件是两类特殊事件，事先都可以知道确定性的试验结果。唯有随机事件事先不知道确定性的试验结果。为了研究的方便和统一，我们把必然事件和不可能事件也看成随机事件，即把它们作为随机事件的两个极端情况。

下面用一些例子进一步说明随机试验与随机事件的概念。

【例 1-1】 “抛一枚硬币，正面朝上”是随机事件。这里“抛一枚硬币”是一个随机试验，因为这种试验可以在相同条件下重复进行，它的结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，抛硬币之前不能肯定哪面朝上。因此，“抛一枚硬币，正面朝上”是一个随机事件。

【例 1-2】 “记录某电话总机在上午 9:00 ~ 10:00 的 1 h 内接到呼唤的次数”是一个随机试验，而“接到至少 15 次呼唤”是这一试验的一个随机事件，因为在这 1 h 内，接到至少 15 次呼唤这件事可能出现，也可能不出现。

【例 1-3】 “从某厂生产的产品中，随机抽取 100 件，检查其中所含次品的件数”是一个随机试验，“其中恰有 5 件次品”是这一试验的一个随机事件，因为抽取的 100 件产品中不一定恰好有 5 件次品。

【例 1-4】 “观测武汉市 7 月份的降水量”是一个随机试验，而“降水量为 400 ~ 430 mm”是一个随机事件，因为在具体观测某年 7 月份的降水量时，可能为 400 ~ 430 mm，也可能不足 400 mm 或多于 430 mm。

今后，为了叙述简便起见，将随机事件、必然事件和不可能事件都简称为事件。而且在不致引起误解的情况下，也不一定每次都把“一定的条件”明确地写出来。但必须注意，在讨论一个事件的必然性、不可能性或随机性时，要把它与一定的条件联系起来，因为在不同的条件下，同一事件可以是必然的，也可以是不可能的或随机的。例如，从“在标准大气压下，纯净水加热到 100 ℃”中抽出“标准大气压”这一条件，那么事件“水沸腾”就不是必然事件了；一次射击命中目标，通常是一个随机事件，但如果射击者距离目标极近，那么“命中目标”这一事件就将成为必然事件。所以，抽象地或一般地谈论某一事件的必然性、不可能性或随机性，而不与一定的条件联系起来，是没有意义的。

二、基本空间

在说明基本空间的概念之前，还需对事件的概念作一次较深入的讨论。我们来看一个例子：投掷一颗骰子，观察朝上一面的点数。显然，这是一个随机试验。现分别用 A_1，A_2，…，A_6 表示掷出的点数是 1，2，…，6 这六种结果。显然，A_1，A_2，…，A_6 都是随机事件，而“掷出奇数点”（以 B_1 表示）、“掷出偶数点”（用 B_2 表示）、“出现的点数大于 3”（以 C_1 表示）、“出现的点数小于等于 4”（用 C_2 表示）等，都是试验的可能结果，因此也是随机事件。但仔细分析，比较一下上述两类事件后可以发现，它们在结构上有很大区别，前者（A_1，A_2，…，A_6）是不可再细分的，而后者（B_1，B_2，C_1，C_2）都是可分解的。例如，B_1 可

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

分解为 A_1,A_3,A_5 ；C_1 可分解为 A_4,A_5,A_6 等。如同物理学中把不可再分的粒子称为基本粒子一样，我们把一个试验中不可再分的事件称为基本事件，而把可再分的事件称为复合事件，也就是说，复合事件是由若干基本事件组成的。这样，上例中，$A_1,A_2,\cdots,A_6$ 是基本事件，而 B_1 ，B_2 ，C_1 ，C_2 都是复合事件。

应当注意，一个事件是否可再分，不是绝对的和固定不变的，而是相对于一定的试验目的而言的。例如，我们观测某地某年降水量，其目的是为了确定该年是旱年 A_1（年降水量小于 700 mm），正常年 A_2（年降水量为 700 ~ 1 000 mm），还是涝年 A_3（年降水量大于 1 000 mm），则 A_1,A_2,A_3 是三个基本事件，是不可再分的。但若我们关心的是该年降水量的数值，则 $[0,PMP]$ 之间的任一实数都是一个基本事件（这里 PMP 为该地区可能最大年降水量），而 A_1,A_2,A_3 又都是复合事件了。

又例如，测量人群的身高 h，其目的是为了确定乘车的旅客需购全票 $B_1(h\geqslant 1.3\text{ m})$，半票 B_2（$1.1\text{ m}\leqslant h<1.3\text{ m}$），免票 $B_3(h<1.1\text{ m})$。显然 B_1 ，B_2 ，B_3 是三个基本事件，不能再分了。但若我们关心的是人群的身高数值，则在 $0<h\leqslant 2.5\text{ m}$ 范围内，任何一个实数都是基本事件。

今后，试验 E 的基本事件用 ω 表示，基本事件也称为样本点。

试验 E 的所有基本事件的全体所构成的集合，称为 E 的基本空间或样本空间，记为 Ω。而复合事件则是由基本空间中某些基本事件构成的集合。

举例如下：

E_1　抛一枚硬币，观察所出现的面。

基本事件 ω_1 =“正面朝上”，ω_2 =“反面朝上”。

基本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$。

E_2　掷一颗骰子，观察向上那面的点数。

基本事件 ω_i = 出现点数 i，$i=1,2,3,\cdots,6$。

基本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}=\{1,2,3,4,5,6\}$。

事件 A：“掷出的点数大于 3”，则 $A=\{4,5,6\}$。

E_3　观测某电话总机在一天内所接到的呼唤次数。

基本事件 ω_i = 呼唤次数 i，$i=0,1,2,3,\cdots$。

基本空间 $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots\}=\{0,1,2,\cdots\}$。

事件 A：“接到的呼唤次数为 100 ~ 200”，则 $A=\{100,101,\cdots,199,200\}$。

E_4　用一门炮向区域 D 内某目标射击，观察弹着点的位置（用以目标为原点的直角坐标 (x,y) 表示）。

基本事件 $\omega=\{\omega(x,y)\}$。

基本空间 Ω = {全部弹着点的散布区域 D}。

事件 A：“弹着点位于以目标为圆心，R 为半径的圆 G 内”，则 $A=\{\omega:\omega\in G\}$。

E_5　观测某地年降水量。

基本事件 ω_x = 年降水量为 x。

基本空间 $\Omega=\{x:0\leqslant x\leqslant PMP\}$，设该地可能最大年降水量为 PMP。

事件 A：“年降水量≤500 mm”，则 $A=\{x:0\leqslant x\leqslant 500\}$。

E_6　一个盒中装有完全相同的10个球，分别标以号码1，2，…，10，从中随机抽取一个球，观察球的标号的奇偶性。

基本事件 ω_1 =“球的标号为奇数”，ω_2 =“球的标号为偶数”。

基本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$。

E_7　在随机试验 E_6 中，把“观察球的标号的奇偶性”改为“观察球的标号”，试验的要求变了，研究的内容不一样，基本事件也发生相应的变化。

基本事件 ω_i = 取得球的标号为 i。

基本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{10}\} = \{1, 2, \cdots, 10\}$。

事件 A：“所取球的标号为偶数”，则 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$。

有了随机试验和基本空间的概念后，就可以通过研究随机试验来研究随机现象的普遍规律，而不涉及具体的随机现象了。

三、事件之间的关系与运算

（一）事件之间的关系

研究随机现象，常常要研究几个事件以及它们之间的关系。例如，研究一次洪水时，不仅要考虑洪峰流量，还要考虑洪水总量；研究区域洪水时，不仅要研究干流洪水，还要研究支流洪水；不仅要关心下游洪水，还要关心上游洪水。详细地分析各个事件之间的关系，不仅能使我们更加深刻地认识事件的本质，而且还能大大简化某些复杂事件的概率计算。

设 Ω 为随机试验 E 的基本空间，$A, B, C, A_i (i = 1, 2, \cdots)$ 是定义在 Ω 中的事件，则事件之间的关系可归结为下列几种。

1. 包含关系

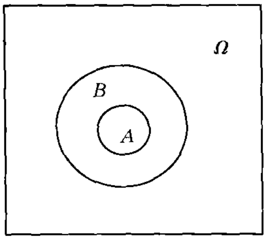

图1-1

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称 A 是 B 的特款。记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$，此时属于 A 的基本事件都属于 B，可用图1-1表示。图中方形区域表示基本空间 Ω，圆 A 和圆 B 分别表示事件 A 和事件 B。例如，从一批新产品中任取10件产品，设 A 表示“10件产品中有3件次品”，B 表示“10件产品中有1件次品”，则 B 包含 A，因为“10件产品中有3件次品”发生后，则“10件产品中有1件次品”必然会发生。即事件 A 发生必然导致事件 B 发生。又如，某战士打靶，在一次射击中，设 A 表示“命中9环”，B 表示“至少命中7环”，显然 A、B 两事件有明显的关系，A 发生后，B 也一定发生，故 B 包含 A。

若事件 B 包含事件 A，且事件 A 也包含事件 B，即 $B \supset A$ 及 $A \supset B$ 同时成立，则称事件 A 与事件 B 等价（或相等），记为 $A = B$。此时，事件 A 与事件 B 所含的基本事件相同。

显然，对 Ω 中的任何事件，必有 $\Omega \supset A \supset \varnothing$。

2. 互斥关系（互不相容）

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，则称事件 A 与事件 B 互不相容，或称 A 与 B 互斥，可用图1-2表示。显然，互不相容事件不含相同的基本事件。例如，设 A 表示“武汉市一年中降水日数超过88 d”，B 表示“武汉市一年中降水日数少于70 d”，则事件 A 与事件 B

不能同时发生，所以 A 与 B 互斥。又如，从一批编号（1～50）考签中任意抽取一张，A 表示“抽得的号数小于 20”，B 表示“抽得的号数大于 30”，显然，A，B 不可能同时发生，所以 A 与 B 互斥。

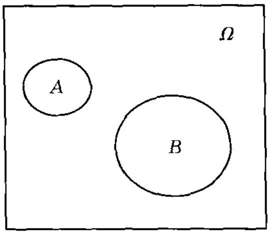

图 1-2

若 A 与 B 能同时发生，则称 A 与 B 为相容事件。显然，基本事件是互不相容的。

3. 对立事件（互逆事件）

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，但每次试验中必有一个发生，则称事件 A 是事件 B 的对立事件（逆事件），或称事件 B 是事件 A 的对立事件（逆事件），或称事件 A 与事件 B 是对立事件，记成 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$。通常将 A 的对立事件记为 $\overline{A}$，显然 $\overline{A}$ 的对立事件即为 A，即 $\overline{\overline{A}}=A$。$A$ 的对立事件 $\overline{A}$ 是由基本空间中不属于 A 的基本事件组成的。同理，B 的对立事件 $\overline{B}$ 由基本空间中不属于 B 的基本事件组成，如图 1-3 所示。

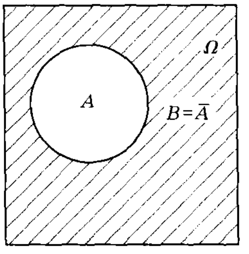

图 1-3

若令 A 表示“武汉市的年降水日数大于等于 88 d”，B 表示“武汉市的年降水日数少于 88 d”，那么事件 A 和事件 B 是对立事件，即 $A=\overline{B}$或 $B=\overline{A}$。

这里需要指出，两个事件 A，B 对立与互斥的差别在于后者不要求 A 与 B 中一定有一个发生，而二者共同之点在于 A 与 B 不能同时发生。所以，两个对立的事件一定是互斥的，但两个互斥的事件不一定是对立的。例如，设事件 A 表示“产品合格”，事件 B 表示“产品不合格”，今随机抽出一件产品进行检验。显然事件 A 与事件 B 不可能同时发生，但是必有一个发生，即抽出的产品要么合格，要么不合格。又如，某射手在一次射击中，“命中 9 环”（设事件 A 表示），“命中 8 环”（设事件 B 表示）是不可能同时发生的，但也可能同时都不发生。即某射手命中的既不是 9 环，也不是 8 环，可能命中的是 10 环。

（二）事件的运算

1. 事件之和

如果定义事件 C 为“事件 A 与事件 B 中至少有一个出现”，则称事件 C 为事件 A 与事件 B 的和（或并），记作 $C=A+B$ 或 $C=A\cup B$。显然事件 C 包含而且只包含 A 与 B 的所有基本事件。

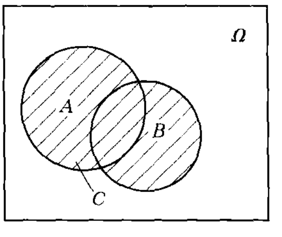

图 1-4

图 1-4 表示事件 C 为事件 A 与事件 B 的和。图中的阴影部分为事件 C。

【例 1-5】 高射炮向敌机连发 2 弹，以 C 表示事件“击中敌机”，A 表示事件“第一弹命中”，B 表示事件“第二弹命中”，则事件 C 为事件 A 与事件 B 的和。因为，如果事件 A 发生，即第一弹命中，则事件 C“击中敌机”发生；如果事件 B 发生，即第二弹命中，则事件 C 也发生。如果 A 与 B 都发生，即两弹都命中，当然 C 也发生，也就是说，如果 A 与 B 中至少有一个发生，C 就发生，所以 C 为 A 与 B 之和。

【例 1-6】 衡量圆柱形产品质量有两个指标:长度和直径。如果以 C 表示事件"产品不合格",A 表示事件"产品长度不合格",B 表示事件"产品直径不合格",那么,事件 A 与事件 B 中至少有一个发生,事件 C 就发生,所以事件 C 是事件 A 与事件 B 的和,即 $C = A + B$。

事件之和的概念可以推广到有限个或可列多个事件的情况。如果定义事件 A 为"事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生",则事件 A 就是事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和,记作 $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$,或 $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$,或 $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$,也可记为 $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$。

由事件之和的定义可知,两个相同事件之和仍是它本身,即 $A + A = A$;如果 $A \supset B$,则 $A + B = A$。

2. 事件之积

如果定义事件 C 为"事件 A 与事件 B 同时发生",则称事件 C 为事件 A 与事件 B 的积(或交集),记作 $C = A \cdot B$,或 $C = A \cap B$。

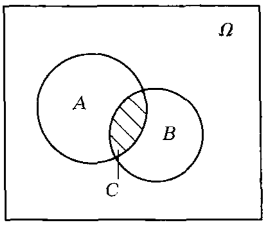

图 1-5

如图 1-5 所示,图中阴影部分为事件 C。显然,事件 C 包含而且只包含 A 与 B 共同的基本事件。

【例 1-7】 从编号为 1 ~ 15 的 15 张考签中任抽一张,令 A 为事件"抽到偶数号考签",B 为事件"抽到的考签号数是 3 的倍数",则 $C = A \cap B$ 就是"抽到的考签号数既是偶数又是 3 的倍数"这一事件,即 C 为"抽到 6 号或 12 号考签"。

【例 1-8】 在例 1-6 中,若以 C 表示事件"产品合格",A 表示事件"长度合格",B 表示事件"直径合格",那么,只有长度与直径都合格时,产品才合格,所以 C 为 A 与 B 的积,即 $C = AB$。

事件之积的概念可以推广到任意多个事件的情况,如果把"事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生"记作事件 A,则事件 A 为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积,记作 $A = A_1A_2\cdots A_n$ 或 $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$,也可记为 $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$。

根据事件之积的定义可知,两个相同事件之积等于它本身,即 $A \cdot A = A$;如果 $A \supset B$,则 $AB = B$;$A\Omega = A$。

3. 事件之差

如果定义事件 C 为"事件 A 发生,而事件 B 不发生",则称事件 C 为事件 A 与事件 B 的差,记作 $C = A - B$。显然事件 C 包含而且只包含属于 A,但不属于 B 的基本事件。

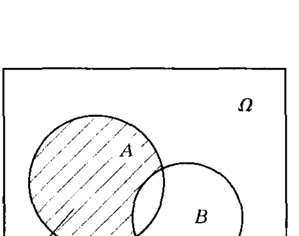

图 1-6

图 1-6 表示事件 A 与事件 B 的差。图中从区域 A 中去掉属于 B 的部分,阴影所示区域即为事件 C。

【例 1-9】 掷一颗骰子,观察它出现的点数。设 A 表示事件"出现偶数点",B 表示事件"出现 2 点",则事件 $A - B$ 是一个事件 C,它表示"出现 4 点或 6 点"。

【例 1-10】 令 A 表示"某流域一年内发生 1 ~ 3 次洪水"，B 表示"该流域一年内发生 2 ~ 5 次洪水"，则 $A-B$ 表示"该流域一年内发生 1 次洪水"。

因为 $A-B$ 表示在一次试验中 A 发生而 B 不发生，而 B 不发生，必有 $\overline{B}$ 发生，所以 $A-B$ 表示 A 与 $\overline{B}$ 同时发生，故 $A-B=A\overline{B}$。

根据前面的定义，事件 A 与事件 B 不相容（互斥）可以写成

$$AB=\varnothing$$

事实上，不论"A 与 B 互斥"还是"$AB=\varnothing$"都表示事件 A 与事件 B 不可能同时发生。同样，事件 A 与事件 B 对立，可以写成

$$A+B=\Omega \text{ 且 } AB=\varnothing$$

事实上，$A+B=\Omega$ 表示事件 A 与事件 B 至少要发生一个，$AB=\varnothing$ 表示事件 A 与事件 B 不可能同时发生，因此 $A+B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$ 表示在一次试验中，事件 A 与事件 B 不能同时发生，但必有一个发生，即表示事件 A 与事件 B 互为对立事件。

四、事件的集合表示

前面已经指出过，可以用基本空间中的集合来表示事件。现在再详细介绍一下事件的集合表示方法。

首先，建立集合论与概率论之间的对应关系，进而借助集合论的知识来研究事件间的关系与运算。

对于一个试验的每一个基本事件，可以用只含一个元素 ω 的单点集 $\{\omega\}$ 表示。而复合事件则是由基本空间中若干元素构成的集合，是基本空间（全集）中的子集。基本空间也是一个事件，它表示每次试验中出现基本空间中的一个事件，显然这是必然事件。而空集是不含任何元素的事件，即每次试验中不出现基本空间中的任一事件，这是不可能的，因此空集代表不可能事件。这样，就可在事件与点集之间建立起如表 1-1 所示的一种对应关系了。

表 1-1 集合论与概率论之间的关系

符号	集合论含义	概率论含义
Ω	空间、全集	基本空间，样本空间，必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件
$\omega\in\Omega$	Ω 中的点（元素）	基本事件
$A\subset\Omega$	A 是 Ω 的子集	事件 A
$A\subset B$	集合 A 包含在集合 B 中	事件 A 包含于事件 B 中
$A=B$	集合 A 与集合 B 相等（或等价）	事件 A 与事件 B 相等（或等价）
$A\cup B$	集合 A 与集合 B 之和（或并）	事件 A 与事件 B 至少有一个发生（事件 A 与事件 B 之和或并）
$A\cap B$	集合 A 与集合 B 之交	事件 A 与事件 B 同时发生（事件 A 与事件 B 的积或交）
$\overline{A}$	集合 A 的余集	事件 A 的逆事件（对立事件）
$A-B$	集合 A 与集合 B 之差	事件 A 发生而事件 B 不发生（事件 A 与事件 B 的差）
$A\cap B=\varnothing$	集合 A 与集合 B 没有公共元素	事件 A 与事件 B 互不相容（互斥）

建立起集合论与概率论的上述对应关系之后，就可以借助集合论的全部知识来研究概率论。例如，由集合的运算法则可知，事件间的运算满足下列法则：

交换律 $A+B=B+A \quad AB=BA$

结合律 $(A+B)+C=A+(B+C) \quad (AB)C=A(BC)$

分配律 第一分配律 $(A+B)C=AC+BC$ 第二分配律 $AB+C=(A+C)(B+C)$

德·摩根定律 $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B} \quad \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$

对 n 个事件，德·摩根定律也成立，即

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

差化积公式 $A-B=A\cap\overline{B}$

若 $B\supset A$，则 $A\cup B=B$（求和取大） $A\cap B=A$（求积取小）

对任何事件，总有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$ 且 A 与 $\varnothing$ 互斥（因为 $A\cap\varnothing=\varnothing$）

在对事件进行运算时，规定运算顺序为：先进行逆的运算，再进行积的运算，最后进行和与差的运算，如有括号，则先进行括号内的运算。

【例 1-11】 设 A,B,C 是三个随机事件，试用 A,B,C 表示下列各事件：① 只有 A 发生；②A 和 B 都发生而 C 不发生；③A,B,C 都发生；④A 发生，B 不发生；⑤A,B,C 至少有一个发生；⑥ 三个事件都不发生；⑦ 至少有两个事件发生。

解 ①$A\overline{B}\,\overline{C}$ ②$AB\overline{C}$ ③ABC ④$A\overline{B}$

⑤$A+B+C$ ⑥$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ ⑦$AB\cup AC\cup BC$

【例 1-12】 化简 $(A+B)(A+\overline{B})$。

解
$$\begin{aligned}(A+B)(A+\overline{B})&=AA+A\overline{B}+BA+B\overline{B}=A+A\overline{B}+BA\\&=A+A(B+\overline{B})=A+A\Omega=A+A=A\end{aligned}$$

第二节 概率的定义与性质

随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生，而且人们还发现在同一试验中某些事件发生的可能性要大些，而另一些事件发生的可能性要小些。例如，从装有 1 个白球和 4 个黑球的盒子中任取一球（假设白球与黑球的大小、形状、手感等都一样），抽到黑球的可能性要比抽到白球的可能性大。很自然地，为了研究随机事件发生的规律，有必要用一个数来衡量事件发生的可能性大小，这个数就称为该事件发生的概率或几率，事件 A 发生的概率就记为 $P(A)$。一个事件发生的可能性的大小，是其本身所固有的属性，它不依人们的主观意志而改变。例如，投掷一枚质地均匀的硬币，正面朝上的可能性大小不会因谁投掷而改变。

下面我们来讨论如何确定随机事件发生的概率 $P(A)$。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com