

普通高校应用学科数学教材系列

微积分

(第二版)

WEI JI FEN

◎ 主编 柴惠文

◎ 编者 蒋福坤 刘 静 刘正春 杨晓春



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

普通高校应用学科数学教材系列

微 积 分

(第二版)

主编 柴惠文

编者 蒋福坤 刘 静

刘正春 杨晓春



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分/柴惠文主编. —2版. —上海:华东理工大学出版社,2010.5

ISBN 978-7-5628-2685-9

I. 微... II. 柴... III. 微积分-高等学校-教材
IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 038175 号

普通高校应用学科数学教材系列

微积分(第二版)

主 编 / 柴惠文

编 者 / 蒋福坤 刘 静 刘正春

责任编辑 / 胡 景

责任校对 / 李 晔

封面设计 / 陆丽君

出版发行 / 华东理工大学出版社

地址:上海市梅陇路 130 号,200237

电话:(021)64250306(营销部) (021)64252174(编辑室)

传真:(021)64252707

网址:press.ecust.edu.cn

印 刷 / 常熟华顺印刷有限公司

开 本 / 787mm×1092mm 1/16

印 张 / 19.75

字 数 / 498 千字

版 次 / 2008 年 3 月第 1 版 2010 年 5 月第 2 版

印 次 / 2010 年 5 月第 1 次

印 数 / 6 051—9 050 册

书 号 / ISBN 978-7-5628-2685-9/O·221

总 定 价 / 39.00 元

(本书如有印装质量问题,请到出版社营销部调换。)

第二版前言

本书第一版自出版以来,以易用性及通俗性受到读者的欢迎,也收到同仁的鼓励及其中值得探讨的问题,并对修改提出了宝贵的意见.借此机会,我们对关心和支持本教材的广大同仁及读者表示衷心地感谢.

修订情况如下:

- (1) 订正了原教材中的疏漏以及排版印刷等方面的错误;
- (2) 调整了教材中部分内容的表述,使之更通俗易懂;
- (3) 调整了部分例题和习题,使得学生学习和教师使用等可以更得心应手;
- (4) 对原教材的第3章第5节以及第4章第3~5节的内容作了较大的调整和修改.

在修订过程中,我们广泛地收集了同仁及读者对原教材的意见及建议,几位编者也多次在一起讨论,希望通过这次修订使本教材在第一版的基础上更加完善,能让使用此教材的老师 and 学生满意.欢迎大家继续提出批评和指正.

编 者

2010年1月

第一版前言

本书是参照教育部制订的高等数学课程教学基本要求,依据经济、管理类各专业对高等数学课程的教学要求而编写的.在编写过程中,按照循序渐进、深入浅出的原则,突出微积分的基本思想和基本方法,强化基本方法的训练.据此,我们对教材的体系结构进行了必要的调整,对基本概念的叙述,力求从身边的实际问题出发,自然地引入;适当淡化运算上的一些技巧要求,适当降低了一元函数的极限理论的要求,从简处理了一些公式的推导和一些定理的证明.教材的编写理念是:在不失科学性的前提下不过分强调某些严密论证及研究过程,而是突出数学思想的介绍,突出数学方法训练及应用,让学生更多地体会微积分的思想方法,增强他们的应用意识和应用能力.让学生通过对本书的学习,能较好地了解各部分内容的内在联系与区别,在总体上较好地把握微积分的思想和方法.

为加强基本能力的培养,本书的例题、习题设置较多,习题按节配置,遵照循序渐进的原则,既注意基本概念、基本理论和方法,又注意加强经济学和其他方面应用性习题的配置.每章后配有总复习题,以供复习、总结、提高之用.文中“*”部分为选学内容,可作为所学知识的扩展.

本书共分10章,第1~2章由蒋福坤编写;第3~4章由刘静编写;第5~6章由杨晓春编写;第7~8章由刘正春编写;第9~10章由柴惠文编写,全书由柴惠文统稿.

严从荃教授认真审阅了全书,并提出了非常宝贵的意见.在本书的编写过程中,得到许多同行的有价值的建议,在此一并致谢.

由于编者水平有限,书中难免存在不妥之处,恳请广大读者批评指正,以便本书在教学中不断完善.

编 者

2007年10月

目 录

1 函数	1	2 极限与连续	19
1.1 集合	1	2.1 数列的极限	19
1.1.1 集合的概念	1	2.1.1 数列的概念与性质	19
1.1.2 集合的运算	1	2.1.2 数列的极限	20
1.1.3 区间和邻域	2	2.1.3 数列极限的性质	21
习题 1.1	3	习题 2.1	22
1.2 函数	3	2.2 函数的极限	22
1.2.1 函数的概念	3	2.2.1 函数极限的定义	22
1.2.2 反函数	5	2.2.2 函数极限的性质	26
习题 1.2	5	习题 2.2	26
1.3 函数的基本性质	6	2.3 无穷小与无穷大	27
1.3.1 函数的奇偶性	6	2.3.1 无穷小	27
1.3.2 函数的周期性	6	2.3.2 无穷大	28
1.3.3 函数的单调性	7	习题 2.3	30
1.3.4 函数的有界性	7	2.4 极限的运算法则	30
习题 1.3	8	2.4.1 极限的四则运算法则	30
1.4 初等函数	8	2.4.2 复合函数的极限运算法则	32
1.4.1 基本初等函数	8	习题 2.4	33
1.4.2 复合函数	12	2.5 极限存在准则 两个重要极限	33
1.4.3 初等函数	13	2.5.1 夹逼准则	33
习题 1.4	13	2.5.2 重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	34
1.5 经济学中的常用函数	13	2.5.3 单调有界准则	36
1.5.1 需求函数	14	2.5.4 重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	36
1.5.2 供给函数	14	2.5.5 连续复利	38
1.5.3 均衡价格	15	习题 2.5	38
1.5.4 成本函数	15	2.6 无穷小的比较	39
1.5.5 收益函数	16	习题 2.6	40
1.5.6 利润函数	16	2.7 函数的连续性	41
1.5.7 库存函数	17		
习题 1.5	17		
总习题一	18		

2.7.1 函数的连续性	41	3.5.3 基本初等函数的微分公式 与微分的运算法则	75
2.7.2 函数的间断点	42	3.5.4 微分在近似计算中的应用	77
2.7.3 连续函数的运算与初等 函数的连续性	44	习题 3.5	78
习题 2.7	46	3.6 边际与弹性	80
2.8 闭区间上连续函数的性质	47	3.6.1 边际分析	80
2.8.1 最大值和最小值定理与有 界性	47	3.6.2 弹性分析	82
2.8.2 零点定理与介值定理	48	习题 3.6	86
习题 2.8	49	总习题三	87
总习题二	49		
3 导数与微分	51	4 中值定理及导数应用	89
3.1 导数的概念	51	4.1 中值定理	89
3.1.1 两个引例	51	4.1.1 罗尔定理	89
3.1.2 导数的定义	52	4.1.2 拉格朗日中值定理	90
3.1.3 导数的几何意义	56	4.1.3 柯西中值定理	93
3.1.4 函数可导性与连续性的 关系	56	习题 4.1	94
习题 3.1	57	4.2 洛必达法则	95
3.2 函数的求导法则与求导公式	58	4.2.1 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 未定式的极限	95
3.2.1 函数的和、差、积、商的求 导法则	58	4.2.2 其他未定式的极限	97
3.2.2 反函数的求导法则	60	习题 4.2	99
3.2.3 复合函数的求导法则	61	4.3 函数的单调性与极值	99
3.2.4 基本求导法则与导数公式	62	4.3.1 函数单调性的判别法	99
习题 3.2	64	4.3.2 函数的极值	101
3.3 高阶导数	65	习题 4.3	105
习题 3.3	68	4.4 函数的最大值与最小值及其在 经济中的应用	106
3.4 隐函数及由参数方程所确定的 函数的导数	68	4.4.1 函数的最大值与最小值 ...	106
3.4.1 隐函数的导数	68	4.4.2 函数的最值在经济问题中 的应用举例	107
3.4.2 由参数方程所确定的函数 的导数	70	习题 4.4	109
习题 3.4	72	4.5 曲线的凹凸性及函数图形的 描绘	110
3.5 函数的微分	73	4.5.1 曲线的凹凸性及拐点	110
3.5.1 微分的定义	73	4.5.2 曲线的渐近线	113
3.5.2 微分的几何意义	75	4.5.3 函数图形的描绘	114
		习题 4.5	116
		4.6 泰勒公式	117

习题 4.6	120	6.4 定积分的计算	153
总习题四	120	6.4.1 定积分的换元积分法	153
5 不定积分	122	6.4.2 定积分的分部积分法	156
5.1 不定积分的概念和性质	122	习题 6.4	158
5.1.1 原函数与不定积分的概念	122	6.5 广义积分与 Γ 函数	158
5.1.2 不定积分的几何意义	123	6.5.1 无穷限的广义积分	158
5.1.3 基本积分表	123	6.5.2 无界函数的广义积分	160
5.1.4 不定积分的性质	124	6.5.3 Γ 函数	161
习题 5.1	126	习题 6.5	162
5.2 换元积分法	126	6.6 定积分的应用	162
5.2.1 第一换元积分法(凑微分法)	126	6.6.1 定积分的元素法	163
5.2.2 第二换元积分法	130	6.6.2 平面图形的面积	164
习题 5.2	134	6.6.3 立体的体积	165
5.3 分部积分法	134	6.6.4 简单的经济问题	167
习题 5.3	137	习题 6.6	168
5.4 有理函数的不定积分	138	总习题六	169
5.4.1 有理函数与有理函数的不定积分	138	7 多元函数微分学	171
5.4.2 三角函数有理式的不定积分	140	7.1 向量代数与空间解析几何简介	171
习题 5.4	141	7.1.1 空间直角坐标系	171
总习题五	141	7.1.2 空间两点间的距离	172
6 定积分	143	7.1.3 向量代数简介	172
6.1 定积分的概念	143	7.1.4 空间曲面及其方程	174
6.1.1 定积分概念产生的背景	143	习题 7.1	177
6.1.2 定积分的定义	144	7.2 多元函数的基本概念	177
6.1.3 定积分的几何意义	146	7.2.1 平面点集	177
习题 6.1	146	7.2.2 多元函数	178
6.2 定积分的性质	147	7.2.3 二元函数的极限与连续	179
习题 6.2	149	习题 7.2	181
6.3 微积分基本公式	149	7.3 偏导数	181
6.3.1 积分上限的函数及其导数	150	7.3.1 偏导数的定义	181
6.3.2 微积分基本公式	151	7.3.2 偏导数的几何意义及函数连续性 与可偏导性的关系	183
习题 6.3	152	7.3.3 高阶偏导数	184
		7.3.4 偏导数在经济分析中的 应用	184
		习题 7.3	186

7.4 全微分	186	9.3.1 交错级数的收敛性	230
7.4.1 全微分的定义	186	9.3.2 任意项级数的绝对收敛与 条件收敛	231
7.4.2 函数可微分的条件	187	习题 9.3	233
7.4.3 微分在近似计算中的应用	189	9.4 幂级数	233
习题 7.4	189	9.4.1 函数项级数的一般概念 ...	233
7.5 复合函数与隐函数微分法	190	9.4.2 幂级数及其收敛性	234
7.5.1 复合函数的微分法	190	9.4.3 幂级数的运算性质	238
7.5.2 隐函数的微分法	192	习题 9.4	240
习题 7.5	193	9.5 函数展开成幂级数	240
7.6 多元函数的极值问题	194	9.5.1 泰勒(Taylor)级数	240
7.6.1 多元函数极值	194	9.5.2 函数展开成幂级数的方法	242
7.6.2 条件极值与拉格朗日乘数 法	197	习题 9.5	247
习题 7.6	200	9.6 函数的幂级数展开式的应用	247
总习题七	200	9.6.1 函数值的近似计算	247
8 二重积分	203	9.6.2 欧拉公式	250
8.1 二重积分的概念与性质	203	习题 9.6	250
8.1.1 二重积分的概念	203	总习题九	251
8.1.2 二重积分的性质	205	10 常微分方程和差分方程	253
习题 8.1	206	10.1 微分方程的基本概念	253
8.2 二重积分的计算	206	10.1.1 微分方程的概念	253
8.2.1 在直角坐标系下计算二重 积分	206	10.1.2 微分方程的阶	254
8.2.2 在极坐标系下计算二重积 分	211	10.1.3 微分方程的解	254
8.2.3 广义二重积分	213	10.1.4 微分方程的通解与特解	254
习题 8.2	214	10.1.5 微分方程的通解与特解 的关系	254
总习题八	215	习题 10.1	255
9 无穷级数	217	10.2 一阶微分方程	255
9.1 常数项级数的概念和性质	217	10.2.1 可分离变量的微分方程 与分离变量法	256
9.1.1 常数项级数的概念	217	10.2.2 齐次方程	257
9.1.2 级数的基本性质	220	10.2.3 一阶线性微分方程	259
习题 9.1	223	10.2.4* 贝努利方程	261
9.2 正项级数的审敛法	223	10.2.5 一阶微分方程在经济上的 应用实例	262
习题 9.2	229		
9.3 任意项级数及其审敛法	230		

习题 10.2	263	分方程及其解法	272
10.3 可降阶的二阶微分方程	264	习题 10.5	278
10.3.1 $y''=f(x)$ 型的微分方程	264	10.6 差分方程	278
10.3.2 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程	265	10.6.1 差分的概念及性质	278
10.3.3 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程	266	10.6.2 差分方程的基本概念	280
习题 10.3	267	10.6.3 线性差分方程解的基本定理	281
10.4 二阶线性微分方程解的结构	267	10.6.4 一阶常系数线性差分方程的解法	282
习题 10.4	269	10.6.5 差分方程在经济学中的应用	286
10.5 二阶常系数线性微分方程	270	习题 10.6	287
10.5.1 二阶常系数齐次线性微分方程及其解法	270	总习题十	287
10.5.2 二阶常系数非齐次线性微		附录 习题参考答案与提示	289
		参考文献	305

函数是对现实世界中各种变量之间的相互依存关系的一种抽象,它是微积分学研究的基本对象.中学时,我们对函数的概念和性质已经有了初步的了解.在本章中,我们将进一步阐明函数的一般定义,介绍函数的简单性态以及反函数、复合函数、基本初等函数和初等函数等概念,这些都是学习这门课程的基础.

1.1 集合

1.1.1 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念.例如某校一年级的全体学生构成一个集合,某个书柜的全部藏书构成一个集合,全体实数构成一个集合等.

一般地,我们把具有某种特定性质的对象组成的总体叫做集合.把组成某一集合的各个对象叫做这个集合的元素.

习惯上,用大写拉丁字母 $A, B, C, X, Y, \dots$ 表示集合,用小写拉丁字母 $a, b, c, x, y, \dots$ 表示集合的元素.对于给定的集合来说,它的元素是确定的.如果 a 是集合 A 中的元素,则用 $a \in A$ 来表示;如果 a 不是集合 A 中的元素,则用 $a \notin A$ 来表示.

含有有限个元素的集合称为有限集;含有无限多个元素的集合称为无限集;不含任何元素的集合称为空集,记为 $\emptyset$.

表示集合的方法主要有两种,一种是列举法,就是把集合的所有元素一一列举出来,写在花括号内.例如,方程 $x^2 - 4 = 0$ 的解构成的集合可表示为 $A = \{-2, 2\}$.另一种是描述法,就是指出集合的元素所具有的性质.一般地,将具有某种性质的对象 x 所构成的集合表示为

$$A = \{x | x \text{ 具有某种性质}\}.$$

例如,方程 $x^2 - 4 = 0$ 的解集也可以表示为 $A = \{x | x^2 - 4 = 0\}$.

元素为数的集合称为数集,通常用 N 表示自然数集, Z 表示整数集, Q 表示有理数集, R 表示实数集.有时在表示数集的字母右上角添“+”、“-”等上标,来表示该数集的几个特定子集.以实数为例, R^+ 表示全体正实数集; R^- 表示全体负实数集,其他数集的情况类似,不再赘述.

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,或者称 A 包含于 B 或 B 包含 A ,记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

若集合 A 与 B 互为子集,即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,就称 A 与 B 相等,记作 $A = B$.

1.1.2 集合的运算

集合有三种基本运算,即并、交、差.

设有集合 A 与 B ,它们的并集记作 $A \cup B$,定义为

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

集合 A 与 B 的交集记作 $A \cap B$, 定义为

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

集合 A 与 B 的差集记作 $A \setminus B$, 定义为

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ 但 } x \notin B\}.$$

有时, 我们把研究某一问题时所考虑的对象全体称为全集, 并用 I 表示, 把差集 $I \setminus A$ 特别称为 A 的余集或补集, 记作 A^c . 例如, 在实数集 $\mathbf{R}$ 中, 集合 $A = \{x | |x| < 1\}$ 的余集为 $A^c = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 1\}$.

集合的并、交、余运算满足如下运算律:

交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

对偶律 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$

以上这些运算律都容易根据集合相等的定义验证.

在两个集合之间还可以定义直积或笛卡儿 (Descartes) 乘积. 设 A, B 是任意的两个集合, 则 A 与 B 的直积记作 $A \times B$, 定义为如下的由有序对 (a, b) 组成的集合:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

例如, $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, 即为 xOy 平面上全体点的集合, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

1.1.3 区间和邻域

区间和邻域是常用的一类实数集.

设 a 和 b 都是实数, 且 $a < b$, 数集

$$\{x | a < x < b\}$$

称为开区间, 记作 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\},$$

a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点. 数集

$$\{x | a \leq x \leq b\}$$

称为闭区间, 记作 $[a, b]$, 即

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\},$$

a 和 b 称为闭区间 $[a, b]$ 的端点. 类似地有

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}, [a, b) = \{x | a \leq x < b\},$$

$(a, b], [a, b)$ 都称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间, $b - a$ 的值称为这些区间的长度. 从数轴上看, 这些有限区间是长度为有限值的线段. 闭区间 $[a, b]$ 和开区间 (a, b) 在数轴上表示方法分别如图 1-1(a) 和 (b) 所示. 此外还有无限区间, 引进记号 $+\infty$ (读作正无穷大) 及 $-\infty$ (读作负无穷大), 则可用类似的记号表示无限区间. 例如

$$[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}, (-\infty, b) = \{x | x < b\},$$

这两个无限区间在数轴上的表示如图 1-1(c)和(d)所示.

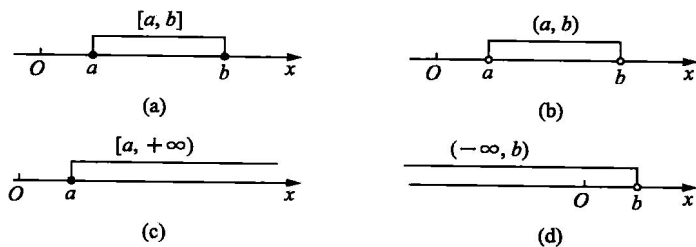


图 1-1

实数集 $\{x | |x-a| < \delta, \delta > 0\}$ 称为点 a 的 δ 邻域, 记为 $U(a, \delta)$, 点 a 叫做邻域的中心, δ 叫做邻域的半径, 它在数轴上表示以 a 为中心, 长度为 2δ 的对称开区间, 如图 1-2 所示.

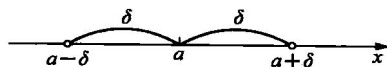


图 1-2

实数集 $\{x | 0 < |x-a| < \delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域, 记作 $\dot{U}(a, \delta)$. 为了方便, 有时把开区间 $(a-\delta, a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域, 开区间 $(a, a+\delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域. 当不需要强调邻域的半径时, 可用 $U(a)$ 和 $\dot{U}(a)$ 分别表示点 a 的某个邻域和某个去心邻域.

习题 1.1

- 如果 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$, 下列各种写法哪些是对的? 哪些是不对的?
 $1 \in A$; $0 \notin B$; $\{1\} \in A$; $1 \subset A$; $\{1\} \subset A$; $0 \subset A$; $\{0\} \subset A$; $\{0\} \subset B$; $A = B$; $A \supset B$; $\emptyset \subset A$; $A \subset A$.
- 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{2, 4, 6\}$, 求:
 (1) $A \cup B$; (2) $A \cap B$; (3) $A \cup B \cup C$;
 (4) $A \cap B \cap C$; (5) $A \setminus B$.
- 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合:
 (1) $|x| \leq 3$; (2) $|x-2| \leq 1$; (3) $|x-a| < \epsilon$ (a 为常数, $\epsilon > 0$);
 (4) $|x| \geq 5$; (5) $|x+1| > 2$.
- 用区间表示下列点集, 并在数轴上表示出来:
 (1) $A = \{x | |x+2| < 2\}$; (2) $B = \{x | 1 < |x-2| < 3\}$.

1.2 函数

1.2.1 函数的概念

函数是变量之间满足一定条件的一种对应关系. 在中学数学中也学习过函数, 现在我们把函数的概念叙述如下.

定义 1 设有两个变量 x 与 y , D 为一个非空实数集. 如果存在一个确定的法则 (或称对应法则) f , 使得对于每一个 $x \in D$, 都有唯一的一个实数 y 与之对应, 则称这个对应法则 f 为定义在实数集 D 上的一个一元函数, 简称函数, 记为 $y = f(x)$, D 称为 $f(x)$ 的定义域. 函

数 $f(x)$ 的定义域 D 通常记为 $D(f)$.

对于 $x_0 \in D(f)$, 由法则 f 所对应的实数值 y 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 通常记为 $f(x_0)$, 有时也记为 $y|_{x=x_0}$, 此时也称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义. 全体函数值组成的集合称为函数 $f(x)$ 的值域, 通常记为 $R(f)$, 即

$$R(f) = \{y | y = f(x), x \in D(f)\}.$$

从函数的定义来看, 当定义域与对应法则确定后, 函数就完全确定了. 可见定义域与对应法则是确定函数的两个要素, 因此, 对于函数 $f(x)$ 、 $g(x)$, 如果它们有相同的定义域和对应法则, 它们就是同一个函数.

表示函数的主要方法有三种: 表格法、图形法、解析法(公式法). 其中, 图形法表示函数是基于函数图形的概念, 即坐标平面上的点集

$$\{(x, y) | y = f(x), x \in D(f)\}$$

称为函数 $y = f(x)$, $x \in D(f)$ 的图形如图 1-3 所示.

对于由解析式表示的函数, 其定义域一般是指使得函数表达式有意义的自变量取值的全体, 这种定义域也称为函数的自然定义域.

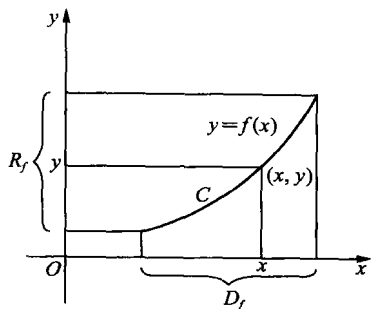


图 1-3

例 1 求函数 $y = \frac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域.

解 当 $3x-2 > 0$ 且 $3x-2 \neq 1$, 即 $x > \frac{2}{3}$ 且 $x \neq 1$ 时, 函数 $\frac{1}{\lg(3x-2)}$ 才有意义, 因此, $y = \frac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域为

$$D(f) = \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty).$$

例 2 求函数 $y = \arcsin \frac{x-1}{5} + \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域.

解 当 $\left|\frac{x-1}{5}\right| \leq 1$ 且 $x^2 < 25$, 即 $-4 \leq x \leq 6$ 且 $-5 < x < 5$ 时, 函数 $\arcsin \frac{x-1}{5} + \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 才有意义, 因此函数 $y = \arcsin \frac{x-1}{5} + \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域为

$$D(f) = [-4, 5).$$

在用解析法表示函数时, 有一种特别的情形: 函数在定义域的不同部分用不同的解析式表示, 这种函数称为分段函数.

例如, 函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

是定义域为 $D(f) = (-\infty, +\infty)$, 值域为 $R(f) = [0, +\infty)$ 的一个函数, 它的图形如图 1-4 所示. 当自变量 x 取 $(-\infty, 0)$ 内的数值时, 函数值由 $y = -x$ 确定; 而当自变量 x 取 $[0, +\infty)$ 内的数值时, 函数值由 $y = x$ 确定, 所以是一个分段函数.

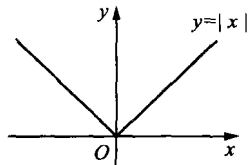


图 1-4

函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

也是分段函数, 它的定义域为 $D(f) = (-\infty, +\infty)$, 值域为 $R(f) = \{-1, 0, 1\}$, 图形如图 1-5 所示. 此函数也称为符号函数.

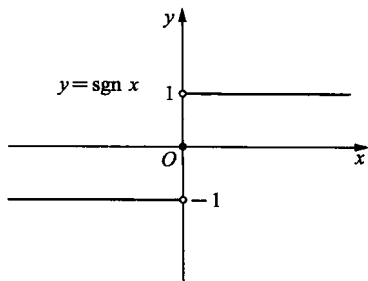


图 1-5

1.2.2 反函数

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $D(f)$, 值域是 $R(f)$, 如果对每一个 $y \in R(f)$, 都有唯一确定的 $x \in D(f)$ 与之对应, 且满足 $y=f(x)$, 则 x 是定义在 $R(f)$ 上以 y 为自变量的函数, 记此函数为

$$x = f^{-1}(y), \quad y \in R(f),$$

并称其为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**.

显见 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 互为反函数, 且 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是 $y=f(x)$ 的值域和定义域.

注意到在 $x=f^{-1}(y)$ 中, y 是自变量, x 是因变量. 但是习惯上, 常用 x 作为自变量, y 作为因变量. 因此, $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 常记为

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in R(f).$$

在平面直角坐标系 xOy 中, 函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称, 如图 1-6 所示.

什么样的函数才有反函数呢? 由定义可知, 函数 $y=f(x)$ 具有反函数的充分必要条件是对应法则 f 使得定义域中的点与值域中的点是一个对一的 (简称一一对应). 因为单调函数具有这种性质, 所以单调函数必有反函数.

对于单调函数, 求其反函数的步骤是先从 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$, 然后将 x 与 y 互换, 便得到反函数 $y=f^{-1}(x)$.

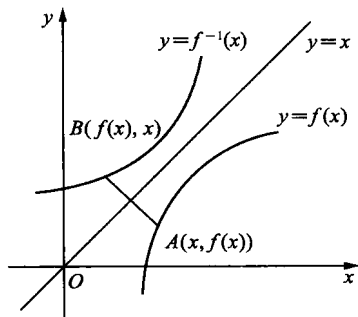


图 1-6

习题 1.2

1. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

- (1) $f(x) = \ln x^2$, $g(x) = 2 \ln x$; (2) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $g(x) = x-1$;
 (3) $f(x) = x$, $g(x) = \sin(\arcsin x)$; (4) $f(x) = x$, $g(x) = e^{\ln x}$.

2. 求下列函数的定义域:

- (1) $y = \sqrt{x-2} + \frac{1}{x-3} + \ln(5-x)$; (2) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{|x|-x}$; (3) $y = 2^{\frac{1}{x}} + \arcsin(\ln \sqrt{1-x})$;
 (4) $y = \arcsin \frac{1}{x}$; (5) $y = \sqrt{\lg \frac{5x-x^2}{4}}$; (6) $y = 1 - e^{1-x^2}$.

3. 求下列分段函数的定义域,并画出函数的图形:

$$(1) y = \begin{cases} \sqrt{4-x^2}, & |x| \leq 2 \\ x^2-1, & 2 \leq |x| < 4 \end{cases}; \quad (2) y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x-3, & 0 \leq x < 1 \\ -2x+1, & 1 \leq x < +\infty \end{cases}.$$

4. 设 $f(x) = \begin{cases} 1-2x, & |x| \leq 1 \\ x^2+1, & |x| > 1 \end{cases}$, 求 $f(0)$, $f(1)$, $f(-1.5)$, $f(1+h)-f(1)$.

5. 求下列函数的反函数:

$$(1) y=2x+1; \quad (2) y=\frac{x+2}{x-1}; \quad (3) y=x^3+2; \quad (4) y=1+\ln(x+2).$$

1.3 函数的基本性质

1.3.1 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 关于原点对称. 如果对于任何 $x \in D(f)$, 都有 $f(-x)=f(x)$, 则称 $y=f(x)$ 为偶函数; 如果对于任何 $x \in D(f)$, 都有 $f(-x)=-f(x)$, 则称 $y=f(x)$ 为奇函数. 不是偶函数也不是奇函数的函数, 称为非奇非偶函数.

由定义知: 偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称, 如图 1-7(a) 和 (b) 所示.

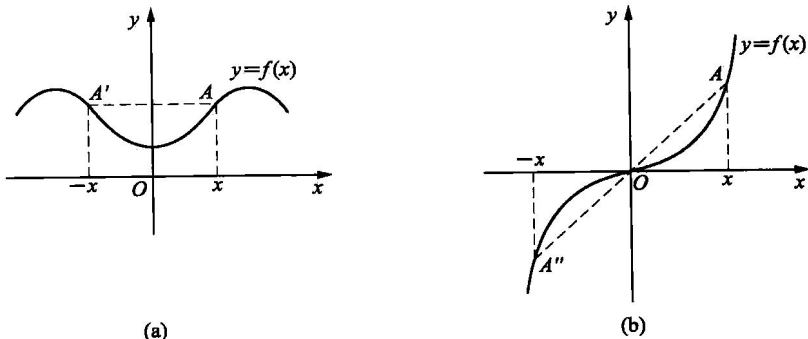


图 1-7

例如, $y=x^2$ 和 $y=\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是偶函数; $y=x^3$ 和 $y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是奇函数; 而 $y=x+\cos x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

1.3.2 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D(f)$, 如果存在一个正数 l , 使得对于任意 $x \in D(f)$, 都有 $(x \pm l) \in D(f)$, 且

$$f(x \pm l) = f(x)$$

恒成立, 则称 $y=f(x)$ 为周期函数, l 称为 $f(x)$ 的周期, 周期函数的周期通常是指最小正周期.

周期为 l 的函数, 在其定义域内长度为 l 的区间上, 函数图形具有相同的形状, 如图 1-8 所示.

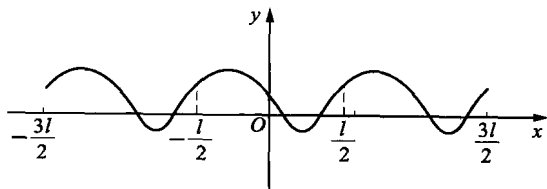


图 1-8

例如, 函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数.

1.3.3 函数的单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果对于区间 I 内任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加; 当 $x_1 < x_2$ 时, 有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少.

例如, 函数 $y = x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 内单调增加, 在 $(-\infty, 0]$ 内单调减少. 又如 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的.

函数单调增加、单调减少统称函数是单调的. 从函数图形上看, 单调增加的函数当 x 自左向右变化时, 函数的图形逐渐上升; 单调减少的函数当 x 自左向右变化时, 函数的图形逐渐下降, 如图 1-9 所示.

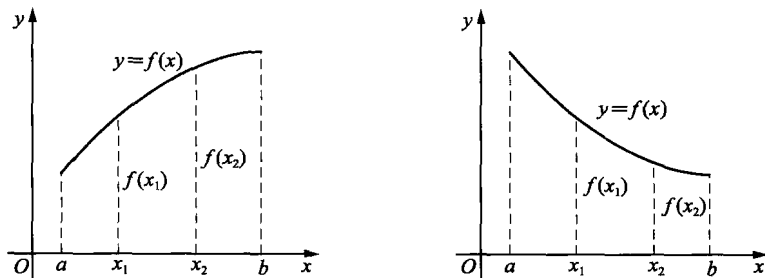


图 1-9

1.3.4 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果存在一个正数 M , 当 $x \in I$ 时, 恒有

$$|f(x)| \leq M$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 为区间 I 上的有界函数, 如图 1-10 所示; 否则称函数 $f(x)$ 为区间 I 上的无界函数.

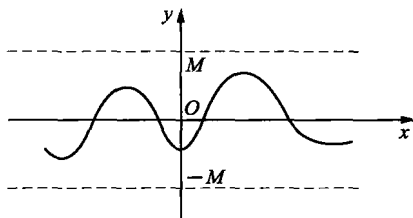


图 1-10

例如, 函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内为有界函数, 因为 $|\sin x| \leq 1$ 对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都成立; 而函数 $y = \frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内为无界函数, 因为不存在正数 M , 使 $\left| \frac{1}{x} \right| \leq M$