普通高校应用学科数学教材系列

微积分（第二版）

WEI JI FEN

◎ 主编 柴惠文
◎ 编者 蒋福坤 刘 静 刘正春 杨晓春

华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

普通高校应用学科数学教材系列

微积分

（第二版）

主编　柴惠文

编者　蒋福坤　刘　静

刘正春　杨晓春

華東理工大學出版社

EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分/柴惠文主编. —2 版. —上海:华东理工大学出版社,2010.5

ISBN 978-7-5628-2685-9

Ⅰ.微... Ⅱ.柴... Ⅲ.微积分-高等学校-教材
Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 038175 号

普通高校应用学科数学教材系列

微积分(第二版)

主　　编 / 柴惠文
编　　者 / 蒋福坤　刘　静　刘正春
责任编辑 / 胡　景
责任校对 / 李　晔
封面设计 / 陆丽君
出版发行 / 华东理工大学出版社
地址:上海市梅陇路 130 号,200237
电话:(021)64250306(营销部)　(021)64252174(编辑室)
传真:(021)64252707
网址:press.ecust.edu.cn
印　　刷 / 常熟华顺印刷有限公司
开　　本 / 787mm×1092mm　1/16
印　　张 / 19.75
字　　数 / 498 千字
版　　次 / 2008 年 3 月第 1 版　2010 年 5 月第 2 版
印　　次 / 2010 年 5 月第 1 次
印　　数 / 6 051—9 050 册
书　　号 / ISBN 978-7-5628-2685-9/O·221
总 定 价 / 39.00 元

第二版前言

本书第一版自出版以来，以易用性及通俗性受到读者的欢迎，也收到同仁的鼓励及其中值得探讨的问题，并对修改提出了宝贵的意见. 借此机会，我们对关心和支持本教材的广大同仁及读者表示衷心地感谢.

修订情况如下：

(1) 订正了原教材中的疏漏以及排版印刷等方面的错误；

(2) 调整了教材中部分内容的表述，使之更通俗易懂；

(3) 调整了部分例题和习题，使得学生学习和教师使用等可以更得心应手；

(4) 对原教材的第 3 章第 5 节以及第 4 章第 3～5 节的内容作了较大的调整和修改.

在修订过程中，我们广泛地收集了同仁及读者对原教材的意见及建议，几位编者也多次在一起讨论，希望通过这次修订使本教材在第一版的基础上更加完善，能让使用此教材的老师和学生满意. 欢迎大家继续提出批评和指正.

编　者

2010 年 1 月

第一版前言

本书是参照教育部制订的高等数学课程教学基本要求，依据经济、管理类各专业对高等数学课程的教学要求而编写的．在编写过程中，按照循序渐进、深入浅出的原则，突出微积分的基本思想和基本方法，强化基本方法的训练．据此，我们对教材的体系结构进行了必要的调整，对基本概念的叙述，力求从身边的实际问题出发，自然地引入；适当淡化运算上的一些技巧要求，适当降低了一元函数的极限理论的要求，从简处理了一些公式的推导和一些定理的证明．教材的编写理念是：在不失科学性的前提下不过分强调某些严密论证及研究过程，而是突出数学思想的介绍，突出数学方法训练及应用，让学生更多地体会微积分的思想方法，增强他们的应用意识和应用能力．让学生通过对本书的学习，能较好地了解各部分内容的内在联系与区别，在总体上较好地把握微积分的思想和方法．

为加强基本能力的培养，本书的例题、习题设置较多，习题按节配置，遵照循序渐进的原则，既注意基本概念、基本理论和方法，又注意加强经济学和其他方面应用性习题的配置．每章后配有总复习题，以供复习、总结、提高之用．文中“*”部分为选学内容，可作为所学知识的扩展．

本书共分 10 章，第 1～2 章由蒋福坤编写；第 3～4 章由刘静编写；第 5～6 章由杨晓春编写；第 7～8 章由刘正春编写；第 9～10 章由柴惠文编写，全书由柴惠文统稿．

严从荃教授认真审阅了全书，并提出了非常宝贵的意见．在本书的编写过程中，得到许多同行的有价值的建议，在此一并致谢．

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，恳请广大读者批评指正，以便本书在教学中不断完善．

编　者

2007 年 10 月

目　录

1 函　数

函数是对现实世界中各种变量之间的相互依存关系的一种抽象，它是微积分学研究的基本对象. 中学时，我们对函数的概念和性质已经有了初步的了解. 在本章中，我们将进一步阐明函数的一般定义，介绍函数的简单性态以及反函数、复合函数、基本初等函数和初等函数等概念，这些都是学习这门课程的基础.

1.1 集合

1.1.1 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念. 例如某校一年级的全体学生构成一个集合，某个书柜的全部藏书构成一个集合，全体实数构成一个集合等.

一般地，我们把具有某种特定性质的对象组成的总体叫做**集合**. 把组成某一集合的各个对象叫做这个集合的**元素**.

习惯上，用大写拉丁字母 $A,B,C,X,Y,\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c,x,y,\cdots$ 表示集合的元素. 对于给定的集合来说，它的元素是确定的. 如果 a 是集合 A 中的元素，则用 $a\in A$ 来表示；如果 a 不是集合 A 中的元素，则用 $a\notin A$ 来表示.

含有有限个元素的集合称为**有限集**；含有无限多个元素的集合称为**无限集**；不含任何元素的集合称为**空集**，记为$\varnothing$.

表示集合的方法主要有两种，一种是列举法，就是把集合的所有元素一一列举出来，写在花括号内. 例如，方程 $x^2-4=0$ 的解构成的集合可表示为 $A=\{-2,2\}$. 另一种是描述法，就是指出集合的元素所具有的性质. 一般地，将具有某种性质的对象 x 所构成的集合表示为

$$A=\{x\mid x\text{ 具有某种性质}\}.$$

例如，方程 $x^2-4=0$ 的解集也可以表示为 $A=\{x\mid x^2-4=0\}$.

元素为数的集合称为数集，通常用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，$\mathbf{Z}$ 表示整数集，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集，$\mathbf{R}$ 表示实数集. 有时在表示数集的字母右上角添“$+$”、“$-$”等上标，来表示该数集的几个特定子集. 以实数为例，$\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数集；$\mathbf{R}^-$ 表示全体负实数集，其他数集的情况类似，不再赘述.

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，或者称 A 包含于 B 或 B 包含 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

若集合 A 与 B 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，就称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

1.1.2 集合的运算

集合有三种基本运算，即并、交、差.

设有集合 A 与 B，它们的并集记作 $A\cup B$，定义为

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

集合 A 与 B 的交集记作 $A\cap B$,定义为

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

集合 A 与 B 的差集记作 $A\backslash B$,定义为

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A \text{ 但 } x\notin B\}.$$

有时,我们把研究某一问题时所考虑的对象的全体称为**全集**,并用 $\boldsymbol{I}$ 表示,把差集 $I\backslash A$ 特别称为 A 的**余集**或**补集**,记作 A^c. 例如,在实数集 $\mathbf{R}$ 中,集合 $A=\{x\,\big|\,|x|<1\}$ 的余集为 $A^c=\{x\mid x\leqslant -1 \text{ 或 } x\geqslant 1\}$.

集合的并、交、余运算满足如下运算律:

交换律 $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$.

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

对偶律 $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$, $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

以上这些运算律都容易根据集合相等的定义验证.

在两个集合之间还可以定义**直积**或**笛卡儿(Descartes)乘积**. 设 A,B 是任意的两个集合,则 A 与 B 的直积记作 $A\times B$,定义为如下的由有序对 (a, b) 组成的集合:

$$A\times B=\{(a, b)\mid a\in A,\ b\in B\}.$$

例如,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x, y)\mid x\in\mathbf{R},\ y\in\mathbf{R}\}$,即为 xOy 平面上全体点的集合,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

1.1.3 区间和邻域

区间和邻域是常用的一类实数集.

设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$,数集

$$\{x\mid a<x<b\}$$

称为**开区间**,记作 (a, b),即

$$(a, b)=\{x\mid a<x<b\},$$

a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点. 数集

$$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为**闭区间**,记作 $[a, b]$,即

$$[a, b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\},$$

a 和 b 称为闭区间 $[a, b]$ 的端点. 类似地有

$$(a, b]=\{x\mid a<x\leqslant b\},\ [a, b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$

$(a, b]$, $[a, b)$ 都称为**半开区间**.

以上这些区间都称为**有限区间**,$b-a$ 的值称为这些区间的长度. 从数轴上看,这些有限区间是长度为有限值的线段. 闭区间 $[a, b]$ 和开区间 (a, b) 在数轴上表示方法分别如图 1-1(a)和(b)所示. 此外还有无限区间,引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大),则可用类似的记号表示无限区间. 例如

$$[a, +\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}, \ (-\infty, b)=\{x \mid x<b\},$$

这两个无限区间在数轴上的表示如图 1-1(c)和(d)所示.

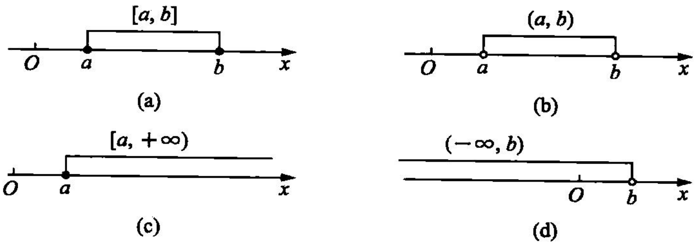

图 1-1

实数集$\{x \mid |x-a|<\delta, \delta>0\}$称为**点 a 的 δ 邻域**,记为$U(a, \delta)$,点 a 叫做邻域的中心,δ 叫做邻域的半径,它在数轴上表示以 a 为中心,长度为 2δ 的对称开区间,如图 1-2 所示.

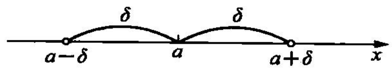

图 1-2

实数集$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$称为点 a 的去心 δ 邻域,记作$\mathring{U}(a, \delta)$. 为了方便,有时把开区间$(a-\delta, a)$称为点 a 的左 δ 邻域,开区间$(a, a+\delta)$称为点 a 的右 δ 邻域. 当不需要强调邻域的半径时,可用 $U(a)$和$\mathring{U}(a)$分别表示点 a 的某个邻域和某个去心邻域.

习题 1.1

1. 如果 $A=\{0,1,2\}$, $B=\{1,2\}$,下列各种写法哪些是对的? 哪些是不对的?

   $1\in A$; $0\notin B$; $\{1\}\in A$; $1\subset A$; $\{1\}\subset A$; $0\subset A$; $\{0\}\subset A$; $\{0\}\subset B$; $A=B$; $A\supset B$; $\varnothing\subset A$; $A\subset A$.

2. 设 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 3, 5\}$, $C=\{2, 4, 6\}$,求:

   (1) $A\cup B$;　(2) $A\cap B$;　(3) $A\cup B\cup C$;

   (4) $A\cap B\cap C$;　(5) $A\backslash B$.

3. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合:

   (1) $|x|\leqslant 3$;　(2) $|x-2|\leqslant 1$;　(3) $|x-a|<\varepsilon$(a 为常数,$\varepsilon>0$);

   (4) $|x|\geqslant 5$;　(5) $|x+1|>2$.

4. 用区间表示下列点集,并在数轴上表示出来:

   (1) $A=\{x \mid |x+2|<2\}$;　(2) $B=\{x \mid 1<|x-2|<3\}$.

1.2 函数

1.2.1 函数的概念

函数是变量之间满足一定条件的一种对应关系. 在中学数学中也学习过函数,现在我们把函数的概念叙述如下.

定义 1　设有两个变量 x 与 y, D 为一个非空实数集. 如果存在一个确定的法则(或称对应法则)f,使得对于每一个 $x\in D$,都有唯一的一个实数 y 与之对应,则称这个对应法则 f 为定义在实数集 D 上的一个**一元函数**,简称**函数**,记为 $y=f(x)$, D 称为 $f(x)$的**定义域**. 函

数 $f(x)$ 的定义域 D 通常记为 $D(f)$.

对于 $x_0\in D(f)$，由法则 f 所对应的实数值 y 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，通常记为 $f(x_0)$，有时也记为 $y|_{x=x_0}$，此时也称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义. 全体函数值组成的集合称为函数 $f(x)$ 的**值域**，通常记为 $R(f)$，即

$$R(f)=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D(f)\}.$$

从函数的定义来看，当定义域与对应法则确定后，函数就完全确定了. 可见定义域与对应法则是确定函数的两个要素，因此，对于函数 $f(x)$、$g(x)$，如果它们有相同的定义域和对应法则，它们就是同一个函数.

表示函数的主要方法有三种：表格法、图形法、解析法(公式法). 其中，图形法表示函数是基于函数图形的概念，即坐标平面上的点集

$$\{(x,\ y)\,|\,y=f(x),\ x\in D(f)\}$$

称为函数 $y=f(x)$，$x\in D(f)$ 的图形如图 1-3 所示.

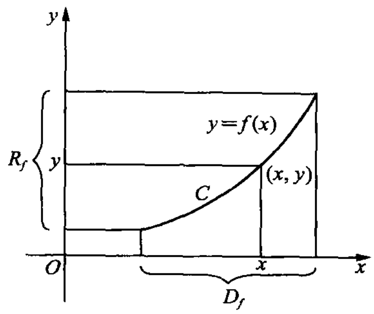

图 1-3

对于由解析式表示的函数，其定义域一般是指使得函数表达式有意义的自变量取值的全体，这种定义域也称为函数的**自然定义域**.

例 1　求函数 $y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域.

解　当 $3x-2>0$ 且 $3x-2\neq1$，即 $x>\dfrac{2}{3}$ 且 $x\neq1$ 时，函数 $\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$ 才有意义，因此，$y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域为

$$D(f)=\left(\frac{2}{3},\ 1\right)\cup(1,\ +\infty).$$

例 2　求函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域.

解　当 $\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant1$ 且 $x^2<25$，即 $-4\leqslant x\leqslant6$ 且 $-5<x<5$ 时，函数 $\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 才有意义，因此函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域为

$$D(f)=[-4,\ 5).$$

在用解析法表示函数时，有一种特别的情形：函数在定义域的不同部分用不同的解析式表示，这种函数称为**分段函数**.

例如，函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

是定义域为 $D(f)=(-\infty,\ +\infty)$，值域为 $R(f)=[0,\ +\infty)$ 的一个函数，它的图形如图 1-4 所示. 当自变量 x 取 $(-\infty,\ 0)$ 内的数值时，函数值由 $y=-x$ 确定；而当自变量 x 取 $[0,\ +\infty)$ 内的数值时，函数值由 $y=x$ 确定，所以是一个分段函数.

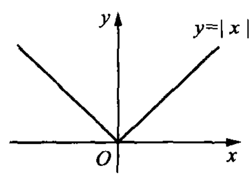

图 1-4

函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

也是分段函数，它的定义域为 $D(f)=(-\infty,\ +\infty)$，值域为 $R(f)=\{-1,\ 0,\ 1\}$，图形如图 1－5 所示. 此函数也称为符号函数.

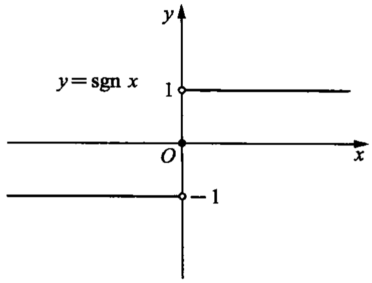

图 1－5

1.2.2 反函数

定义 2 设函数 $y=f(x)$的定义域是 $D(f)$，值域是 $R(f)$，如果对每一个 $y\in R(f)$，都有唯一确定的 $x\in D(f)$与之对应，且满足 $y=f(x)$，则 x 是定义在 $R(f)$上以 y 为自变量的函数，记此函数为

$$x=f^{-1}(y),\ y\in R(f),$$

并称其为函数 $y=f(x)$的**反函数**.

显见 $x=f^{-1}(y)$与 $y=f(x)$互为反函数，且 $x=f^{-1}(y)$的定义域和值域分别是 $y=f(x)$ 的值域和定义域.

注意到在 $x=f^{-1}(y)$中，y 是自变量，x 是因变量. 但是习惯上，常用 x 作为自变量，y 作为因变量. 因此，$y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$常记为

$$y=f^{-1}(x),\ x\in R(f).$$

在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y=f(x)$的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称，如图 1－6 所示.

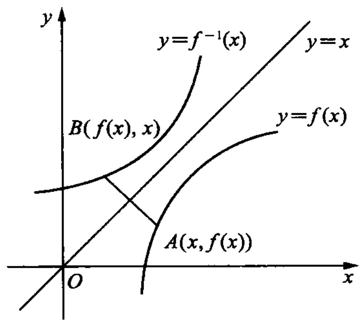

图 1－6

什么样的函数才有反函数呢？由定义可知，函数 $y=f(x)$ 具有反函数的充分必要条件是对应法则 f 使得定义域中的点与值域中的点是一个对一个的（简称一一对应）. 因为单调函数具有这种性质，所以单调函数必有反函数.

对于单调函数，求其反函数的步骤是先从 $y=f(x)$中解出 $x=f^{-1}(y)$，然后将 x 与 y 互换，便得到反函数 $y=f^{-1}(x)$.

习题 1.2

1. 下列各题中，函数 $f(x)$和 $g(x)$是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\ln x^2$，$g(x)=2\ln x$；　(2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$g(x)=x-1$；

(3) $f(x)=x$，$g(x)=\sin(\arcsin x)$；　(4) $f(x)=x$，$g(x)=e^{\ln x}$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\ln(5-x)$；　(2) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{|x|-x}$；　(3) $y=2^{\frac{1}{x}}+\arcsin(\ln\sqrt{1-x})$；

(4) $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$；　(5) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$；　(6) $y=1-e^{1-x^2}$.

3. 求下列分段函数的定义域,并画出函数的图形:

(1) $y=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}, & |x|<2\\ x^2-1, & 2\leqslant|x|<4\end{cases}$;　　(2) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0\\ x-3, & 0\leqslant x<1\\ -2x+1, & 1\leqslant x<+\infty\end{cases}$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}1-2x, & |x|\leqslant1\\ x^2+1, & |x|>1\end{cases}$,求 $f(0)$, $f(1)$, $f(-1.5)$, $f(1+h)-f(1)$.

5. 求下列函数的反函数:

(1) $y=2x+1$;　(2) $y=\dfrac{x+2}{x-1}$;　(3) $y=x^3+2$;　(4) $y=1+\ln(x+2)$.

1.3 函数的基本性质

1.3.1 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 关于原点对称.如果对于任何 $x\in D(f)$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为**偶函数**;如果对于任何 $x\in D(f)$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为**奇函数**.不是偶函数也不是奇函数的函数,称为**非奇非偶函数**.

由定义知:偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称,如图 1-7(a)和(b)所示.

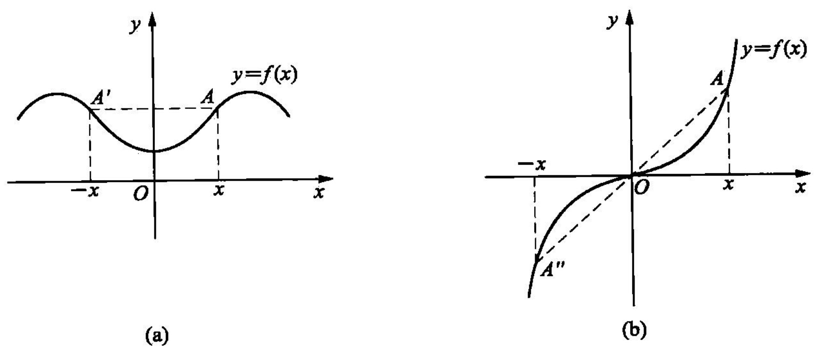

图 1-7

例如,$y=x^2$ 和 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是偶函数;$y=x^3$ 和 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数;而 $y=x+\cos x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

1.3.2 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D(f)$,如果存在一个正数 l,使得对于任意 $x\in D(f)$,都有 $(x\pm l)\in D(f)$,且

$$f(x\pm l)=f(x)$$

恒成立,则称 $y=f(x)$ 为**周期函数**,l 称为 $f(x)$ 的**周期**,周期函数的周期通常是指**最小正周期**.

周期为 l 的函数,在其定义域内长度为 l 的区间上,函数图形具有相同的形状,如图 1-8 所示.

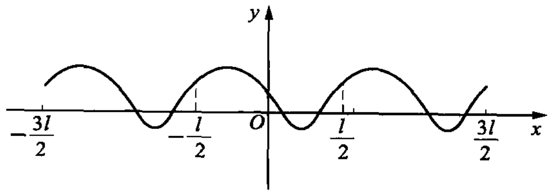

图 1-8

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数.

1.3.3　函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于区间 I 内任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**；当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调减少**.

例如，函数 $y=x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 内单调增加，在 $(-\infty, 0]$ 内单调减少. 又如 $y=x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的.

函数单调增加、单调减少统称**函数是单调的**. 从函数图形上看，单调增加的函数当 x 自左向右变化时，函数的图形逐渐上升；单调减少的函数当 x 自左向右变化时，函数的图形逐渐下降，如图 1-9 所示.

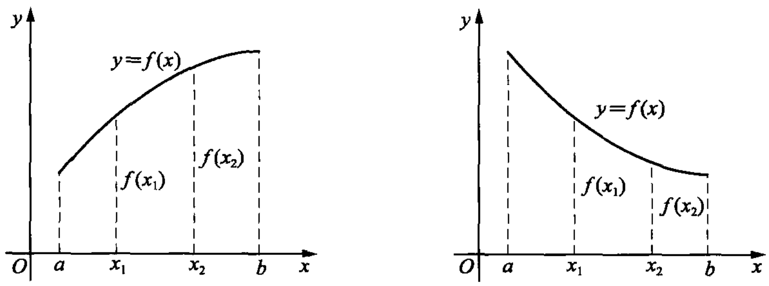

图 1-9

1.3.4　函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在一个正数 M，当 $x\in I$ 时，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 为区间 I 上的**有界函数**，如图 1-10 所示；否则称函数 $f(x)$ 为区间 I 上的**无界函数**.

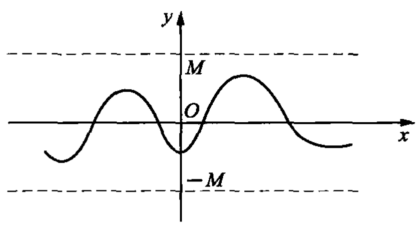

图 1-10

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内为有界函数，因为 $|\sin x|\leqslant 1$ 对任何 $x\in(-\infty, +\infty)$ 都成立；而函数 $y=\frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内为无界函数，因为不存在正数 M，使 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant M$