成人高考数学试题的启示

北京东城区成人教育局研究室编

成人高考数学试题的启示

玉　良　陈太康
鲁　非　李勃梁　编

北京日报出版社

成人高考数学试题的启示

玉　良　陈太康
鲁　非　李勃粟　编

*

北京日报出版社出版、发行
北京市东单西裱褙胡同34号）
新　华　书　店　经　销
北京昌平北七家印刷厂印刷
787× 092毫米　32开本　4.5印张　101千字
1988年12月第1版　　1988年12月第1次印刷
印数15200册
ISBN 7—80602-094-9/G0047

定价：1.55元

前　言

随着改革形势的发展，广大职工积极参加学习科学文化知识，要求进入成人高等学校深造的日益增多。但由于成人在岗，学习会受到各种因素的困扰，学习起来有一定困难。比如工学矛盾时间紧，文化知识不够系统，缺少科学的学习方法等等。因此有些同志虽然很努力，效果仍不理想。

为了帮助广大职工报考成人高等院校前掌握信息，作好考前复习，我们特组织了长期从事成人中等教育的教师，编写了《1986—1988年成人高考试题的启示》丛书。丛书包括政治、语文、数学、历史、地理、物理、化学等共七分册。

丛书结合国家教委制定的《全国各类成人高等学校招生考试复习大纲》探讨三年来成人高考的统一试题，分析命题的范围和方向，同时编写了考前复习指导，希望对准备报考成人高校的同志能有所启示。

这套丛书还可供成人教育系统的各类中等学校的教师参考。各职工中学的在校高中学员阅读也会有所收益。

本书由井源、李勃粱同志主编，玉良、陈太康、鲁非、李勃粱执笔。

本丛书在编写过程中，虽经反复研究讨论，使其完善，但不足之处还会有，恳切欢迎广大读者批评指正。

编　者

目　录

第一部分　试题的启示

统观几年来的考题，符合大纲要求，符合成人实际，题目要求趋于稳定，且有变化和创新，从三年来试题分析，使我们得到如下启示：

（一）全面复习，重视基础

学习的短期目的是为了获得知识，长期目的是为了获得能力，将知识与能力用于实践服务于建设。无论是服务生产还是获得能力，基础知识是十分重要的，只有扎实的基础才能进行广泛的迁移。

因而在复习中，必须全面复习，重视基础，才能为提高准备条件。

例如1988年文科考题第七大题

如图，OAB是一个扇形，它的半径等于2，圆心角$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，过弧$\widehat{AB}$上的动点P作平行于BO的直线交AO于点Q，设$\angle AOP=\theta$。

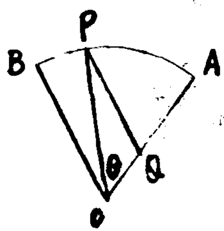

图 1

（1）写出ΔPOQ的面积S和θ的函数关系式；

（2）θ为何值时，ΔPOQ的面积最大？最大值是多少？

分析：

（1）写出ΔPOQ的面积S和θ的函数关系。即由角θ来确定三角形面积S，应选用公式$S_{\Delta}=\frac{1}{2}PO\cdot OQ\cdot\sin\theta$.

（准确的分析出这一步需要三角形面积的基础知识和分析能力）.

实际上$S=\frac{1}{2}PO\cdot OQ\cdot\sin\theta$，就已经说明了$S$和$\theta$的函数关系，但对本例来说，还要将$PO$、$OQ$用关于$\sin\theta$的代数式表示。开始解题时可能看不到这一步，那么应该想到$PO=?$ $OQ=?$

（准确的分析到这一步，虽不困难，但要对函数和函数关系的概念，有较深刻的认识）.

PO是扇形的半径，$PO=2$，现在只需求OQ，在ΔOPQ中，求OQ可用正弦定理.

$$\frac{OQ}{\sin\angle OPQ}=\frac{OP}{\sin\angle OQP}$$

$\because PQ\parallel BO$，$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，$\angle AOP=\theta$

$\therefore\angle OPQ=\angle BOP=\frac{\pi}{3}-\theta$

$\angle OQP=\pi-\angle AOB=\frac{2}{3}\pi$

则$$\frac{OQ}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}=\frac{2}{\sin\frac{2\pi}{3}}$$

$\therefore OQ=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$

（分析这一步需要解三角形的知识和观察能力）.

这时可以得到结论了

$$S=\frac{1}{2}PO\cdot OQ\sin\theta$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$$

这就完成了S与θ的函数关系表达式.

进而再求θ为何值时，$\triangle POQ$的面积最大？其最大值是多少？

（求解第2问，需要进一步的知识基础和能力）.求面积最大值时，要将关于θ的函数式进一步化简.

$$S=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\theta\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta-\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta\right)$$

$$=2\sin\theta\cos\theta-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin^2\theta$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

（从$2\sin\theta\cos\theta-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin^2\theta\Rightarrow$

$\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}$，既需要基础知识，又需要解题能力.特别需要一种逆向思维能力：

$\because 2\sin\theta\cos\theta-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin^2\theta$

$$=\sin 2\theta-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin^2\theta$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\sin 2\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

这对一般学员感到困难）。

当$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$时，$S$取得最大值

即　$2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，$\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore\theta=\frac{\pi}{6}$时，

S最大值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$

现在我们来看解这个题都用到了哪些基础：

（1）三角形面积；

（2）扇形概念；

（3）平面几何知识（平行线与三角形内角和）；

（4）正弦定理；

（5）特殊角三角函数值；

（6）两角差的三角函数公式，及其逆用；

（7）三角函数最大值的概念和求法。

通过这一个题，考查了三角函数知识的主要内容，又考查了综合解题能力，由此可以看到基础知识的重要性，其中

哪一部分知识不熟悉，都不能顺利的解答此题。

所以，复习数学要全面复习，扎扎实实地学好基础知识。

（二）抓住重点，灵活运用

高考试题在安排考核的知识能力结构上年年都会有所创新，年年都会有所变化，但绝不会避开其本科的重点内容。因而在全面复习的基础上抓住重点，提高灵活运用基础知识的能力。

对于数学来说，从上述分析不难看出，代数知识应该是整个数学知识中的重点内容，而在代数内容中，函数又是重点，这就是说，数学各分支，又有各分支的重点，比如立体几何中，直线与平面的位置关系是重点，其中三垂线定理又是重要的解题依据，对重点知识要很好的掌握它，同时要注意灵活运用。

例如文科考题，年年都考核不等式的知识，但考核的形式却有不同。

1986年试题

解不等式　$x^2-x-2\leqslant 0$；

1987年试题

选择题：不等式$x^2-2x-3<0$的解是（　　）。

（A）$x<-1$或$x>3$；

（B）$-3<x<-1$；

（C）$-1<x<3$；

（D）$1<x<3$.

1988年试题

设x满足$x>0$，且$x^2-3x-4\leqslant 0$，求x的取值范围.

虽然形式不同考查的都是不等式的解法和解集的表达形

式。如果不能灵活运用基础知识，1988年这一考题，将因为不理解题意而告吹。

其实是先求不等式$x^2-3x-4\leqslant 0$的解集

$$-1\leqslant x\leqslant 4$$

而后，在$x>0$的限制条件下，找出x的取值范围 $0<x\leqslant 4$.

又如理科考题，同样考查了不等式的知识.

1986年试题

填空题 不等式$x^2-2x-3>0$的解集是_____.

1987年试题

解不等式$\dfrac{2-5x}{4+3x}>0$.

1988年试题

解不等式$(2^x-4)(x^2-2x-3)>0$.

其实考查的都是解不等式的知识，但在1988年试题中，又综合考查了指数函数的性质.提高了对讨论x取值范围的难度。

1988年试题较前两年的题目有所创新，注重考查能力和灵活运用基础知识，请看下述三年来试题的分类.请自己依据上述分析，进行观察思考。

综合题

1.（1986年理科）

设函数$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$

（1）证明$f(x)$在区间$[0,+\infty]$是增函数.

（2）利用（1）的结论，对于任意实数a、b，证明不等式.

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

2.（1986年文科）

顶点在原点，对称轴为x轴的抛物线与直线$y-x=1$相交于A、B两点，且线段AB的中点的横坐标为-5，求此抛物线方程.

3.（1987年理科）

已知$\triangle ABC$的三个顶点都在抛物线$y^2-4y-8x+28=0$上，其中A又是抛物线的顶点，$\triangle ABC$的重心是抛物线的焦点，求$\triangle ABC$的外接圆方程.

4.（1987年文科）

已知在$\triangle ABC$中，三个内角成等差数列，最大角C和最小角A满足等式$\sin A\cdot\sin C=\frac{1}{2}$. 且三角形的面积等于$\frac{\sqrt{3}}{2}$. 求此三角形的角$C$和它所对的边$AB$.

5.（1988年理科）

已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=3$，且对任何自然数n满足$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+4$.

（1）用数学归纳法证明这个数列的通项公式为$a_n=8-10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

（2）求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

6.（1988年理科）

过点$P(0,2)$作直线交椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$于两点A、

B，使得$\triangle AOB$的面积为$\frac{2}{3}$，其中O为坐标原点，求该直线方程。

7.（1988年文科）

OAB是一个扇形，它的半径等于2，圆心角$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，过弧$\overset{\frown}{AB}$上的动点P作平行于BO的直线交AO于Q，设$\angle AOP=\theta$。

（1）写出$\triangle POQ$的面积S和θ的函数关系；

（2）θ为何值时，$\triangle POQ$的面积最大？最大值是多少？

第二部分　复习与练习

代　　数

复习

一、集合

掌握集合的意义、表示法以及几种特殊集合的符号这是最基本的要求，重点是要明确元素对集合的关系、集合与集合间的关系是两个不同的概念，也就是要区别符号“$\in$”和“$\subset$”的不同含义，集合是由元素组成的，所以元素对集合来说就是属于或者不属于的关系，用“$\in$”或“$\notin$”表示，而集合与集合之间有相等、包含、相交和相离几种关系．集合间的包含关系就是子集的概念，A是B的子集表示为$A\subset B$，这里要注意任意集合是它本身的子集，（非真子集）空集是任何非空集合的真子集．掌握了空集、子集、真子集、交集、并集、补集的概念，最后要落实到会求交集、并集、补集，会求一个集合的子集和真子集．

应该记住的几个结论：

①若$A\subseteq B$，则$A\cap B=A$，$A\cup B=B$，

②对任意集合A，都有$A\cap\phi=\phi$，$A\cup\phi=A$．

③设I为全集，则$A\cup\overline{A}=I$，$A\cap\overline{A}=\phi$．

二、不等式

解不等式不仅训练学员基本运算能力和技巧；而且是求解函数的定义域以及进一步学习微积分非常重要的工具。复习不等式主要是一元一次不等式组和一元二次不等式的解法，以及$|ax+b|>c$和$|ax+b|<c$等类型的绝对值不等式的解法，这必须有不等式的性质做基础，对理科学员还要会证简单的不等式，掌握绝对值不等式的性质。

解不等式关键是：

1. 会求不等式组的解，即会求几个不等式解的公共部分。

2. $a\cdot b>0\left(\dfrac{a}{b}>0\right)\Longleftrightarrow\begin{cases}a>0\\b>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0\\b<0\end{cases}$

$a\cdot b<0\left(\dfrac{a}{b}<0\right)\Longleftrightarrow\begin{cases}a>0\\b<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0\\b>0\end{cases}$

（a、b表示数或代数式）

3. 一元二次不等式$ax^2+bx+c>0$，（$ax^2+bx+c<0$）（$a>0$），的解集实质上就是求当x取什么范围的值时，二次函数$y=ax^2+bx+c$（$a>0$）的值大于零（或小于零）。这从图象上很容易看出来，只要能正确地画出图来。

4. 绝对值不等式主要依据绝对值的概念，从代数意义上讲：$|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\-x & x<0\end{cases}$，从几何意义上讲：$|x|$表示数$x$在数轴上所对应的点与原点间的距离，因此$|x|>a$（$a>0$）的解集就是到原点距离大于$a$的点的集合，也就是数轴上大于$a$或小于$-a$的点的集合，所以$|x|>a$的解为$x>a$或$x<-a$；$|x|<a$（$a>0$）的解集就是到原点距离小于$a$的点的集合，也就是数轴上小于$a$并且大于$-a$的点的集合，所以$|x|$

$<a$的解为$-a<x<a$见图（1-1）

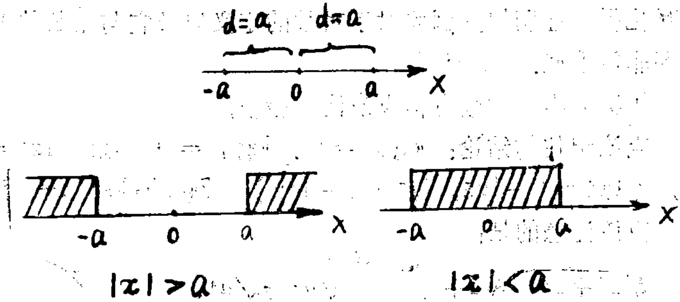

图 1-1

证明不等式主要采用比较法，分析法，基本不等式法，需要记住的公式有：$a^2+b^2\geqslant 2ab$，（$a, b\in R$）$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$（$a\cdot b>0$），$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$），$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$。

三、指数和对数

指数和对数这部分以计算为主，要达到计算准确，首先抓住零指数、负整数指数、分数指数和对数的概念及其实数指数的运算法则和对数的运算法则这是基础，需要明确的是$a^b=N$和$\log_a N=b$实际上互为逆运算，第一个式子里N为未知，第二个式子里b为未知，因此指数式与对数式可以互化，对数的运算法则都是通过转化为指数式然后由指数的运算法则而推导出来的；对数恒等式$a^{\log_a N}=N$就反映了互为逆运算则两种运算的作用互相抵消的这种特点，就好象开方与乘方互为逆运算，那么一个数先开方再乘方还等于这个数本身（$\sqrt{a}$）$^2=a$；对数的换底公式$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$（$a$、

b、c都大于零，$a\neq 1$　$c\neq 1$）也是通过对数式与指数式的互化得以证明的。因此对于对数的定义以及它与指数的关系要非常明确。

指数方程和对数方程应该注意验根。

应该记住的结论：$\log_a a=1$，$\log_a 1=0$　$\lg 2+\lg 5=1$，（$\lg 2=1-\lg 5$，$\lg 5=1-\lg 2$），$\log_a b\cdot\log_b a=1$

应该注意的是：

$\sqrt[4]{a^4+b^4}\neq a+b$，　　$\sqrt[2]{a^8}\neq\sqrt{a^4}$，

$\sqrt{(m-n)^2}$一般情况下不等于$m-n$，

$\sqrt[6]{(-4)^2}\neq\sqrt[3]{-4}$，

$\log_a(M+N)\neq\log_a M+\log_a N$

$\dfrac{\log_a M}{\log_a N}\neq\log_a M-\log_a N$

这部分的应用题主要和等比数列综合在一起，是个难点。

四、函数

函数及其图象在高中代数中占有重要地位，是将来进一步学习微积分必不可少的基础知识。一提到函数，就应该自然想到函数的三要素，即函数的定义域、值域及其对应法则。在求函数的定义域时，一方面对函数解析表达式里自变量x所处位置及其取值范围有非常清楚的认识，另一方面需要具有解不等式和不等式组的知识和能力；函数的对应关系有两种，一种是多一对应如$y=x^2$，另一种是一一对应如$y=x^3$，如果是一一对应这个函数就存在反函数，而原函数的值域可以通过求反函数定义域而得到。另外，我们可以通过几何图形直观地看出函数的变化规律，讨论它的增减性、奇