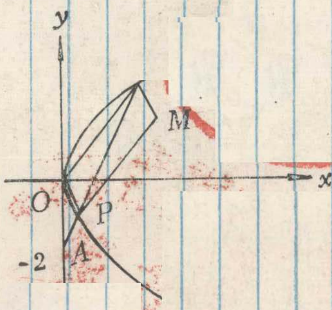
高中数学专题教学资料

主　　编：翟连林



科 学 普 及 出 版 社

高中数学专题教学资料

瞿连林　主　编

科　学　普　及　出　版　社

内 容 提 要

本书包括25个专题，覆盖了高中数学的全部内容，沟通了各部分内容之间的联系，灵活地运用了各种数学思想方法，是高三教师指导高中数学总复习的实用资料。青年教师可直接用作参考教案，对老教师也很有参考价值。

高中数学专题教学资料

翟连林　主　编

责任编辑：张亚光

·

科学普及出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

河北昌黎一中印刷厂印刷

·

开本：787×1092毫米　1/32　印张：9.75　字数：219千字

1990年12月第1版　1990年12月第1次印刷

印数：1—7000册　定价：3.80元

ISBN 7-110-01891-1/G·452

代　序

近年来，大家都注意到高考复习工作的深入研究，特别是在高考复习的指导思想与教学模式的探讨方面做了很多有益的工作并取得了较大的突破，在全国范围内也出现了一批异于以往的较为成熟的实用性较强的复习材料，对推动复习工作的健康进行，提高复习效果起了很大的作用。与此同时，我们又在思考着这样一个问题，即我们对复习指导思想和教学模式的研究不能单纯或偏重考虑第一轮复习的需要，也应充分考虑第二轮复习甚至第三轮复习的需要；（第三轮一般指考前强化训练阶段）．与第一轮复习相比较，它们是基于一轮、异于一轮、高于一轮的．但是令人遗憾的是，这一点至今未能得到充分的关注，未能形成较为成熟而定型的做法。因此我觉得，现在有必要提出这个问题来，提请广大的有心人，有志者在进一步深入研究复习工作的总体规划及第一轮的教学模式、教学材料的同时，加强对第二轮复习工作的研究，研究第二轮复习的指导思想、研究适合第二轮复习之所需的教学模式、研究配合第二轮复习所用的教学资料．

本文谨根据笔者在近年来组织高三复习时所作的一点探索的心得谈谈关于第二轮复习的一些做法和想法．

我始终认为，设置第二轮复习的目的在于在第一轮复习中已集中对高中段所学知识分专题进行系统复习的基础上，进一步进行与横向联系、往纵深开拓的工作，以便达到提高学生综合解题与灵活解题能力的目的．它既有别于第一轮复习中重点解决遗忘的系统复习，也有别于第三轮复习中针对性较强、难度较大的强化训练．根据青年学生的心理特征，有

的必要慎重选择第二轮复习的教学模式，如果不加区别地混同于第一轮的教学模式，仅在选题方面根据教师的主观意念控制在不同尺度上的话，极易造成学生懈怠的心态，而难以取得最佳的复习效果．为此我们做了一种新的尝试来组织第二轮复习，简单说来，就是按照“串线～联片～盖点”三部曲来进行．

首先，我们不妨从重要的解题思想、有代表性的命题类型、主要的数学方法……中抽出几条线索来，围绕着这些线索将我们欲在第二轮中安排复习的内容和题目进行新的编排组合，穿成不同的串，在每一串中，围绕的中心是一个，但被组织进去的内容和题目却是属于各个门类、各个层次的，既照顾了深浅程度的有机搭配，又保证了一定的综合性，通过这种有意识的组合，十分有利于改变学生长期以来养成的联想知识面狭窄、解题思路单一的不良习惯，帮助他们从单科复习的简单轨道上跳出来，培养他们逐步做到自觉综合、全面地审查题意，灵活选择解题角度和方法．而且由于这样的组织安排完全不同于第一轮复习中所采用的按章节分专题复习，学生有新奇感，他们感觉到这又是一个没有掌握的未知世界，在这种状况下，稍加适当引导就可激起他们的好胜心和求知欲，推动他们去冲刺、去拼搏，让他们的主观能动性充分发挥出来，这种局面的形成正是我们所期望的，是第二轮复习任务得以顺利完成的重要保证．

至于具体可以抽出那些线来，是可以不拘一格、贤者见贤、智者见智的，根据我们的做法，略举几例如下：如归纳、递推与证明；构造、变换与转移；补集法解题与正难则反原则的巧用；最值、极值与极限；不等关系的求解证明与应用；方程、不等式问题的求解与函数知识的主体作用；求

轨迹方法纵横谈；数形结合解证命题面面观；“分”在解题中的应用种种；等等．限于篇幅，这里就不对所举的每条线索详加阐述分析了，仅举其中一例来简单说明一下我们串线的原则和具体做法．

就以“分”在解题中的应用种种为例吧．

为什么想起抽出这样一条线呢？，因为我们在第一轮复习中发现学生们对于凡是涉及到需要分区间讨论、分情况求解、分类探索、分层次推求、…这样的命题，求解时把握不大、作业中错误较多，这就使我们萌生了想在这方面集中加强训练的意念，并觉得把所有这些与“分”字有关的问题相对集中起来，不是一个很有意义的专题吗？为此，我们在“分”字的应用上作了一点归纳、整理工作，在这个线串上，我们组织了分步、分类、分组、分段（区间）、分层（次）、分裂（数式）、分割（形体）、分解（步骤与方法）、……等块内容，尽量从代数、几何、三角等各个门类的不同章节中选题，使这个线串成为能够覆盖众多知识点，运用到尽可能多的思想方法和解题手段的综合体，使学生在集中了解和掌握求解有关“分”的命题的特殊规律的同时，再一次复习、练习了第一轮中已初步复习过的部分重要内容，而且由于是用一条新线索把它们串起来的，学生不易产生思维惰性（事实上，有很多重要知识是需要经过多次复盖才能使学生牢固掌握的，但如果只是单纯地重复复盖或仅在所配练习题上稍加改变，是难以激发学生学习积极性的，这里采用串线的方法来处理，就能较好地解决这个矛盾）．

其他的条线也基本采用上述的处理方法．当然，为了联片的需要，我们抽线的着眼点和动机是各不相同的．总体上说来，整个第二轮复习中所穿的线串联起来应该形成一个完整

“片”，它要将我们主观上希望在这一轮复习中复盖到的所有知识、方法和技能技巧都组织进去，为此，在集中抽取了我们认为必须强调的重点线串后，最后还须设法将一些没有穿进那种串里去的而又有必要讲或练的一些内容和命题，根据这个联片的特殊需要再设法设计一些线索把它们串起来，而这样的串只能在搞完了前面的重点线串后，再根据前面的具体选题情况加以组织，因此也就不求统一了.

至于盖点是在做好前两项工作后自然而然地完成的，它体现了第二轮复习的最终目的，进一步对已复习过的大部分重要内容和重要方法从新的角度、以新的要求重行复盖，使学生对这部分知识的认识更加深入，考虑更加全面，求解更加灵活，从而在对知识的掌握和记忆上得到巩固，在分析问题、解决问题的能力上得到较大的提高.

按照上述三部曲来组织安排第二轮复习的好处是十分明显的，真正实行起来也有一定的难处，其中最大的困难是在这方面尚未有成型的教材出现，可供参考的资料也不多，很多准备工作要求任课教师从空白处做起，备课量很大，加上串线选题时要考虑的因素很多（如既要考虑充分体现“线串”特点的代表性，又要照顾到自成综合体的需要，还要兼顾联片完整性的要求等），要求较高，要搞成一套系统而有特色的、完整而保证质量的成熟的教案教材，并非易事，这比起简单地搞一些分单元的专题讨论或一些综合卷练练讲讲来，确实要费事得多，但如果真正从激发学生的学习兴趣、调动学生学习积极性、提高第二轮复习的效益着眼，那么这点功夫还是应该下的，我们不妨长远打算一下，豁上二、三年时间，第一年使之初具规模并加以试用；第二年加以调整补充使之基本定形；第三年进一步精选例题润色加工，使之

成为一份成熟的切实可行的复习资料．如果能够组织上几校的志同道合者，共同就此问题加以探索，分头试验，集众人之力来完成此项工程，则更可缩短时间、增强适应性和提高质量．

以上所谈是我个人的一点粗浅的看法，不知广大同行以为然否？我希望这个空白能早日得到填补，把高考复习工作再推上一个新的台阶．

吴乃曦

1990．10．

目　　录

代　序

第1讲　集合综合题浅析……………………………刘　桦（1）

第2讲　数式大小关系判断及证明的常用方法

……………………………………李希杲　王学功（14）

第3讲　含有参数的方程和不等式……………朱国安（22）

第4讲　复数知识综合运用纵横谈……………齐锡广（33）

第5讲　作图形和巧用图形…………叶龄逸　谢立华（52）

第6讲　三角变换的方法与技巧………………林增铭（62）

第7讲　三角形中的三角函数式……李登印　李　倩（73）

第8讲　空间图形中角、距离与折叠…………陈鸿侠（85）

第9讲　截面与接切…………………陈鸿侠　孟建业（99）

第10讲　解析几何八个解题技巧

……………………　赵国民　梅国强　朱永奎（114）

第11讲　二次曲线中的定值问题…　丁志扬　邵保勤（124）

第12讲　探求轨迹的方法…………　王学功　戴海林（135）

第13讲　探索·归纳·证明·应用…乃　文　杨国君（147）

第14讲　充要条件的判断、证明和应用……　张文祥（159）

第15讲　初等数学的最值问题………………　马宝奇（170）

第16讲　存在性命题的种类与解证方法

……………………………………吴乃[illegible]　许小安（184）

第17讲　怎样解数学选择题…于　丹　张[illegible]华　赵宝强（195）

第18讲　数学综合题的解题策略…　施[illegible]　李玉兰（206）

第19讲　数学归纳法及其应用

…………………………　杨宏刚　刘清波　张文居（219）

第20讲　浅析反证法的思路与应用…………　张守义（234）
第21讲　“分解”思想在解题中的应用……　吴乃骏（243）
第22讲　构造法解题种种……………………　王传勋（255）
第23讲　运用逆向思维解题的方法荟萃
……………………………………………　项昭义（267）
第24讲　怎样准确、快速解题……　岳明义　陈幼民（282）
第25讲　漫谈高考数学命题的七个特点
……………………　王淑媛　赵国民　李　立（296）

第1讲　集合综合题浅析

刘　桦

集合是数学中最重要的基本概念之一，具有广泛的应用性和渗透性．特别是近年来，集合问题常常作为高考的压轴题，用以测试学生的智力和能力，拉开不同层次的学生的距离．可见，集合问题对学生来说是一大难点．因此，在从课本中学习了集合的基础知识和基本语言后，还应突出集合的外延，深化集合知识，探索集合的综合问题，掌握用集合观点去分析、解决问题的方法．这样，才能增强学生思维的深刻性和灵活性；才能有效地提高高考的复习质量．下面就集合综合题的解题方法作一较为系统的归纳、总结．

一、列举法

一般地讲，集合中的元素都是用描述法给出，此法有时却掩盖了元素的直观面目，给解题带来麻烦．为此，对于某些具有明显特征的有限集合，我们应揭去集合"含蓄"的面纱，将集合中的元素一一列举出来，使之明朗化，进而从中找出解题的方法．

例1　设$A=\{(x,y)\mid x\in Z,|x|<2,\ y\in N,\ x+y<3\}$，$B=\{x\mid |x-1|<2,\ x\in Z\}$，$f$：$(x,\ y)\to x+y$是A到B的对应关系，试判断$f$是不是从A到B的映射？

【解】　将集合A、B用列举法表示，得$A=\{(-1,\ 1),(-1,2),(-1,3),(0,1),(0,2),(1,1)\}$，$B=\{0,1,2\}$．由对应法则$f$：$(x,\ y)\to x+y$知：对A中的任何一个元素，在$f$作用下，都有B中唯一的元素与之对应．由映射的定义

知，f是A到B的映射．

例2　设方程$x^2-ax+b=0$两根为α、β，方程$x^2-bx+c=0$的两根为δ、γ．又α、β、δ、γ互不相等，设$M=\{\alpha,\beta,\delta,\gamma\}$，$S=\{x|x=\mu+v,\ \mu\in M,\ v\in M,\ 且\mu\neq v\}$，$P=\{x|x=\mu v,\mu\in M,v\in M,\mu\neq v\}$，又$S=\{5,7,8,9,10,12\}$，$P=\{6,10,14,15,21,35\}$，求$a$、$b$、$c$的值．

【解】　将集合S、P用列举法表示为：$S=\{\alpha+\beta,\alpha+\delta,\alpha+\gamma,\beta+\delta,\beta+\gamma,\delta+\gamma\}$，$P=\{\alpha\beta,\alpha\delta,\alpha\gamma,\beta\delta,\beta\gamma,\delta\gamma\}$，其中$\alpha+\beta=a$，$\alpha\beta=b$，$\delta+\gamma=b$，$\delta\gamma=c$．

显见$3(\alpha+\beta+\delta+\gamma)=3(a+b)=5+7+8+9+10+12=51$，$\therefore a+b=17\cdots$①，又$\because(\alpha\beta\delta\gamma)^3=(bc)^3=6\times10\times14\times15\times21\times35=210^3$，$\therefore bc=210\cdots$②，而$b$是S、P的公共元素，$\therefore b=10$，代入①、②即得$a=7$，$c=21$．

二、转化法

对于一些带有复杂的集合交、并、补、相等、包含等关系的数学问题，可根据集合的概念，将复杂的集合关系转化为简单的集合关系或通俗的集合语言．这样，就能很好地把握住解题的方向，并准确地找到问题的答案．常用的一些转化关系有：(1)$A=B\Longleftrightarrow A\subseteq B$且$B\subseteq A$；(2)$A\cap B=\phi$表示A、B没有公共元素；(3)$A\cap B\neq\phi$或$A\cap B\supset\phi$表示A、B有公共元素；(4)$A\cap B=A\Longleftrightarrow A\subseteq B$，$A\cup B=A\Longleftrightarrow B\subseteq A$；(5)$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，……．

例3　已知$A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$，且$A\cap B\supset\phi$，$A\cap C=\phi$，求实数$a$和集合A．

【解】　易知$B=\{2,3\}$，$C=\{-4,2\}$，$\because A\cap B\supset\phi$，$A\cap C=\phi$，$\therefore$A、B有公共元素，A、C没有公共元素，

$\because 2\notin A$, $3\in A$, $\therefore 9-3a+a^2-19=0$, 即$a^2-3a-10=0$, $a=-2$或$a=5$. 当$a=5$时, $A=\{2,3\}=B$, 这是不可能的, 故$a=5$应舍去. 当$a=-2$时, 此时$A=\{3,-5\}$, 这即为所求.

例4 设$M=\{x|x^2-4>0\}$, $N=\{x|x^2-ax\geqslant x-a\}$, 若$M\cap N=M$, 试确定$a$的取值范围.

【解】 $\because M=\{x|x>2$或$x<-2\}$, $N=\{x|(x-a)(x-1)\geqslant 0\}$, 且$M\cap N=M\Longleftrightarrow M\subseteq N$. 当$a\leqslant 1$时, $N=\{x|x\geqslant 1$或$x\leqslant a\}$, 欲使$M\subseteq N$, 可由数轴(如图1-1)得$-2\leqslant a\leqslant 1$;

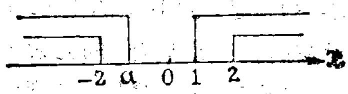


图 1-1

同理当$a\geqslant 1$时, 由$M\subseteq N$可得$1\leqslant a\leqslant 2$. $\therefore a$的取值范围是$-2\leqslant a\leqslant 1$或$1\leqslant a\leqslant 2$, 即$-2\leqslant a\leqslant 2$.

三、韦恩图法

集合的韦恩图示法，具有形象、直观的特点，它不仅能帮助我们深刻理解和记忆集合的概念、运算公式及相互关系，而且还能对一些数学问题进行有效的分类，把具有共同特性的概念合理地归为一个集合，并由问题的条件与结论，决定出全集、子集、交集、并集等等，然后再用集合的知识去探索、分析问题，便可获得问题的求解途径.

例5 已知集合A和集合B各含有12个元素，$A\cap B$含有4个元素. 试求同时满足下列两个条件的集合C的个数:
(1)$C\subset A\cup B$, 且C中含有3个元素; (2)$C\cap A\neq\phi$.

【分析】 "$C\subset A\cup B$"表明C是$A\cup B$的真子集，C中的3个元素都应从$A\cup B$中去取. "$C\cap A\neq\phi$"表明C中至少要含有A的一个元素，即C中的3个元素应从A中取1个或2个或3个.

【解】 由韦恩图图 1－2 可知，$A\cup B$ 共有 $8+8+4=20$ 个元素，又由$C\cap A\neq\phi$可解得集合C的个数共有

$$C_{12}^{1}\cdot C_{8}^{2}+C_{12}^{2}\ C_{8}^{1}+C_{12}^{3}=1084(\text{个})$$

（或 $C_{20}^{3}-C_{8}^{3}=1084(\text{个})$）.

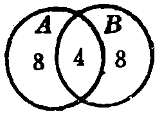


图 1－2

例6 设集合$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{a,b,c,d,e\}$，$C=\{f|f$是A到 B 上的 1－1 映射，且它满足 1 不对应a，5 不对应$e\}$，试求集合C的元素个数.

【解】 设全集$I=\{$A到B上的1—1映射$\}$，$R=\{$I中1对应a的1—1映射$\}$，$Q=\{$I中5对应e的1—1映射$\}$，则$R\cap Q=\{$I中1 对应a且 5 对应e的1—1映射$\}$.

由韦恩图图 1—3 知，$C=I-R\cup Q$，∵I的元素个数是P_5^5，$R\cup Q$的元素个数是$P_4^4+P_4^4-P_3^3$，故所求集合C的元素个数是

$$P_5^5-2P_4^4+P_3^3=78.$$

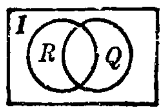


图 1－3

四、图形法

有些集合问题，单纯从数量关系去分析探求，较为繁难，但如能追溯问题的几何背景，将问题转化为与之相关的图形问题，再根据图形的性质和特点进行探索分析，则可发掘出隐含条件，开辟解题捷径.

例7 设a、b为实数，$A=\{(x,y)|y=mx+b,m\in R\}$，$B=\{(x,y)|x=1+a\cos\theta,\ y=\sin\theta,\ \theta\in R\}$，问$a$、$b$满足什么条件时总有$A\cap B\neq\phi$？

【解】 A表示经过点$(0,b)$的直线系$y=mx+b(m\in R)$…

①，B 表示椭圆$\frac{(x-1)^2}{a^2}+y^2=1$…②，$A\cap B\neq\phi$等价于①与②恒有公共点，由图 1-4 可知，点$(0,b)$在椭圆内部或椭圆上，即点$(0,b)$在弦AB上，在$\frac{(x-1)^2}{a^2}+y^2=1$中，令$x=0$，得$y^2=\frac{a^2-1}{a^2}$，当$|a|\geqslant 1$时，$y=\pm\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|}$，故欲

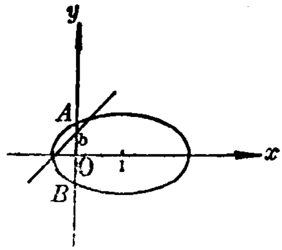


图 1-4

使$A\cap B\neq\phi$，a、b应满足关系式$\begin{cases}|a|\geqslant 1,\\ -\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|}\leqslant b\leqslant\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|}.\end{cases}$

例8 已知复数集合$A=\left\{z\,\middle|\,\left|\frac{z-1}{z}\right|=1,\arg\frac{z-1}{z}=\pi\right\}$，$B=\{z\,|\,|z-z_1|=1,\ z_1\in A\}$，$C=\{z\,|\,z=iz_2+b,\ z_2\in B,\ b\in R\}$，若$B\cap C=\phi$，求实数$b$的取值范围．

【解】 对$z\in A$，则有$\frac{z-1}{z}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$，故有$z=\frac{1}{2}$，于是$A=\left\{\frac{1}{2}\right\}$，$B=\left\{z\,\middle|\,\left|z-\frac{1}{2}\right|=1\right\}$，它表示圆心是$O_1(\frac{1}{2},0)$，半径是$r_1=1$的圆$C_1$（如图1—5）．

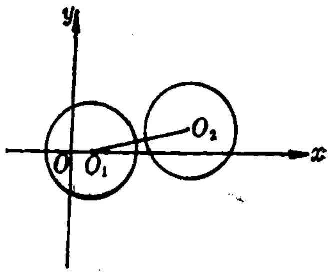


图 1-5

又∵对$z\in C$，则$z=iz_2+b$，且$\left|z_2-\frac{1}{2}\right|=1$…①，由

$z_2=\frac{z-b}{i}$代入①，得$\left|\frac{z-b}{i}-\frac{1}{2}\right|=1$，即$\left|z-b-\frac{1}{2}i\right|=1$，

∴集合C表示圆心是$O_2(b,\ \frac{1}{2})$，半径是$r_2=1$的圆C_2.

∵$B\cap C=\phi$，∴圆C_1与圆C_2没有公共点，∴$|O_1O_2|>r_1+r_2$，

即$\sqrt{\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2}>1+1=2$，化简得$b^2-b-\frac{7}{2}>0$，

解得$b>\frac{1+\sqrt{15}}{2}$或$b<\frac{1-\sqrt{15}}{2}$即为所求.

以上两例可以看出，将一些点集问题转化为曲线位置关系问题的研究，打破了学科之间的严格界限，另辟数形结合的途径，起到“鬼斧神工”之妙用．因此，在探索一些点集问题时，要善于类比、发掘问题所具有的几何模型，数形渗透，双向联想，灵活解题，让数形结合在复习中真正显示出强大的威力.

五、构造法

有些集合问题的表达形式较为抽象，直接探求显得困难．但是，构造一个表达形式通俗明朗且与原命题等价的新命题，将原命题转化为新命题来处理，则往往会给解答问题带来方便，并能使问题迅速获解.

例9 设a、b是两个实数，$A=\{(x,\ y)\,|\,x=n,\ y=na+b,\ n$是整数$\}$，$B=\{(x,\ y)\,|\,x=m, y=3m^2+15, m$是整数$\}$，$C=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 144\}$是平面$xOy$内的点集合，讨论是否存在$a$和$b$使得(1)$A\cap B\neq\phi$，(2)$(a,\ b)\in C$同时成立(1985年全国高考理科试题).

【分析】$A\cap B\neq\phi$意味着存在整数n，使得$na+b=3n^2+15$；$(a,\ b)\in C$意味着$a^2+b^2\leqslant 144$．于是可构造与原命题等价的

命题：讨论关于a、b的混合组$\begin{cases} na+b=3n^2+15 \cdots ① \\ a^2+b^2\leqslant 144(n\in Z) \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$是否有实数解．假设存在实数$a$、$b$满足以上混合组，则可从如下几种联想中导出矛盾，从而否定了a、b的存在性．

【解法1】 由①，得$b=3n^2+15-an$，代入②，得关于a的不等式$(1+n^2)a^2-2n(3n^2+15)a+(3n^2+15)^2-144\leqslant 0$，∵该不等式有解，且$1+n^2>0$，∴ $\Delta=4n^2(3n^2+15)^2-4(1+n^2)[(3n^2+15)^2-144]=-36(n^2-3)^2\geqslant 0$，即$(n^2-3)^2\leqslant 0$，但$(n^2-3)^2\geqslant 0$，∴$n^2=3$，$n=\pm\sqrt{3}$这与$n\in Z$矛盾，故不存在实数$a$、$b$使得(1)、(2)同时成立．

【解法2】 由①得关于n的二次方程$3n^2-an+15-b=0\cdots$(＊)．∵$n\in Z$，∴ $\Delta=a^2-12(15-b)\geqslant 0$，即有$180-12b\leqslant a^2\leqslant 144-b^2\Rightarrow(b-6)^2\leqslant 0$，∴$b=6$，∴$180-72\leqslant a^2\leqslant 144-36$，即$108\leqslant a^2\leqslant 108$，∴$a^2=108$，$a=\pm 6\sqrt{3}$，此时，从(＊)式可解出 $n=\pm\sqrt{3}$，…….

【解法3】 由①、②知，直线 l：$nx+y-(3n^2+15)=0$与圆$x^2+y^2=144$有公共点，∴圆心到直线l的距离

$$\frac{3n^2+15}{\sqrt{n^2+1}}\leqslant 12\Rightarrow(n^2-3)^2\leqslant 0\Rightarrow n^2=3\Rightarrow n=\pm\sqrt{3}，\cdots.$$

【解法4】 由②可设$a=\lambda\cos\theta$，$b=\lambda\sin\theta(|\lambda|\leqslant 12)$，则有$n\lambda\cos\theta+\lambda\sin\theta=3n^2+15$，∴ $(3n^2+15)^2\leqslant(n\lambda)^2+\lambda^2=\lambda^2(n^2+1)\leqslant 144(n^2+1)$(根据三角方程$a\sin x+b\cos x=c$有解的充要条件$c^2\leqslant a^2+b^2$)，化简得$(n^2-3)^2\leqslant 0$，∴ $n^2=3$，$n=\pm\sqrt{3}$，…….

【解法5】 由①、②及柯西不等式，得$(3n^2+15)^2=(an+b)^2=(a\cdot n+b\cdot 1)^2\leqslant(a^2+b^2)(n^2+1^2)\leqslant 144(n^2+1)\Rightarrow(n^2$