В. А. Садовничий
А. С. Подколзин

大学生数学竞赛题汇编

Задачи студенческих олимпийских по математике

大学生数学竞赛题汇编

В.А. Садовничий
А.С. Подколзин

潘斯一 译

宁德师范专科学校数学科资料室

译　序

作为教学参考材料，用以了解国外大学数学教学动态的某些侧面，受数学科资料室委托，我们试译了这本1978年苏联出版的大学生数学竞赛题汇编。

《汇编》收集了莫斯科各个高等院校1975，1976，1977这三年的数学竞赛题：全苏大学生1975，1976，1977三年的竞赛题以及部分国际大学生数学竞赛题等等，共560题。原编者指出，要解答这些题目，不仅要具有教学大纲所要求的牢固的知识，还要有灵活的创造性的方法，应该看到，在每一个，甚至是很简单的式子里都包含着深刻的数学概念。因此，原编者认为，本试题集对于高等院校的学生、研究生、教师、高年级的中学生、中学教师以及一切数学爱好者们都是有益的。

原书分三部分：第一部分是试题，第二部分是解、答或提示，第三部分是附录，试题部分共三章，第一章收集了莫斯科（包括国立、省立和市立的）各高等院校竞赛题，题目是按类型编排，这些题目中凡是奇数题号的在第二部分都给予完整的解答或较详细的提示，但偶数题号的却没有，而是留给读者自己去完成。第二章是苏联全国大学生数学竞赛1975，1976，1977三届的竞赛题，全国竞赛时，是按学校的类型（据这些学校教学大纲）分成三类分别进行，每类中又分为一年级组与高年级（2—6年级）组而试题有别。这一

章的题目在第二部分全部给予解答。第三章原书未注明出处，其解答部分也是仅对单数的题号而言。

第一章中题目的出处与竞赛年度，第二章中题目所属的类，组均在每题题号后注明，第一、第三章题目均是由易到难而编排的，为了节省篇幅，我们略去了原书的附录部分，因为其中的内容是介绍数学分析、代数、数论与组合、几何、概率论几方面的基本概念、定义、定理、性质等，这些是很容易在案头有关的书中找到，没有译出的必要，但对题中涉及到的各种符号，仍按原书附录中的符号表译出附于书末。

在翻译过程中，对被发现的原书错误之处均予以更正，但因翻译是在教学之隙进行，时间很紧，对译文未能详查，更谈不上修饰润色，还有因译者的专业水平低，知识面不广，俄文程度有限，错译之处或遣词用句不妥之处必定不少，恳望大家予以指正批评，以期译文更臻完善。

在校对、排印过程中，我科青年教师辛林、卓坚等同志作了大量工作。特在此表示谢意。

潘斯一（宁德师专）

王松伦（福州八中）

一九七九年十二月二十一日

目　　录

第一章　各高等院校竞赛题

第一章　各高等院校竞赛题

（第一轮）

数学分析

图　象

1（莫斯科轻工业学院，1977年）作出函数

$$y=\lim_{n\to\infty}\sin^{2n}x$$

的图象。

2（莫斯科航空学院，1976年）绘出函数

$$f(x)=e^{\log_{\sqrt{e}}(\sin x+\cos x)}$$

的图象。

3（莫斯科汽车机械学院，1977年）作出函数

$$f(x)=\begin{cases}|x|^{1/|x|} & 当x\neq 0时，\\ 1 & 当x=0时。\end{cases}$$

的图象。

4（莫斯科国民经济学院，1977年）作出函数

$$y=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{x}{1+x^2-e^{\alpha x}}$$

的图象。

5（莫斯科经济统计学院，1 9 7 6年）作出函数

$$y = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$$

的图象。

6（莫斯科大地测量、空中摄影和制图工学院，1977年）作出函数

$$y = \frac{x^2}{|x|+e^{\frac{1}{x}}}$$

的图象。

7（莫斯科机床工具学院，1 9 7 7年）作出函数

$$y = \cos(2\arccos x)$$

的图象。

8（莫斯科铁道运输工学院，1 9 7 7年）作出函数

$$y = \mathrm{tg}(3\,\mathrm{arctg}x)$$

的图象。

9（莫斯科汽车机械学院，1 9 7 5年）作出函数

$$y = \lim_{n\to\infty}(x-1)\,\mathrm{arctg}x^n$$

的图象。

10（莫斯科机床工具学院，1 9 7 7年）证明函数

$$y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

在$x>0$时是上升的并作出它在$x>0$时的图象。

11（莫斯科国民经济学院，1 9 7 6年）作出函数的图象。

$$y = x^x\ (x>0)$$

12（莫斯科民用航空工学院，1976年）作出函数

$$f(x)=\int_{1}^{x}\frac{e^{t}}{t}\,dt$$

的图象。

13（莫斯科电讯学院，1977年）作出方程

$$x^3+y^3-3xy=0$$

的曲线。

多项式

14（莫斯科工学院，1976年）证明多项式

$$p(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

没有重根。

15（莫斯科汽车机械学院，1975年）求满足条件：在$x=1$时取得最大值6，在$x=3$时取得最小值2的最低次幂的多项式。

16（莫斯科水土改良学院，1977年）要三次多项式x^3+px+q当x取三个不同实数值时都等于0，数p，q应满足什么条件？

17（莫斯科国民经济学院，1975年）证明，一切具有正系数且为偶函数的非零多项式是处处凹的并仅有一个极值点。

18（莫斯科国民经济学院，1975年）证明，任一奇次幂$n\geqslant 3$的多项式至少有一个拐点。

19（莫斯科机床工具学院，1976年）证明，任一个整系数的一元多项式$p(x)$都不能满足等式$p(7)=5$及$P(15)=9$。

20（莫斯科公路学院，1976年）已知多项式 $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 是整系数多项式并且 $P(0)$ 和 $P(1)$ 都是奇数，证明 $P(x)$ 没有整数根。

21（国立莫斯科师范学院，1976年）设 $P(x)$ 是整数多项式并且在五个整点都取值为5，证明 $P(x)$ 没有整数根。

22（莫斯科电子技术学院，1975年）整系数多项式称为本原多项式，是指如果它的所有系数是互质的，证明，本原多项式之积仍为本原多项式。

23（国立莫斯科大学数学力学系，1976年）系数在数域P上的多项式 $P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ 称为在数域P上线性可约，是指如果它能够表示为

$$P(z)=(b_0z+b_1)(c_0z^{n-1}+\cdots)\ (b_0\neq 0)$$

其中 $c_i, b_i\in P$. 求在 Z_2 上的n次多项式 $P(z)$ 为 Z_2 上线性可约的概率 q_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} q_n$.

24（莫斯科钢铁和合金学院，1977年）每一个多项式P都对应着一个数 $D(P)$，使得

1）$D(\alpha_1P_1+\alpha_2P_2)=\alpha_1D(P_1)+\alpha_2D(P_2)$;

2）$D(P_1P_2)=D(P_1)P_2(\frac{1}{2})+P_1(\frac{1}{2})D(P_2)$,

其中 α_1、α_2 是任意实数。

a）证明：$D(P)=CP'(\frac{1}{2})$（C是常数）

б）在D的定义中，把多项式P用闭区间 $[0,1]$ 上的任意连续函数f来代替，证明，对所有这样的f，$D(f)=0$

25 设 $P(x)$ 是一个n次多项式，$P(a)\geqslant 0$，$P'(a)\geqslant 0$，…，$P^{(n-1)}(a)\geqslant 0$，$P^{(n)}(a)>0$。证明方程 $P(x)=0$ 的

实根不大于a。

26（莫斯科钢铁和合金学院，1975年）证明方程 $x^n=p(x)$ 有唯一的正根，其中 $p(x)$ 是正系数的 $n-1$ 次多项式

27（莫斯科石油化学和天然气工业学院，1976年）证明，如果实系数多项式 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 所有的根都是实根，那么它的各阶导数 $P'(x)$，$P''(x)$，…，$P^{(n-1)}(x)$ 同样只具有实根。（$a_0\neq 0$）

28 假设多项式 $P(x)$ 只有实根，证明，如果a是 $P'(x)$ 的重根，那么 $P(a)=0$。

29（莫斯科电子机械学院，1975年）已知

$c_0+\frac{c_1}{2}+\cdots+\frac{c_n}{n+1}=0$，证明多项式 $c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$ 至少有一个实根。

30（莫斯科国民经济学院，1975年）证明，对实数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的全体和任意的点 $x=x_0$，存在着n次多项式 $P(x)$，使得 $P^{(s)}(x_0)=a_s$（$s=0,1,2,\cdots,n$）并且用 a_s 表示出这个多项式的系数。

31（国立莫斯科大学数学力学系，1977年）设 $P_1(x)$，…，$P_r(x)$ 分别是 n_1，…，n_r 次多项式。证明，如果 $n_1+\cdots+n_r<\frac{r(r-1)}{2}$，那么，多项式 P_1，…，P_r 线性相关。

32（莫斯科钢铁和合金学院，1977年）设 $P_1(x)$，…，$P_n(x)$ 都是不高于 $n-1$ 次的多项式。证明这些多项式的朗斯基行列式是常数。

33（莫斯科电讯学院，1976年）证明，如果多项式

$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$所有的根都在上半平面，那么，它的导函数的所有的根也全在上半平面。

34（莫斯科无线电技术，电子和自动化技术学院，1976年）设$P(z)$是一个多项式。证明：多项式$P'(z)$的根位于由多项式$P(z)$的根所张成的凸多边形内部。

35（莫斯科物理技术学院，1977年）证明多项式

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(2x-x^2)^k-2x^k}{k}\quad 被x^{n+1}整除。$$

36（莫斯科经济统计学院，1977年）证明，如果当$x\to\infty$时，函数$\varphi(x)\to\infty$而它的导数$\varphi'(x)\to 0$，那么$\varphi(x)$不能表成两个多项式比的形式。

37（国立莫斯科大学数学力学系，1977年）$P(x)=c_nx^n+\cdots+c_0$是一个实系数多项式，$c_p=0$（$1\leqslant p\leqslant n-1$）而当$i\neq p$时$c_i\neq 0$，证明，如果$P(x)$有$n$个不同的实根，那么$c_{p-1}c_{p+1}<0$

38 证明，如果次数不大于n的多项式序列在区间(a,b)上一致收敛，那么，其极限是一个次数不超过n的多项式。

39（国立莫斯科大学数学力学系，1975年）设$f(x)$是任意的复系数多项式。证明，存在常数c，使得对于任意整系数多项式$P(x)$，多项式$f(p(x))$不同的整根的个数不超过$\deg p+c$，其中$\deg p$是多项式$P(x)$的次数。

数列和极限

40（莫斯科高等技术学校，1977年）如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{1975}}{n^x-(n-1)^x}=\frac{1}{1976}$$

求x。

41（莫斯科电讯学院，1977年）已知

$s_1=\sqrt{2}$，$s_{n+1}=\sqrt{2+s_n}$，证明，序列$\{s_n\}$有极限并求出这个极限。

42（莫斯科财金学院，1976年）求极限

1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)$；

2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$

43（莫斯科国民经济学院，1975年）证明数列2，

$2+\frac{1}{2}$，$2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$，…，有极限并求出这个极限。

44（莫斯科国民经济学院，1977年）证明数列

$a_1=0$，$a_n=\frac{a_{n-1}+3}{4}$有极限并求出这个极限。

45（莫斯科航空工学院，1977年）考察线段AB，点列$\{M_n\}$是按下面的方式构成：$M_1=A$，$M_2=B$，其余每一个点M_{n+1}都是点M_{n-1}和M_n所联成的线段的中点。问序列$\{M_n\}$收敛于线段AB中的怎样的一个点。

46（莫斯科国民经济学院,1976年)在双曲线$xy=1$上取横坐标分别为$\frac{n}{n+1}$和$\frac{n+1}{n}$（$n=1,2,\cdots$)的点A_n和B_n，记经过点A_n，B_n与双曲线顶点的园的园心为M_n，求当$n\to\infty$时，$\{M_n\}$的极限。

47（莫斯科公路学院，1976年）求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)。$$

48（莫斯科物理技术学院，1977年）求数列

$$x_n=\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

的极根。

49（人民友谊大学，1976年）极根 $\lim_{n\to\infty}\sin n$存在吗？其中n是自然数。

50（莫斯科轻工业学院，1977年）求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)。$$

51（莫斯科钢铁和合金学院，1976年）计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{1/2}}{n+1}+\frac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}}\right)。$$

52（莫斯科国民经济学院，1976年）函数$f(x)$在区间〔0，1〕上是连续的并且是正的，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=\exp\left(\int_0^1\ln f(x)\,dx\right)。$$

53（莫斯科航空学院，1977年）在a,b是怎样的实数时，序列$x_0=a$，$x_1=1+bx_0,\cdots$，$x_{n+1}=1+bx_n,\cdots$是收敛的。

54（莫斯科省立师范学院，1976年）证明，集合

$$M=\left\{\frac{1}{2}\pm\frac{n}{2n+1}\right\}(n\in N)$$仅以0和1为其极限点。

55（国立莫斯科大学数学力学系，1975年）序列$\{x_n\}$（$n=1,2,\cdots$）是用以下方式给予定义：$x_1=x$是

线段〔0，1〕中的某一个点；在$n \geqslant 2$时，若n为偶数，则$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1}$，若n为奇数，则$x_n = \frac{1 + x_{n-1}}{2}$。问这个序列可能有多少个极限点。

56 点$x = 0$是数列$x_n = \sqrt{n}\sin n$的极限点吗？

57（莫斯科电子机械学院，1975年）计算

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{2^3 - 1}{2^3 + 1}\cdot\frac{3^3 - 1}{3^3 + 1}\cdots\frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}\right)。$$

58 序列$\{x_n\}$是这样的：$x_1 > 0$，$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$，当$n \geqslant 1$时。证明极限$\lim\limits_{n \to \infty} x_n$存在并求出这极限。

59（莫斯科动力学院，1975年）数列由关系式

$$u_1 = b,\ u_{n+1} = u_n^2 + (1 - 2a)u_n + a^2\ (n \geqslant 1)$$

给出，问a，b为怎样的数时，数列$\{u_n\}$收敛？其极限等于什么？

60（莫斯科管理学院，1975年）已知$x_0 = \frac{1}{3}$，

$$x_n = 0.5x_{n-1}^2 - 1 \text{ 求 } \lim_{n \to \infty} x_n.$$

61（莫斯科高等技术学校，1975年）证明序列

$$x_0 > 0,\ x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a}\ (a \geqslant 0)$$极限存在并求出它。

62（莫斯科钢铁和合金学院，1977年）设

$$x_{K+1} = \frac{1}{2}\left(2x_K + \frac{a}{x_K^2}\right),\ (a > 0,\ x_0 > 0)$$

a）证明序列$\{x_K\}$极限存在并求出它；

б）用z_K来记x_K与数列极限的差并假定$z_1 \neq 0$。证明，对所有的$K \geqslant 1$，不等式

$$z_K > 0, \quad z_{K+1} < \frac{2}{3} z_K, \quad z_{K+1} < \frac{1}{\sqrt[3]{a}} z_K$$

都成立。

63（莫斯科动力学院，1977年）设 $a_1 = 1$，$a_K = K(a_{K-1} + 1)$，求

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{K=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_K}\right)。$$

64 求无穷乘积

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{17}{16} \cdots \cdot \frac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}} \cdots$$

65（莫斯科航空学院，1976年）设$\{x_n\}$是这样的 序列：

$$x_0 = 25, \quad x_n = \operatorname{arc\,tg} x_{n-1}$$

证明这序列有极限并求出这极限。

66（莫斯科航空工学 院，1976年）设x_1，x_2，…是按递增的顺序排列着的方程 $\operatorname{tg} x = x$的所有正根。问 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1})$等于什么？

67（莫斯科钢铁和合金学院，1975年）求序列

$y_1 = x$，$y_{n+1} = a\sin y_n (n \geqslant 1)$的极限。其中$|a| \leqslant \frac{\pi}{2}$，

x是实数。

68（莫斯科物理技术学院，1975年）证明 方 程$x = \cos x$有唯一的根x_0，并 证 明$x_1 = 20$，$x_n = \cos x_{n-1}$（$n \geqslant 2$）这个数列$\{x_n\}$收敛于x_0.

69 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin(2\pi e n!)$。

70（莫斯科公路学院，1976年）求

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}(\pi m!x)\right)。$$

71（莫斯科物理技术学院，1977年）序列$\{x_n\}$定义为$x_n=\sin x_{n-1}$，$n=2,3,\cdots$，而x_1为区间$(0,\pi)$中的任意之一数。证明：当$n\to\infty$时，$x_n\sim\sqrt{\frac{3}{n}}$.

72（莫斯科公路学院，1976年）设$a>b>0$，两序列定义为

$$a_1=\frac{a+b}{2},b_1=\sqrt{ab},a_2=\frac{a_1+b_1}{2},b_2=\sqrt{a_1b_1},\cdots,$$
$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\ b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},\ \cdots$$

证明，这两个序列的极限存在且相等。

73（莫斯科物理技术学院，1976）设

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\quad\lim_{n\to\infty}y_n=b.$$

证明数列 $z_n=\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}$收敛于$ab$.

74 在三维空间中给出五个点列$\{A_K\}$，$\{B_K\}$，$\{C_K\}$，$\{D_K\}$，$\{E_K\}$，点A_{K+1}，B_{K+1}，C_{K+1}，D_{K+1}，E_{K+1}分别是线段A_KB_K，B_KC_K，C_KD_K，D_KE_K，E_KA_K的中点，证明这五个点列都收敛于某一个点O.

75（莫斯科电子机械学院，1976年）在三角形的三边上写下三个数$a_1^{(1)}$，$a_2^{(1)}$，$a_3^{(1)}$，然后擦去这些数而用其中两数的算术平均数来代替第三数。（比如写出