高等学校教学用书

微分方程教程

B. B. 史捷班諾夫著
卜元震 譯
許宝騄 胡祖熾 朱德威 孙小礼 校訂

人民教育出版社

高等学校教学用書

微分方程教程

B. B. 史捷班諾夫著
卜元震譯
許宝騄 胡祖熾 朱德威 孙小礼 校訂

人民教育出版社

本书根据苏联国立技术理論书籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的史捷班諾夫(В. В. Степанов)著“微分方程教程”(Курс дифференциальных уравнений)翻譯。前五章是根据1950年第五版譯出,后五章是根据1953年第六版譯出的。原书經苏联高等教育部审定为綜合大学教科书。

本书中譯本由北京工业学院卜元震譯。前五章系北京大学許宝騄校訂,第六至十章系北京大学胡祖熾、朱德威、孙小礼校訂。

簡裝本說明

目前 850×1168 毫米規格紙張較少,本书暂以 787×1092 毫米規格紙張印刷,定价相应減少 20%。希鉴諒。

微分方程教程

В. В. 史捷班諾夫著

卜元震譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

商务印书館上海厂印裝

新华书店上海发行所发行

各地新华书店經售

統一书号 K13010·236　开本 787×1092 1/32　印張 14 10/16

字数 400,000　印数 57,501—59,000　定价(6)¥1.12

1955年9月上册新1版(共印3,000册)

1955年8月下册第1版(共印7,000册)

1956年5月合訂本第1版　1962年3月上海第16次印刷

第五版序言

微分方程這一門課程，根據綜合大學教學大綱的規定，其內容必須包括這樣一些章節，它們和這枝數學分析的各部分理論相適應。初等積分法、存在定理、奇解、線性方程的一般理論，這幾章在近代科學的水平上聯系到李羣理論，聯系到複變函數與實變函數論的方法的應用，還聯系到線性代數的方法等等。

在分析教程中逐漸固定的關於數學嚴密性的近代概念，不允許在相互有關的部分，例如初等積分法和存在定理上帶有不淸楚的觀點來編寫微分方程教本。其次，理論本身和它在近代應用上的發展，要求在大學教程中介紹一些新的篇章，它們一方面要聯繫到定性方法的發展，另一方面還要聯系到線性微分方程的振動定理。

本書的編寫範圍是完全限定在實數域內；無論是本課程在大學教學計劃中的位置（它在解析函數論之前講授），或者上述編寫結合一般觀念的教程的必要性，都決定了這一點。在敍述初等積分法時，就已經提出解案的存在和唯一性的問題。鑑於這教程的一般結構，在本書的前部就講到一階微分方程的解案存在定理。如果限制於局部的觀點，按照我們的見解，通解、積分因子、首次積分的古典概念，已是論證得足夠嚴密，並且不太麻煩。由於這個緣故，在本書中，對於積分曲線在奇點的鄰域中分佈的定性理論，就敍述得足夠多（用小號字），而對於一般積分曲線流卻不加以研究。上面所指出的嚴密性，可惜是以解案對於參數爲可微的定理作根據，由於這個定理的複雜性，在第七章的小號字中才提到它。從本書所採用的觀點看來，奇解是這樣定義的解案：在它每一點的鄰域中，唯一性被破壞；對於導數高於一次的微分方程的奇解的理論，在實數域中，當然不能作出足夠系統的敍述。聯系到二階方程就寫了力學上的應用——週期運動。在線性方程的理論中，給出

了"非傳統的"定理——希士姆定理和比較定理。這本書中並不包含邊值問題，在研究數學物理方程時，才討論它們，因爲提出具有參數和參數本徵值的問題，如果不推到它的本源——二階偏微分方程，就不容易瞭解它。關於用冪級數積分的一節（在應用上重要的），如果不運用解析函數，當然就不可能很完整；在本書中，祇是偶而提到它，例如，不包含貝塞爾方程和勒襄特方程，我們把這些方程歸入數學物理方程教程內。把三角級數應用到線性方程的一節是新添的。

將本書和其它的微分方程書籍比較一下，就容易發現本書中還有別的違背傳統的敍述。

不包含在綜合大學的教學大綱內，但是和大綱內的題材很相近的問題，就用小號字印出。

學習本書之前，須先具備充分嚴密和深刻的大學的分析教程的知識，以及行列式論、高等代數和微分幾何等的基本知識。

出版者言

在本書第五版的準備時期，作者 B. B. 史捷班諾夫在 1950 年 7 月 22 日不幸逝世了。在第五版的第七章，增加了關於略普諾夫的穩定性的 § 6；在這一節的編寫過程中，C. A. 加里本同志應作者的請求曾給他很大的幫助。A. II. 尤希克未契同志應作者的請求爲本書所寫的歷史概略，作爲最後一章。

在本版，就是第六版，只是修正了一些發現的誤刊，以及歷史概略（第十章）由 A. II. 尤希克未契作了部分的修改。

目　錄

第一章　一般概念　已解出導數的一階方程的若干可積類型

§1. 引言

1. 從形式的數學觀點看來，解(積分)微分方程的問題就是微分的逆運算的問題。微分學的問題就是求已知函數的導數。最簡單的逆運算問題在積分學中就已經遇到：給定已知函數 $f(x)$，求其原函數(不定積分)。如果用 y 表示所求原函數，那麼，這個問題就可以用方程的形式表示：

$$\frac{dy}{dx}=f(x) \tag{1}$$

或

$$dy=f(x)dx。 \tag{2}$$

互相等價的方程(1)和(2)是最簡單的微分方程。我們已經能夠求它們的解。實際上，從積分學中大家知道，滿足方程(1)或(2)的最普遍的函數 y 的形狀是：

$$y=\int f(x)dx+C。 \tag{3}$$

在解(3)中的不定積分表示某一個原函數，C 是任意常數。所以，由方程(1)或(2)所確定的未知函數並不是唯一的。這個微分方程有無數個解，其中任何一個解，都可以由給與任意常數 C 一個適當的數值而得到。含有任意常數 C 的解(3)叫做方程(1)的通解；給通解中的常數 C 一個確定的數值而得到的解叫作特解。

我們來討論下面的一個力學問題。研究在地心吸力作用下 m 點沿着鉛直線的運動。取 m 點沿着運動(落下)的那一條鉛直線為 Oy 軸，將原點放於地面上，並且規定向上的方向為正向；要知道運動情況，

也就是，要知道運動開始(對應於 $t=0$) t 秒後 m 點的位置，就必須知道這個點的座標 y 由函數 t 表出的式子。這樣，t 就是自變數，而 y 是未知函數。現在我們要作出求 y 的方程。根據二階導數在力學上的意義，知道加速度等於 $\frac{d^2y}{dt^2}$；另一方面，我們知道在地面上以及地面鄰近的每一點重力加速度是常數，而且(近似地)等於981 厘米/秒^2，我們用字母 g 來表示，$g\approx 981$ 厘米/秒^2；它的方向是向下的，因此在我們的座標系中，它的前面必須加一負號。使這兩個點加速度的表達式相等，我們就得到以 y 爲未知函數的方程：

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g \tag{4}$$

現在已知 y 的二階導數，而要求出這個函數。這個微分方程是容易解(«積分»)的[1]。把等式(4)的兩端對 t 求兩次不定積分，那麼我們順次可得：

$$\frac{dy}{dt}=-gt+C_1, \tag{5}$$

$$y=-\frac{gt^2}{2}+C_1t+C_2。 \tag{6}$$

(6)式是方程(4)的通解；它含有二個任意常數 C_1 和 C_2。我們來說明這些常數的物理意義。在方程(5)中讓 $t=0$，就得到：

$$C_1=\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0}=v_0\ (\text{動點的初速})；$$

同樣，從方程(6)可得：

$$C_2=(y)_{t=0}=y_0\ (\text{動點的原始位置})。$$

用任意常數的這些新記號，我們就可以把微分方程的通解寫爲：

$$y=-\frac{gt^2}{2}+v_0t+y_0。 \tag{7}$$

---

[1] 通常用"積分微分方程"來代替"解微分方程"這句話。爲避免混淆起見，我們稱求不定積分的運算爲"求積"。

現在可以看清楚需要哪些補充條件以便獲得一個描述完全確定的運動的特解：必須知道動點的原始位置 y_0 和初速 v_0 的數值(原始條件)。

問 題

1. 求初速爲零自 10 米高處落下的點的運動方程。問它在幾秒後落於地面上?

2. 求以初速 1 米/秒上拋的點的運動方程。問幾秒後達到最高點?

3. 求下列方程的通解：$\frac{dy}{dx}=2$; $\frac{dy}{dx}=-x^3$; $\frac{d^2y}{dx^2}=\sin x$。

2. 方程(1)中祇出現未知函數的一階導數。這是一階微分方程。一般的一階微分方程具有下面的形狀：

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0, \tag{8}$$

其中 F 是三個變元的已知連續函數；它可以不依憑 x 或 y (或對於二者皆不依憑)，但是必須含有 $\frac{dy}{dx}$。如果方程(8)確定 $\frac{dy}{dx}$ 爲其餘兩個變元的隱函數[1] (以後我們永遠假定這個條件是適合的)，那麼它可以用解出 $\frac{dy}{dx}$ 的形狀表達：

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y)。 \tag{9}$$

這裏 f 是 x, y 的已知連續函數(特別地，它可以不含一個或二個變元：在方程(1)中 f 不依憑 y; 在問題 3 的第一問中，方程的右端旣不依憑 x 又不依憑 y)。在微分方程(8)或(9)中，x 是自變數，y 是未知函數。這樣，一階微分方程是聯繫未知函數，自變數以及未知函數的一階導數間的關係式。

任何函數 $y=\varphi(x)$，如果代入方程(8)或(9)，後使之成爲恆等式，就叫做微分方程(8)或(9)的解。

---

[1] 要方程 $F(x, y, y')=0$ 確定的隱函數 $y'=f(x, y)$ 存在，而且當 $x=x_0$, $y=y_0$ 時取值 y'_0，其充分的條件是：等式 $F(x_0, y_0, y'_0)=0$ 成立，在數值 x_0, y_0, y'_0 的鄰域中連續偏導數 $F'_{y'}$ 存在，而且 $F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0)\neq 0$; 這樣(8)式就在數值 x_0, y_0 的鄰域中確定一連續函數(9)而且 $f(x_0, y_0)=y'_0$。

方程（4）含有未知函數的二階導數；這是二階方程。二階微分方程的一般形狀是

$$F(x, y, y', y'')=0, \tag{10}$$

或者是就二階導數解出（如果能夠解出的話）表達式

$$y''=f(x, y, y')。 \tag{10'}$$

（爲了簡寫起見，我們用撇表示 y 對 x 的導數）。這裏 F 和 f 是其各個變元的已知連續函數，x 是自變數，y 是未知函數；x, y, y' 中某些變元（或全部）可以在方程中不出現，但 y'' 一定要出現。將函數 $\varphi(x)$ 代替方程 (10)［或(10′)］中的 y，如果使方程成爲恆等式，則稱 $\varphi(x)$ 爲解。一般地，方程所含的未知函數的最高階導數的階數稱爲微分方程的階。這樣，n 階方程的形狀是：

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})=0。$$

但方程中必須出現 $y^{(n)}$。

3. 一階微分方程有幾何解釋，它能使我們明白這種方程的解有多個的性質。設給定方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y)。 \tag{9}$$

我們取 x, y 爲平面上的笛卡兒直角座標，在函數 f 的定義域中，每點 (x, y) 都由方程（9）確定一個 $\frac{dy}{dx}$ 的數值。設 $y=\varphi(x)$ 是方程（9）的解。那麽由方程 $y=\varphi(x)$ 確定的曲線稱爲微分方程的積分曲線。$\frac{dy}{dx}$ 是這條曲線上的切線和 Ox 軸交角的正切。這樣，對於定義域中每點 (x, y)，方程（9）都定出一個方向與之對應；這樣我們就得到了方向場。可以這樣描出它：將與 Ox 軸交角爲 $\operatorname{arctg}\frac{dy}{dx}$ 的箭頭（箭頭的正指向可以任意取，因爲反正切所確定的角可以相差 π 的倍數。）放在域內相應的各點。現在，微分方程的積分問題可以這樣解釋：求一曲線，使它在各點的切線方向與方向場在該點的方向一致。概略說來，所引曲線必

須使分佈在場內的箭頭，在每點都指示着該曲線的切線的方向。

讓我們更仔細地研究下面的例子：

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2。\tag{11}$$

先找出那些具有相同斜率的曲線（等斜線），再分佈箭頭。這樣，如果 $y'=0$ 就有 $x=y=0$（原點），如果 $y'=\frac{1}{2}$，則有 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ $\Big($中心在原點，半徑為 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的圓$\Big)$，圓周 $x^2+y^2=1$ 上 $y'=1$ 等等（圖 1）。要畫方程(11)的積分曲線，就必須在平面上取一點 (x_0, y_0)，經過它引一曲線，使曲線上各點具有場的方向［在圖上所畫曲線經過點 $(0, 0)$，$\left(0, -\frac{1}{2}\right)$，$(\sqrt{2}, 0)$］。可見，所得的不是一個曲線，而是含一個參數的整族曲線（例如可以取曲線與 y 軸的截距作為參數）。這結論，對於任何場，也就是任何微分方程，在一定的限制下也是正確的。所以，關於微分方程的

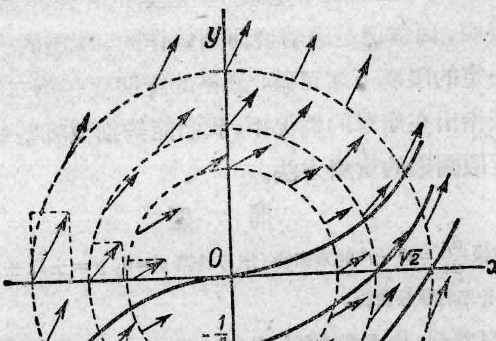

圖 1

全部積分曲線的問題我們有理由期望這樣的答案：一階微分方程的積分曲線構成獨參數的曲線族：

$$y=\varphi(x, C)。\tag{12}$$

如果注意到函數 $\varphi(x, C)$ 對於任何 C 都是微分方程的解，那麼我們就可以期望下面的結果。

一階微分方程的通解是含有一個任意常數的(12)式[*]。

最後，注意到每一條積分曲線可由它所經過的一個定點 (x_0, y_0) 而得到，我們就能得出下面的結論：

為了唯一地確定微分方程的特解，就必須給出未知函數在自變數的值為 x_0 時所具有的值 y_0（原始值）。

實際上，如果已知 x_0 和 y_0，那麼可以將它們代入方程 (12) 可得：$y_0=\varphi(x_0, C)$ —— 確定一個未知數 C 的方程；上面的幾何推理使我們有理由期望這個方程有解。

註　第三段的推演並不是微分方程解的存在和原始條件決定唯一解的嚴格證明，因為這是憑着幾何圖象作的，講過的一切結果，祇有對函數 f 在一定的限制下才正確；嚴格的證明要在第二章中才講到。我們的敍述祇指出在簡單的情況下，我們能夠期望哪些結論，以及給出作積分曲線近似圖象的實際方法。

問　題

4. 作出方程 $\frac{dy}{dx}=x^2-y^2$ 的方向場（作等斜線 $y'=0$, $y'=\pm1$, ±2）；並引經過 (0, 0), (0, 1), (1, 0) 各點的積分曲線。

4. 我們看到，由最簡單的例（1）所得到的一階微分方程的通解的特性——對於一個任意常數的依憑——為前段的理由證實對於更廣泛的一階方程也是正確的。我們自然要期望一般二階微分方程 (10) 或 (10′) 的解與例（4）類似，也含有兩個任意常數，而 n 階微分方程的通解依憑 n 個任意常數。事實上它確是這樣（在一定的限制下）；在這裏

[*] 通解和特解的確切定義祇能在以後給出。

我們不用幾何推理，而從另一角度去解決這個問題，從而我們的思考藉類比法而獲得有意義的證實。

讓我們提出一個問題，這個問題在某種意義上是解微分方程的反面問題。設已知關係式：

$$y=\varphi(x, C), \tag{13}$$

其中 C 是參數，對 x 微分後，[13] 我們得到：

$$y'=\varphi'_x(x, C)。 \tag{14}$$

如果(14)式的右端不含 C，那麼我們就已經消去參數 C，而且得到微分方程：

$$y'=\varphi'_x(x); \tag{14'}$$

顯然，在這種情形下，(13)式的形狀是：

$$y=\varphi(x)+C。$$

而且是方程(14′)的解。

現在設等式(14)的右端含有 C；那麼等式(13)的右端也含有 C，亦即 $\varphi'_c(x, C)\neq 0$，而且在使 $\varphi'_c(x_0, C_0)\neq 0$ 的數值 x_0, C_0 的鄰域中，我們可以確定 C 爲 x, y 的函數：

$$C=\psi(x, y)。 \tag{15}$$

顯然我們有恆等式（對變數 x 和 C）：

$$\psi[x, \varphi(x, C)]\equiv C 。 \tag{16}$$

將(15)式所確定的 C 值代入(14)式，我們獲得一階微分方程：

$$y'=\varphi'_x[x, \psi(x, y)]。 \tag{17}$$

在這裏，我們容易證明不論 C 是任何值，(13)總是上一方程的解；實際上，如果我們將 y 的表達式(13)代入方程(17)，則在左端得 $\varphi'_x(x, C)$，而在右端得 $\varphi'_x\{x, \psi[x, \varphi(x, C)]\}$，由於恆等式(16)它等於 $\varphi'_x(x, C)$。

如果給出的 x, y, C 間的關係式是隱式：

$$\Phi(x, y, C)=0, \tag{13'}$$

[13] 我們假定在論證中出現的導數都存在。

那麽,將它對 x 微分,我們得到:

$$\Phi'_x+\Phi'_y y'=0。\tag{14''}$$

在滿足隱函數論中相當條件的情況下,從關係式(13′)和(14″)消去 C,我們得到方程:

$$F(x, y, y')=0。\tag{17'}$$

前面的推演說明(13′)是它的解。

現在,設給定關係式

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n)=0,\tag{18}$$

它聯繫着函數 y 和自變數 x,而且含有 n 個參數 $C_1, C_2, \cdots, C_n$。我們提出一個問題,是否可以作出一個微分方程使得不論參數取什麽常數值,(18)式所確定的函數 y 滿足這個微分方程? 我們假定 Φ 是所有變元的連續函數,而且對 x, y 可微分足夠多次。在上述假設下,對等式(18)[如果將關係式(18)所確定的函數 $y=\varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ 代 y,它就是恆等式]微分 n 次。我們有

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}y'=0,\\[2ex] \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}y'+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}y'^2+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}y''=0,\\[2ex] \dfrac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}+3\dfrac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y}y'+\cdots\cdots+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}y'''=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ \dfrac{\partial^n\Phi}{\partial x^n}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}y^{(n)}=0。\end{array}\right\}\tag{19}$$

關係式(18)和(19)構成一組 $n+1$ 個方程;它們含有 n 個參數 $C_1, C_2, \cdots, C_n$。一般說來,[1]從這組方程可以消去所有的參數,也就是從 n 個方程求得它們對 $x, y, y', \cdots, y^{(n)}$ 的表達式,再將這些表達式代入第 $n+1$

[1] 即使在一次方程系的情形中,我們知道 n 個方程不一定能決定 n 個未知數。

個方程。我們就得到關係式：

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0, \tag{20}$$

也就是得到 n 階微分方程。我們已經指出，用函數 $\varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ 代方程(18)中的 y 就得到恆等式，這對於方程(19)同樣正確；所以，作爲方程(18)和(19)的後果的方程(20)，當其中的 y 被函數 $\varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ 所替代時，也成爲恆等式，而這正意味着由(18)式所確定的 y 是方程(20)的解。由此看來，這個含有 n 個任意常數的函數乃是某個 n 階微分方程的解。這段推理還可以進行得更精確，有如我們對於一階微分方程所作的那樣。現在我們有理由推斷原來的解是通解，而反之，n 階微分方程的通解含有 n 個任意常數。

問　題

5. 求平面上所有直綫(取通式)的微分方程；並積分這個方程。

6. 求焦距爲 $2C$ 的共焦點橢圓族的微分方程。

提示：曲線族方程爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$，其中 a 是任意參數。將 y 看成 x 的函數，對 x 微分，微分後，可得：

$$\frac{x}{a^2}+\frac{yy'}{a^2-c^2}=0。$$

從這兩方程消去 a^2，就得到所求的一階微分方程。

例 1. 在平面上的圓族

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\gamma^2$$

含有三個參數，微分三次：

$$x-\alpha+(y-\beta)y'=0, \quad 1+(y-\beta)y''+y'^2=0,$$

$$(y-\beta)y'''+3y''y'=0。$$

在微分時，消去了 α 和 γ；但是還要從最後兩個方程消去 β。(使 $y-\beta$ 的兩個表達式相等)我們可得：

$$y'''(1+y'^2)-3y'y''^2=0。$$

例 2. 我們取圓錐曲線的方程作爲最後一個例子，從解析幾何上，大家知道，它依憑於五個參數(即六個係數的比例)，其形狀爲：

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0。$$

我們假定 $a_{22}\neq 0$，並由這個方程解出 y：

$$y=-\frac{a_{12}x+a_{23}}{a_{22}}\pm\sqrt{\left(\frac{a_{12}x+a_{23}}{a_{22}}\right)^2-\frac{a_{11}x^2+2a_{13}x+a_{33}}{a_{22}}}$$

或

$$y=-\frac{a_{12}}{a_{22}}x-\frac{a_{23}}{a_{22}}\pm\sqrt{\frac{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}{a_{22}^2}x^2+2\frac{a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}}{a_{22}^2}x+\frac{a_{23}^2-a_{22}a_{33}}{a_{22}^2}}。$$

用新的字母表示各個常數，我們最後得到：

$$y=Ax+B+\sqrt{Cx^2+2Dx+E}。\tag{21}$$

在這方程中有五個參數；必須將它們從已知方程和經過一次，二次…五次微分後所得的各方程中消去。

因此，將方程(21)兩端對 x 微分：

$$y'=A+\frac{Cx+D}{\sqrt{Cx^2+2Dx+E}},$$

$$y''=\frac{C(Cx^2+2Dx+E)-(Cx+D)^2}{(Cx^2+2Dx+E)^{\frac{3}{2}}}=\frac{CE-D^2}{(Cx^2+2Dx+E)^{\frac{3}{2}}}。$$

A, B 兩常數已被消去；在右端，分子爲常數，而分母爲二次三項式的 $\frac{3}{2}$ 次方。爲了以後易於消去常數起見，我們取兩端的 $-\frac{2}{3}$ 次方；於是得到：

$$(y'')^{-\frac{2}{3}}=(CE-D^2)^{-\frac{2}{3}}(Cx^2+2Dx+E),$$

即是說，在右端有了關於 x 的二次三項式；如果將它連續微分三次，那麼所有常數都被消去，因爲這時右端等於零。所以，要求的微分方程就是：

$$(y''^{-\frac{2}{3}})'''=0。$$

我們逐次求微分：

$$(y''^{-\frac{2}{3}})'=-\frac{2}{3}y''^{-\frac{5}{3}}y''',\quad (y''^{-\frac{2}{3}})''=\frac{10}{9}y''^{-\frac{8}{3}}y'''^2-\frac{2}{3}y''^{-\frac{5}{3}}y^{\mathrm{IV}},$$

最後得到