21世纪普通高等教育规划教材

高等数学

下册

刘 勇　成志新　主编

化学工业出版社

21 世纪普通高等教育规划教材

高等数学

下册

刘　勇　成志新　主　编
孙映成　王参军　副主编

化学工业出版社
·北京·

下册目录

第 4 部分　多元微积分

第5部分 微分方程

第 4 部分　多元微积分

第 13 章　多元函数微分法及其应用

本章内容属于多元函数微分学范畴，主要包括：多元函数的偏导数、全微分等的概念与应用以及计算它们的方法. 我们将以二元函数为主，介绍多元函数的微分法及其应用，因为从一元函数到二元函数，在内容和方法上会有一些实质性的差别，而从二元函数到三元或三元以上的函数就没有本质的差别，仅会产生一些技术上的困难.

§ 13.1　多元函数的基本概念

13.1.1　平面点集与 n 维欧氏空间

我们已经知道，一元函数就是只有一个自变量的函数，它们的定义域都是数轴上某些点的集合，所以为了把一元函数的相关概念推广到多元函数，需要引入平面点集的一些基本概念，并把它们推广到更一般的 n 维线性空间.

由平面解析几何知道，坐标平面上的点 P 与其坐标 (x,y) 之间是一一对应的，所以我们常把有序实数组 (x,y) 与平面上的点 P 视作是等同的. 这样，二元有序实数组 (x,y) 的全体即 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$ 就表示坐标平面.

坐标平面上具有某种性质 P 的点的全体称为**平面点集**，记作

$$E=\{(x,y)\mid (x,y)\text{具有性质 }P\}.$$

例如，平面上以原点为中心、r 为半径的圆周是

$$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=r^2\};$$

平面上以原点为中心，a、b 分别为长半轴与短半轴的椭圆内所有点的全体是

$$\tilde{C}=\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1\right.\right\}.$$

定义 13.1.1 坐标平面上与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 $\delta>0$ 的点 $P_0(x,y)$ 的全体，即 xOy 面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心、$\delta>0$ 为半径的开圆盘，称为点 P_0 的 **δ 邻域**，记为 $U(P_0,\delta)$，即

$$\begin{aligned}U(P_0,\delta)&=\{P\mid |PP_0|<\delta\}\\&=\{(x,y)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.\end{aligned}$$

点 P_0 的 δ 邻域去掉中心 P_0 后称为点 P_0 的**去心邻域**，记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$，即

$$\begin{aligned}\mathring{U}(P_0,\delta)&=\{P\mid 0<|PP_0|<\delta\}\\&=\{(x,y)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.\end{aligned}$$

注 若不需要强调邻域的半径 δ，则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个邻域，$\mathring{U}(P_0)$ 表示相应的去心邻域.

定义 13.1.2 设 E 是一平面点集．若点 P_0 的任意邻域内都有 E 中无穷多个点，则称 P_0 是 E 的**聚点或极限点**；点集 E 的全体聚点的集合称为 E 的**导集**，记作 $\mathrm{d}(E)$；若 $P_0\in E$ 不是 E 的聚点，则称 P_0 是 E 的**孤立点**.

定义 13.1.3 设 E 是一(平面)点集．若 E 中的点 P_0 有一邻域 $U(P_0)$ 使得 $U(P_0)\subset E$，则称 P_0 为 E 的**内点**；若点 P_0 有一邻域 $U(P_0)$ 使得 $U(P_0)\cap E=\varnothing$，则称 P_0 为 E 的**外点**；若点 P_0 的任意邻域内既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，则称 P_0 点为 E 的**边界点**；E 的边界点的全体称为 E 的**边界**，记作 ∂E.

显然，E 的内点必属于 E，E 的外点必不属于 E，但它的边界点或聚点可能属于 E，也可能不属于 E. 此外，若点 $P\in\mathbf{R}^2$ 既不是点集 $E\subset\mathbf{R}^2$ 的内点，也不是 E 的外点，则它必为 E 的边界点.

例如，设平面点集

$$E=\{(x,y)\mid -1\leqslant x<1 \text{ 且 } -2<y\leqslant 2\}, \tag{13.1.1}$$

则满足 $|x|<1$ 且 $|y|<2$ 的一切点 $P(x,y)$ 都是 E 的内点；直线 $x=\pm 1$ 与 $y=\pm 2$ 上的一切点 $P(x,y)$ 都是 E 的边界点，其中直线 $x=1, y=-2$ 上的点不属于 E；点集 E 与直线 $x=1, y=-2$ 上的一切点都是 E 的聚点.

根据点集中所含点的特征，可定义如下一些重要的平面点集.

定义 13.1.4 若集合 E 中的点全是 E 的内点，则称 E 为**开集**；若 E 的补集是开集，则称 E 是**闭集**. 集合 E 与其导集的并集称为 E 的**闭包**，记作 $\overline{E}$，它是包含 E 的最小的闭集.

定义 13.1.5 若点集 E 中的任意两点可用完全含于 E 中的连续曲线相连接，则称 E 为**连通集**；若 E 既是连通集又是开集，则称 E 是**(开)区域**；区域连同它边界一起构成的点集称为**闭域**.

定义 13.1.6 设 D 为一区域. 若 D 内任一闭曲线所围的部分都属于 D，则称 D 为**单连通区域**；否则，称为**多连通区域**.

定义 13.1.7 若存在 $r>0$ 使得点集 $E\subset U(O,r)$，其中 O 是坐标原点，则称 E 为**有界集**；否则，称为**无界集**.

例如，式(13.1.1)中的点集既非开集，也非闭集；任一邻域是单连通区域，点集 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<2\}$ 是多连通区域；点集 $\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 2\}$ 是有界闭域，点集 $\{(x,y)\mid x+2y>1\}$ 是无界区域.

现在把平面点集中的相关概念推广到 n 维欧氏空间.

设 n 是一正整数，则 n 元有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体所构成的集合记为 $\mathbf{R}^n$，即

$$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n\}.$$

集合 $\mathbf{R}^n$ 中的每一个元素 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点或一个 n 维实向量，其中 x_i 称为点 x 的第 i 个坐标或 n 维实向量 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量. 特别地，称所有的 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都为零的元素为 $\mathbf{R}^n$ 中的**零元**，它也叫做 $\mathbf{R}^n$ 中的坐标原点或 n 维零向量，记为 O 或 $\mathbf{0}$.

为了在集合 $\mathbf{R}^n$ 中的元素之间建立联系，需在 $\mathbf{R}^n$ 中赋予线性运算.

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$，则定义

$$\boldsymbol{x}\pm\boldsymbol{y}=(x_1\pm y_1,x_2\pm y_2,\cdots,x_n\pm y_n),$$
$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n).$$

这样赋予了线性运算的集合 $\mathbf{R}^n$ 称为 n **维实线性空间**.

$\mathbf{R}^n$ 中点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之间的距离，记作 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，规定

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{(x_1-y_2)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

显然 $n=1,2,3$ 时，上述规定与数轴上、直角坐标系下平面及空间中两点间的距离一致.

特别地，我们把 $\mathbf{R}^n$ 中点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与原点 O 之间的距离 $d(\boldsymbol{x},0)$ 称为 x 的范数，记作 $\|\boldsymbol{x}\|$，即 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$. 于是 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$. 通常把 n 维实线性空间 $\mathbf{R}^n$ 称为 n **维欧氏空间**.

定义 13.1.8 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$. 若 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|\to 0$，则称变元 x 在 $\mathbf{R}^n$ 中趋于固定元 $\boldsymbol{a}$，记作 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$. 显然，

$$\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\Leftrightarrow x_1\to a_1,x_2\to a_2,\cdots,x_n\to a_n.$$

定义 13.1.9 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$，常数 $\delta>0$，则称点集

$$U(\boldsymbol{a},\delta)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})<\delta\}$$

为点 $\boldsymbol{a}$ 的邻域.

从邻域出发，就可以把平面点集中的相关概念如内点、外点、边界点和聚点以及开集、闭集、区域等毫无困难地引入 n 维欧氏空间中. 这里不再重复.

13.1.2 多元函数概念

在自然科学与工程技术中常会遇到依赖于两个或多个自变量的函数，举例如下.

【例 13.1.1】 矩形面积 S 与矩形的长 a、宽 b 之间的关系为

$$S=ab \quad (a>0,b>0).$$

这表明矩形面积依赖于两个变量:矩形的长与宽,当 a,b 的值取定,S 的值也随之取定.

【例 13.1.2】 液体的压强 p 和液体的密度 ρ 以及液体的深度 h 关系如下:

$$p=\rho gh \quad (\rho>0,h>0),$$

其中 g 为重力加速度.这表明液体的压强依赖于两个变量:液体的密度和深度,当 ρ,h 的值取定,S 的值也随之取定.

【例 13.1.3】 电功 W、电压 U、电流强度 I 和时间 t 之间具有如下关系:

$$W=UIt \quad (U>0,I>0,t>0).$$

这表明电功依赖于三个变量:电压 U、电流强度 I 以及时间 t,当 U,I,t 的值取定,W 的值也随之取定.

以上三例虽具体意义不同,但可找出它们在数学上的共性,从而得到多元函数的定义.

定义 13.1.10 设 D 是一平面点集.如果对于 D 上的每一点 $P(x,y)$都按照对应法则 f 有唯一确定的值 $z=f(x,y)\in\mathbf{R}$ 与之对应,则称 z 为 D 上的一个二元函数,通常记为

$$z=f(x,y),(x,y)\in D$$

或

$$z=f(P),P\in D,$$

其中点集 D 称为该函数的定义域,数集

$$f(D)=\{z\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为该函数的值域,x,y 称为自变量,z 称为因变量.

类似地可定义三元函数 $u=f(x,y,z),(x,y,z)\in D$ 以及三元以上的函数,这只要把定义 13.1.8 中的平面点集 D 换成欧氏空间

$\mathbf{R}^n$ 内的点集 E. 这时 n 元函数通常记为

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E$$

或

$$u=f(P),\quad P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E,$$

也可简记为

$$u=f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E.$$

关于多元函数定义域我们作如下约定：对于纯粹的数学算式表达的多元函数 $u=f(x)$，使这算式有意义的自变量取值的全体组成的点集作为其自然定义域，这时函数的定义域不再特别标出；对于实际问题视具体情况而定，如例 13.1.1 中的 S 虽然对一切 $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ 有意义，但我们却限制 $a>0,b>0$.

【例 13.1.4】 求函数 $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}+\ln(y-x^2)$ 的定义域.

解 所求定义域是

$$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 4,y>x^2\},$$

它是 xOy 面上以原点为圆心、2 为半径的闭圆盘位于抛物线 $y=x^2$ 上方的部分.

定义 13.1.11 设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，则称空间点集 $\{(x,y,z)\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形.

二元函数的图形通常是一片曲面，例如函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的图形是单位球面的上半球面，线性函数 $z=x+2y-1$ 的图形是一张平面，函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的图形是圆锥面.

习题 13-1

[A 组]

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集？并分别指出它们的导集和边界：

(1) $\{(x,y)\,|\,x\neq 0,y\neq 0\}$； (2) $\{(x,y)\,|\,4\leqslant x^2+y^2\leqslant 9\}$；

(3) $\{(x,y)\mid x>x^2\}$;

(4) $\{(x,y)\mid (x-1)^2+y^2\geqslant 1\}\cap\{(x,y)\mid (x-2)^2+y^2\leqslant 4\}$.

2. 已知函数 $f(x,y)=x^2-2y^2-x^3y\tan\dfrac{2x}{y}$，试求 $f(1,2)$.

3. 求下列各函数的定义域：

(1) $z=\ln(x^2-3y+4)$;

(2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{2x-y}}-\dfrac{2}{\sqrt{x+2y}}$;

(3) $z=\ln(x-y)+\dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$;

(4) $u=\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}-\dfrac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-4}}$;

(5) $u=\arcsin\dfrac{z^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

[B 组]

1. 求函数 $z=\arcsin\dfrac{x}{3}+\sqrt{xy}$的定义域，并画出该定义域的图形.

2. 求函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2-2y^2}-y\tan\dfrac{2x}{y}$的定义域，并画出该定义域的图形.

3. 试证函数 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

4. 已知函数 $f(u,v,w)=(2u)^w+w^{u+2v}$，试求 $f(x+y,x-y,xy)$.

§13.2 多元函数的极限与连续性

13.2.1 多元函数的极限

与一元函数的极限概念类似，若动点 $P(x,y)$以任何方式无限趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$时，对应的函数值 $f(x,y)$无限趋近于一个确定的常数 A，那么称 A 是函数 $f(x,y)$当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时的二重极限.

定义 13.2.1 设函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的去心邻域 $U(P_0,\Delta)$内有定义. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 $\varepsilon>0$，总存在正数 $\delta<\Delta$，使得当点 $P(x,y)\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$时都有不等式

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立,那么称常数 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的二重极限,记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$$

或

$$f(x,y)\to A \quad ((x,y)\to(x_0,y_0)),$$

此时也称 A 是函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的二重极限.

定义 13.2.2 极限 $\lim\limits_{t\to t_0} f[\varphi(t),\psi(t)]$ 称为函数 $f(x,y)$ 按指定路径当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限,也称为函数 $f(x,y)$ 按指定路径在 (x_0,y_0) 处的极限,这里的路径是连续曲线

$$C:\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

满足 $x_0=\varphi(t_0)$, $y_0=\psi(t_0)$.

以上关于二元函数的极限概念可平行地推广到 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中去. 从上述定义易见,当函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的二重极限存在,则它按任意指定路径在 (x_0,y_0) 处的极限都存在,并且都等于该二重极限. 因此如果找到两条不同路径使得函数在 (x_0,y_0) 处的极限不相等时,那么函数在 (x_0,y_0) 处的二重极限必不存在.

【例 13.2.1】 证明二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} x\cos\dfrac{x^2+y^2}{xy}=0$.

证 任意给定 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时有

$$|f(x,y)-0|=\left|x\cos\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)\right|\leqslant|x|<\delta=\varepsilon,$$

所以
$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} x\cos\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)=0.$$

【例 13.2.2】 设函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,证明二重极限

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$不存在.

证 当(x,y)沿直线 $y=kx$ 趋于原点时,函数 $f(x,y)$在原点按指定路径的极限

$$\lim_{x\to0}f(x,kx)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2},$$

它的值会随着 k 的变化而变化,所以所给二重极限不存在.

多元函数的极限运算法则与一元函数的情况类似. 下面通过举例加以说明.

【例 13.2.3】 求二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-1)}\dfrac{\ln(1+xy)}{xy^3}$.

解 利用积的极限运算法则得

$$\lim_{(x,y)\to(0,-1)}\frac{\ln(1+xy)}{xy^3}=\lim_{(x,y)\to(0,-1)}\frac{\ln(1+xy)}{xy}\times\lim_{(x,y)\to(0,-1)}\frac{1}{y^2}$$
$$=1\times1=1.$$

【例 13.2.4】 求二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-1)}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^x$.

解 利用复合函数的极限运算法则得

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^x=\lim_{(x,y)\to(0,1)}\left[\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{xy}\right]^{\frac{1}{y}}=e^1=e.$$

13.2.2 多元函数的连续性

仿照一元函数连续性概念,我们引出下述定义.

定义 13.2.3 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$在 $P_0(x_0,y_0)$的某邻域内有定义. 如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

那么称函数 $f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$连续.

如果函数 $f(x,y)$在区域 D 内的每一点都连续,那么就称函数 $f(x,y)$在区域 D 上连续,或者说 $f(x,y)$是 D 上的连续函数. 例如函数 $f(x,y)=\sin x+\cos y$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的连续函数. 事实上,一元初等函数看成二元函数或二元以上的多元函数时,它们在各自的定义域内

都是连续的.二元函数的连续性概念可相应地推广到 n 元函数 $f(M)$ 上去.

定义 13.2.4 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的聚点.如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 不连续，那么称 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的间断点.

例如，由例 13.2.2 知函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 在原点不连续，即原点是其间断点；又如函数 $z=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$ 在圆周 $C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ 上无意义，从而在 C 上各点都不连续，所以单位圆周 C 上的点都是其间断点.

可以证明：多元连续函数的和、差、积仍为连续函数，连续函数的商在分母不为零处仍连续，多元连续函数的复合函数也是连续函数.

与一元初等函数类似，所谓多元初等函数是指可用一个式子所表示的多元函数.这个式子是由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而得到.例如 $\sin x+\cos y$，e^{xy}，$\ln(2+x^2+y^2+z^2)$ 等都是多元初等函数.一切多元初等函数在其有定义的区域内连续.

由多元连续函数的连续性，如果多元连续函数 $f(P)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，那么 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)$.

【例 13.2.5】 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)}\dfrac{(x^2-y^2)xy}{x+y}$.

解 所求极限 $L=\dfrac{[(-1)^2-2^2]\times(-1)\times 2}{-1+2}=6$.

【例 13.2.6】 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sqrt{1-xy}-1}{\sin x}=\dfrac{1}{2}$.

解 所求极限

$$L=\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{(\sqrt{1-xy}-1)(\sqrt{1-xy}+1)}{(\sqrt{1-xy}+1)\sin x}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,2)}-\frac{x}{\sin x}\times\frac{y}{\sqrt{1-xy}+1}=-1\times\frac{2}{1+1}=-1.$$

与闭区间上一元连续函数的性质相似，有界闭域 Ω 上的多元连续函数具有以下三个基本性质.

性质 13.2.1(最值定理) 设 $u=f(P)$ 是有界闭域 Ω 上的多元连续函数，则 $u=f(P)$ 在 Ω 上有界，并且在 Ω 上取得它的最大值和最小值，即存在 $P_1, P_2\in\Omega$ 使得

$$f(P_1)=M=\max_{P\in\Omega}f(P),\quad f(P_2)=m=\min_{P\in\Omega}f(P).$$

性质 13.2.2(零点定理) 设 $u=f(P)$ 是有界闭域 Ω 上的多元连续函数，且存在 $P_1, P_2\in\Omega$ 使得 $f(P_1)\cdot f(P_2)\leqslant 0$，则存在 $\widetilde{P}\in\Omega$ 使得 $f(\widetilde{P})=0$.

性质 13.2.3(介值定理) 设 $u=f(P)$ 是有界闭域 Ω 上的多元连续函数，则对介于 $M=\max\limits_{P\in\Omega}f(P)$，$m=\min\limits_{P\in\Omega}f(P)$ 之间的每个实数 c，存在 $\widetilde{P}\in\Omega$ 使得 $f(\widetilde{P})=c$.

习题 13-2

[A 组]

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{2-xy}{x^2+y^2}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\ln(y+e^x)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{3-\sqrt{xy+9}}{xy}$；　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(2+x)\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$；　　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$.

2. 证明下列极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x-y}{x+y}$ 不存在.

3. 函数 $z=\dfrac{y^2+3x}{y^2-3x}$ 在哪些点处间断？

[B 组]

1. 计算二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,a)}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$，其中常数 $a\neq 0$.

2. 求二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2|y|^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}$.

3. 讨论 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 的存在性.

§13.3 偏导数与全微分

13.3.1 偏导数的概念

对于二元函数 $z=f(x,y)$ 而言，如果只有自变量 x 变化，而自变量 y 固定，这时它就是 x 的一元函数. 这时函数对 x 的导数就称为二元函数 $z=f(x,y)$ 对 x 的**偏导数**.

定义 13.3.1 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义. 如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，那么称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记作 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$，$z_x(x_0,y_0)$ 或 $f_x(x_0,y_0)$. 例如

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

类似地，函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

记作 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$，$z_y(x_0,y_0)$ 或 $f_y(x_0,y_0)$.

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数都存在就称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可导.

定义 13.3.2 如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数就是 x,y 的函数. 它称为函数 $z=f(x,y)$ 对 x 的**偏导函数**，记作 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$z_x$ 或 $f_x(x,y)$. 例如

$$f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$