

山东省高校统编教材

高等数学

GAO DENG SHU XUE

山东省教育厅 组编

上

石油大学出版社

中国海洋大学 青岛大学
青岛科技大学 青岛建筑工程学院

高等数学

(上册)

主编	刘新国		
编委	于进伟	田志远	李志敏
	陈中慧	赵凯	郭晓沛
	曹圣山	董鹤年	谢树森

石油大学出版社

内 容 提 要

本书结构严谨,逻辑清晰,叙述详细,可供普通高等学校工程类专业作为教材使用.本书还为教师留下了使用空间,也为程度较好的读者准备了部分有一定难度的习题,还提供了进一步阅读的线索.全书内容有一定弹性,因而也可作为其他专业读者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/刘新国主编. —东营:石油大学出版社,2002.3
ISBN 7-5636-1610-1

I. 高… II. 刘… III. 高等数学—高等学校—教材
IV. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第012423号

高 等 数 学(上册)

主 编 刘新国

出 版 者:石油大学出版社(山东 东营,邮编 257061)

网 址: <http://sunctr.hdpu.edu.cn/~upcpres>

电子信箱: upcpres@sunctr.hdpu.edu.cn

印 刷 者:临清市万方印务有限责任公司印刷

发 行 者:石油大学出版社(电话 0546-8392062)

开 本: 850×1168 1/32 印张:11.5625 字数:299千字

版 次:2003年8月第1版第2次印刷

定 价:(全套)30.00元(上册14.00元)

前 言

本书是普通高等院校工程类各本科专业高等数学教材. 全书分上、下两册出版. 上册内容为函数与极限、一元函数微分学和积分学、空间解析几何与矢量代数. 下册内容包括多元函数微分学、重积分及其应用、曲线积分与曲面积分、级数、常微分方程、数学模型、数值方法. 书末附有二、三阶行列式简介, 几种常用曲线, 积分表, 习题答案或提示, 书中主要数学概念中英文对照表.

与国内出版的同类教材相比, 本书在编写中作了几方面的尝试. 其一是增加了数学模型内容(第十三章), 初衷是增加课程的实用性和趣味性, 目的是与全国大学生数学建模竞赛相结合. 其二是每章都编写了一个简短的说明, 目的是为读者提供进一步阅读的线索. 第三是把全课程中有关数值计算的内容集中编为一章(第十四章). 由于绝大多数数学问题需要用数值方法求解, 对此予以适当介绍和强调有助于体系完整. 而对于以《计算方法》为后继课程的专业, 这部分内容可以不讲, 使全书内容有教学弹性. 第四是各章都配置了一些难度较大的习题, 供程度好的读者选做.

为了便于读者学习, 书后附有全书主要数学概念中英文对照表; 列出的参考文献是一条进一步学习的线索, 可参阅有关的说明. 与习惯的做法一样, 书末附有二、三阶行列式简介, 积分表, 习题答案或提示.

本书编写过程中, 省教育厅的有关领导始终给予关心和支持. 本书又是多方合作的结果, 来自四所院校的十位教师参加了编写

工作:青岛海洋大学刘新国(第二章、第十四章),陈中慧(第一章),谢树森(第七章、第九章),曹圣山(第四章、第十三章),青岛大学田志远(第八章),赵凯(第三章),郭晓沛(第十一章及部分附录),青岛建工学院于进伟(第十章),李志敏(第五章、第六章),青岛科技大学董鹤年(第十二章),最后由刘新国负责全书一体化.每位编者都得到了各自学校有关领导的关心和支持.编写过程中参考了大量的教材和文献,在此无法一一列举,借此谨向相关作者致谢.本书能顺利付梓与石油大学出版社的帮助是分不开的,在此一并致谢.

限于编者的学识和经验,书中定有不当之处,敬请读者指正.

编者

2002年6月

目 录

第一章 函数、极限与连续性	(1)
第一节 函数	(1)
一、集合、区间(1) 二、映射、函数(3)	
三、初等函数(15) 练习 1-1(21)	
第二节 极限	(23)
一、极限的概念(23) 二、极限的基本性质(37)	
三、极限的运算(39) 四、极限存在定理(43)	
五、无穷小量与无穷大量(51) 练习 1-2(58)	
第三节 连续函数	(61)
一、函数连续的概念(61) 二、连续函数的运算法则(67)	
三、闭区间上连续函数的性质(73)	
练习 1-3(78)	
进一步说明	(80)
习题一	(81)
第二章 导数与微分	(82)
第一节 导数概念	(82)
一、引例(82) 二、导数的定义(84)	
三、基本初等函数的导数(87) 练习 2-1(90)	
第二节 导数的四则运算	(91)
练习 2-2(94)	
第三节 反函数及复合函数求导法	(94)
一、反函数的导数(94) 二、复合函数求导法(96)	

	三、初等函数的导数(97) 练习 2-3(100)	
第四节	高阶导数.....	(101)
	练习 2-4	(106)
第五节	隐函数的导数.....	(106)
	一、隐函数的导数(107) 二、由参数方程确定的函数的导数(108) 练习 2-5(112)	
第六节	函数的微分及其应用.....	(112)
	一、引例(112) 二、微分的定义(113)	
	三、微分的计算(115) 四、微分的应用(117)	
	练习 2-6(120)	
	进一步说明.....	(120)
	习题二.....	(122)
第三章	中值定理与导数的应用.....	(124)
第一节	中值定理.....	(124)
	一、罗尔定理(124) 二、拉格朗日中值定理(127)	
	三、柯西中值定理(130) 练习 3-1(132)	
第二节	洛必达法则.....	(133)
	练习 3-2(139)	
第三节	泰勒公式.....	(140)
	练习 3-3(145)	
第四节	函数单调性的判定法.....	(145)
	练习 3-4(148)	
第五节	函数的极值及其求法.....	(149)
	练习 3-5(154)	
第六节	最大值和最小值问题.....	(155)
	练习 3-6(158)	
第七节	曲线的凹凸与拐点.....	(159)
	练习 3-7(163)	
第八节	函数图形的描绘.....	(163)

	练习 3-8(168)	
第九节	曲率.....	(168)
	一、弧微分(168) 二、曲率及其计算公式(169)	
	三、曲率圆与曲率半径(173) 练习 3-9(174)	
	进一步说明.....	(174)
	习题三.....	(175)
第四章	不定积分.....	(179)
第一节	原函数与不定积分.....	(179)
	一、原函数与不定积分(179)	
	二、不定积分的几何意义(182) 练习 4-1(182)	
第二节	不定积分的性质与基本积分公式.....	(183)
	一、不定积分的性质(183)	
	二、基本积分公式(183) 三、简单例子(184)	
	练习 4-2(185)	
第三节	不定积分的换元积分法.....	(186)
	一、第一类换元法(凑微分法)(186)	
	二、第二类换元法(189) 练习 4-3(192)	
第四节	不定积分的分部积分法.....	(192)
	练习 4-4(195)	
第五节	有理函数的不定积分.....	(195)
	一、有理函数的分解(196)	
	二、有理函数的不定积分(197)	
	三、可化为有理函数不定积分的某些类型(199)	
	练习 4-5(201)	
	进一步说明.....	(201)
	习题四.....	(203)
第五章	定积分.....	(204)
第一节	定积分概念.....	(204)
	练习 5-1(210)	

第二节	定积分的性质 中值定理	(212)
	练习 5-2	(215)
第三节	微积分基本公式	(216)
	一、积分上限的函数及其导数	(216)
	二、牛顿-莱布尼茨公式	(218) 练习 5-3 (221)
第四节	定积分的换元法	(223)
	练习 5-4	(228)
第五节	定积分的分部积分法	(229)
	练习 5-5	(231)
	进一步说明	(232)
	习题五	(233)
第六章	定积分的应用	(236)
第一节	定积分的元素法	(236)
第二节	定积分的几何应用	(237)
	一、平面图形的面积	(237)
	二、立体的体积	(241)
	三、平面曲线的弧长	(245) 练习 6-1 (248)
第三节	定积分的物理应用举例	(251)
	一、变力沿直线所作的功	(251)
	二、水压力	(253)
	三、引力	(254) 练习 6-2 (255)
第四节	平均值	(256)
	一、函数的平均值	(256)
	二、均方根	(258)
	练习 6-3	(259)
第五节	广义积分	(260)
	一、无穷区间上的广义积分	(260)
	二、无界函数的广义积分	(262) 练习 6-4 (264)
	进一步说明	(265)
	习题六	(266)
第七章	向量代数与空间解析几何	(269)
第一节	空间直角坐标系	(269)
	一、空间点的直角坐标	(270)

	二、空间中两点间的距离(272) 练习 7-1(274)	
第二节	向量代数.....	(274)
	一、向量的基本概念(274)	
	二、向量的线性运算(275)	
	三、向量的坐标(277) 练习 7-2-1(282)	
	四、向量的数量积、向量积、混合积(283)	
	练习 7-2-2(290)	
第三节	空间平面及其方程.....	(290)
	一、曲面方程的概念(290)	
	二、空间平面方程(291) 练习 7-3(295)	
第四节	空间直线及其方程.....	(296)
	一、空间直线的一般方程(296)	
	二、直线的点向式方程和参数方程(297)	
	三、两条直线的夹角(299)	
	四、直线与平面的夹角(299)	
	五、平面束方程(301) 练习 7-4(302)	
第五节	空间曲面及其方程.....	(303)
	一、空间曲面方程(303)	
	二、常见的二次曲面(306) 练习 7-5(310)	
第六节	空间曲线及其方程.....	(310)
	练习 7-6	(312)
第七节	坐标轴变换.....	(313)
	一、坐标轴平移(313) 二、坐标轴旋转(314)	
	进一步说明.....	(315)
	习题七.....	(316)
附录 I	行列式简介	(319)
附录 II	几种常用曲线	(321)
附录 III	积分表	(325)
	练习题答案与提示	(335)

第一章 函数、极限与连续性

客观世界是变化的,变量之间最主要的一种关系就是函数关系,它是高等数学研究的主要对象,极限则是研究变量最重要、最基本的方法.函数的连续性是函数最重要的性质.本章分为三节,分别介绍了函数、极限和连续性的有关概念、性质和方法,这些内容是全书的基本知识.

第一节 函 数

一、集合、区间

1. 集合

集合是高等数学中的一个基本概念. ^{具有确定性质,互不相同}所谓集合是指具有某种 ^{性质} 性质的事物的全体.组成这个集合的事物称为该集合的元素,集合通常用大写字母 $A, B, \dots$ 表示.集合的 ^{性质} 元素常用小写字母 $a, b, \dots$ 表示.若事物 a 是集合 M 的元素,则记为 $a \in M$ (读作 a 属于 M);若事物 a 不是集合 M 的元素,则记为 $a \notin M$.

注1 定义中的某种性质必须是明确的,可以用它判断任意元素是否属于该集合.

注2 定义中关于性质的描述有多种方法,如列举法、解析法等.

例 $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}; \quad B = \{2, 3\};$

$C = \{(x, y) | x^2 + y^2 + 1 = 0\}.$

集合 A, C 是用解析法表示,而集合 B 是采用列举法. $A = \{a, b, c, \dots\}$

列举法: 把集合中的元素一一列举出来.

描述法: 将集合所具有的性质描述出来.

$N = \{0, 1, 2, \dots\}$ $Z = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, \dots\}$
 $Q = \{\frac{p}{q} | p \in Z, q \in N^+, \text{且 } p, q \text{ 互质}\}$ R (即 A^* 除 0 以外的元素构成)
 $A=B \Leftrightarrow A \subset B \text{ 且 } B \subset A$ A^+ 除 0 以外的元素

$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B$
 元素都是数的集合称为数集。经常用到的数集有全体自然数构成的集合记为 N ，全体整数的集合记为 Z ，全体有理数的集合记为 Q ，全体实数的集合记为 R 。

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $a \in A$ ，则有 $a \in B$ ，这时称 A 是 B 的子集，记作 $A \subset B$ (读作 A 包含于 B)，或 $B \supset A$ (读作 B 包含 A)。显然有 $N \subset Z \subset Q \subset R$ 。

如果 $A \subset B$ 同时有 $B \subset A$ ，就称集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$ ，此时集合 A 与 B 由相同的元素构成。上例中， $A=B$ 。

不含任何元素的集合称为空集，记作 $\emptyset$ 。上例中的集合 C 在实数范围内是空集，即 $C=\emptyset$ 。一切既属于集合 A ，又属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 、 B 的交集，记为 $A \cap B$ 。一切属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 、 B 的并集，记为

$A \cup B$ 。即
 若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$ ，则 A 称为 B 的真子集 $A \subsetneq B$
 $\emptyset$: 不含任何元素的集合 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$,
 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

$A = \{x | x \in R, x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$
 设集合 A 是 U 的子集， U 中一切不属于 A 的元素组成的集合，称为 A 在 U 中的余集，记为 $C_u A$ 。即

定义 $C_u A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$.

可以证明集合上的 $\cup$, $\cap$ 和余集三种运算有以下规律：

- (1) $A \cap A = A, A \cup A = A$ (幂等律)；
- (2) $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$ (交换律)；
- (3) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (结合律)；
- (4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (分配律)；
- (5) $C_u(C_u A) = A, A \cap C_u A = \emptyset, A \cup C_u A = U$ ；
- (6) $C_u(A \cap B) = C_u A \cup C_u B, C_u(A \cup B) = C_u A \cap C_u B$.

2. 区间、邻域

设 a 和 b 都是实数，且 $a < b$ ，数集

$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$
 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$

3. $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 称为 A 与 B 的差集

4. $A^c = C_I A = \{x | x \in I \text{ 且 } x \notin A\}$

5. $A \cap A = A, A \cup A = A$. ② $A \cup B = B \cup A$
 $\{x | a < x < b\}$

称为开区间, 记为 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}.$$

a, b 称为开区间的端点. 数集

$$\{x | a \leq x \leq b\}$$

称为闭区间, 记为 $[a, b]$, 即

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}.$$

a, b 称为闭区间的端点. 显然开区间不包括它的两个端点, 而闭区间包括两个端点. 只包括一个端点的区间

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$$

及

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$$

称为半开区间.

一种特殊的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 它也可表示为集合 $\{x | |x - x_0| < \delta\}$, 称为 x_0 的 δ 邻域, 经常记为 $U(x_0, \delta)$. 用符号

$\dot{U}(x_0, \delta)$ 表示满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的集合, 称为点 x_0 的去心邻域. (点 x_0 的 δ 邻域). 设 A, B 为任意两个集合. $A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ 且 } y \in B\}$

二、映射、函数 (与 A, B 中元素的对应关系)
 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \text{ 且 } y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$

(2) 区间与映射
 定义 1 设 A, B 是给定的两个非空集合, 如果有一个规则 f ,
 使对每一个 $x \in A$, 由 f 惟一确定一个 $y \in B$, 那么就说 f 是 A 到 B 的一个映射, 记为

$$f: A \rightarrow B,$$

称 A 为映射 f 的定义域, B 为 f 的值域, y 是 x 在 f 作用下的像, 记作 $y = f(x)$, 表示为:

$$f: x \rightarrow y.$$

注 映射有两个要素: 一是定义域集合 A , 二是规则 f . 映射可用符号描述为: $\forall x \in A$, 按规律 f , $\exists$ 惟一的 $y \in B$, 则称 f 是 A 到 B

的一个映射. 其中符号 $\forall$ 表示“对任意的”或“对给定的”, 符号 $\exists$ 表示“存在”.
 ① 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ② 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ③ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ④ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ⑤ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ⑥ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ⑦ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ⑧ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ⑨ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ⑩ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ⑪ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ⑫ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ⑬ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ⑭ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ⑮ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ⑯ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ⑰ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ⑱ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ⑲ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ⑳ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㉑ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㉒ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㉓ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㉔ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㉕ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㉖ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㉗ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㉘ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㉙ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㉚ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㉛ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㉜ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㉝ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㉞ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㉟ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㊱ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㊲ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㊳ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㊴ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㊵ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㊶ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㊷ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㊸ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㊹ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㊺ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㊻ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㊼ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㊽ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㊾ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.
 ㊿ 设 f 为映射. $x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$. 则 y_0 称为 x_0 的像. x_0 称为 y_0 的原像.

① 定义域 映射 $f: X \rightarrow Y$

② $f: X \rightarrow Y$ 若 $R_f = Y$ 称 f 为从 X 到 Y 上的满射

③ $f: X \rightarrow Y$ 若 $\forall x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$ 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 称 f 为从 X 到 Y 上的单射

④ $f: X \rightarrow Y$ 示“存在”这两个符号以后经常用到
两个映射 $f: A \rightarrow B, g: A_1 \rightarrow B_1$, 当且仅当 $A=A_1$ 且对一切 $x \in A$ 均有 $f(x)=g(x)$ 时, 才称两个映射相等. 这时又有 $B=B_1$.

例1 $A=N, B=N$,

$$g: n \rightarrow 2n, \quad f: n \rightarrow n.$$

例2 $A=Z, B=N$,

$$f: n \rightarrow |n|+1, \quad g: n \rightarrow |n|.$$

上述两个例子中的映射都是不同的映射.

2. 函数

(1) 实例

一物体从距地面高度为 h_0 处自由下落(初速为零, 不计空气阻力), 设物体下落经历时间 t 时, 物体与地面的距离为 h . 显然时间 t 的变化范围是一个集合 $A = [0, \sqrt{\frac{2h_0}{g}}]$, 物体与地面间的距离 h 的变化范围也是一个集合 $B = [0, h_0]$. 由物理学自由落体定律可知, t 与 h 有一个对应规律

$$t \rightarrow h = h_0 - \frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 为重力加速度, 是常量. 由映射的概念知, 自由落体过程中有两个变量的集合 A 和 B , 它们之间存在映射关系, 即

$$f: A \rightarrow B,$$

可表示为

$$f: t \rightarrow h = h_0 - \frac{1}{2}gt^2.$$

注意 这里集合 A 和 B 都是实数集合, 这种实数集到实数集间的映射, 称为函数.

(2) 函数

定义2 设 X, Y 是两个非空的实数集合, 如果对集合 X 中的每一个 x 值, 按照某种规律 f , 集合 Y 中都有惟一确定的值 y 与它

对应. (Df. $f: X \rightarrow Y$)
即 $y = f(x)$.

对应,那么称 y 是 x 的函数,记为

$$f: X \rightarrow Y$$

或

$$y=f(x), \quad x \in X,$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, 自变量 x 的变化集合 X 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域. 当 $x_0 \in X$ 时, 与 x_0 对应的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 记为 $f(x_0)$. 当 x 取遍 X 中的所有数值时, 对应的函数值构成的集合称为函数 $y=f(x)$ 的值域, 记为

$$f(X) = \{y | y=f(x), x \in X\}.$$

注1 函数是映射的特殊情况, 所以对应规律和定义域是两个重要因素, 对应规律与自变量和因变量采用的符号无关, 因而函数

$$y=f(x), \quad x \in X$$

与函数

$$s=f(t), \quad t \in X$$

表示同一个函数. 但是函数 $y=x$ 与 $y=\frac{x^2}{x}$ 不是相同的函数. 在同一问题中不同的函数要用不同的字母表示, 如 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 等.

注2 函数关系可以有不同的表示方法, 但是要表明其定义域和对应规律. 经常采用的方法有三种:

(i) 公式法

用分析表达式表示函数关系的方法称为公式法. 分析表达式是对自变量及某些常数经初等运算及极限运算的表达式, 例如

$$y=\sin x + \lg(1-x^2), \quad y=\sqrt{\frac{4-x^2}{x-1}} + e^x$$

都是用公式法表示的函数.

(ii) 列表法

将自变量的一系列值与对应的函数值排列成表, 这种表示函数的方法称为列表法, 如经常用的平方根表、对数表、三角函数表等.

(iii) 图像法

设函数 $y=f(x)$, $x \in X$, 在直角坐标系中, 自变量的值为横坐

标,对应的函数值 $f(x)$ 为纵坐标,称点集

$$\{(x, y) | y = f(x), x \in X\}$$

为函数 $y = f(x)$ 的图形(图像).

例1 函数

$$y = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x < a \text{ 或 } x > b \end{cases}$$

称为区间 $[a, b]$ 的特征函数,它的定义域 $X = (-\infty, +\infty)$, 值域 $Y = \{0, 1\}$, 图形如图 1-1 所示.

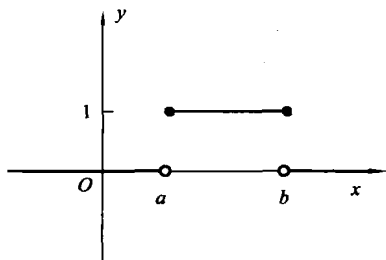


图 1-1

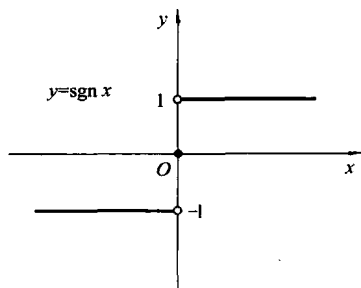


图 1-2

例2 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

称为符号函数,它的定义域 $X = (-\infty, +\infty)$, 值域 $Y = \{1, 0, -1\}$, 图形如图 1-2 所示.

例3 函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

的定义域 $X = (-\infty, +\infty)$, 值域 $Y = [0, +\infty)$, 这个函数称为绝对值函数,它的图形如图 1-3 所示.

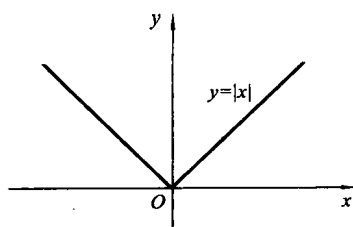


图 1-3

例 4 函数

$$y = [x]$$

表示 $\forall x \in \mathbf{R}$, 它所对应的 y 是不超过 x 的最大整数. 如 $[1.5] = 1$, $[-0.5] = -1$, $[2] = 2$, 称函数 $y = [x]$ 为 x 的最大整数部分, 它的定义域 $X = (-\infty, +\infty)$, 值域 $Y = \mathbf{Z}$. 它的图像呈现阶梯形状, 如图 1-4 所示.

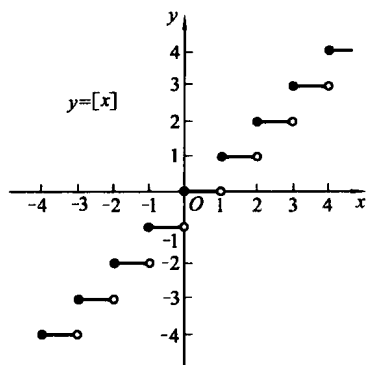


图 1-4

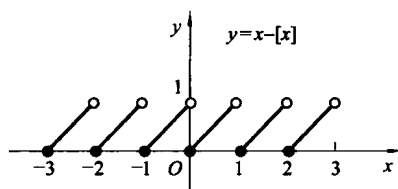


图 1-5

相应地有函数

$$y = x - [x], \quad x \in \mathbf{R},$$

它表示对应的 y 是 x 的小数部分, 记为 $y = \{x\}$. 如

$$\{1.5\} = 0.5, \{2\} = 0, \{-3.1\} = -3.1 - (-4) = 0.9,$$

它的定义域 $X = (-\infty, +\infty)$, 值域 $Y = [0, 1)$, 函数图像呈锯齿形, 如图 1-5 所示.