山东省高校统编教材

高等数学

GAO DENG SHU XUE

上

山东省教育厅 组编

石油大学出版社

中国海洋大学　青岛大学
青岛科技大学　青岛建筑工程学院

高等数学

（上　册）

主编　刘新国

编委　于进伟　田志远　李志敏
陈中慧　赵　凯　郭晓沛
曹圣山　董鹤年　谢树森

石油大学出版社

内容提要

本书结构严谨，逻辑清晰，叙述详细，可供普通高等学校工程类各专业作为教材使用. 本书还为教师留下了使用空间，也为程度较好的读者准备了部分有一定难度的习题，还提供了进一步阅读的线索. 全书内容有一定弹性，因而也可作为其他专业读者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/刘新国主编. —东营：石油大学出版社，2002.3
ISBN 7-5636-1610-1

Ⅰ. 高… Ⅱ. 刘… Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材
Ⅳ. 013

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第012423号

高等数学(上册)

主编 刘新国

出 版 者：石油大学出版社（山东 东营，邮编 257061）
网　　址：http://sunctr.hdpu.edu.cn/～upcpress
电子信箱：upcpress@sunctr.hdpu.edu.cn
印 刷 者：临清市万方印务有限责任公司印刷
发 行 者：石油大学出版社（电话 0546-8392062）
开　　本：850×1168　1/32　印张：11.5625　字数：299千字
版　　次：2003年8月第1版第2次印刷
定　　价：（全套）30.00元（上册14.00元）

前　言

本书是普通高等院校工程类各本科专业高等数学教材．全书分上、下两册出版．上册内容为函数与极限、一元函数微分学和积分学、空间解析几何与矢量代数．下册内容包括多元函数微分学、重积分及其应用、曲线积分与曲面积分、级数、常微分方程、数学模型、数值方法．书末附有二、三阶行列式简介，几种常用曲线，积分表，习题答案或提示，书中主要数学概念中英文对照表．

与国内出版的同类教材相比，本书在编写中作了几方面的尝试．其一是增加了数学模型内容（第十三章），初衷是增加课程的实用性和趣味性，目的是与全国大学生数学建模竞赛相结合．其二是每章都编写了一个简短的说明，目的是为读者提供进一步阅读的线索．第三是把全课程中有关数值计算的内容集中编为一章（第十四章）．由于绝大多数数学问题需要用数值方法求解，对此予以适当介绍和强调有助于体系完整．而对于以《计算方法》为后继课程的专业，这部分内容可以不讲，使全书内容有教学弹性．第四是各章都配置了一些难度较大的习题，供程度好的读者选做．

为了便于读者学习，书后附有全书主要数学概念中英文对照表；列出的参考文献是一条进一步学习的线索，可参阅有关的说明．与习惯的做法一样，书末附有二、三阶行列式简介，积分表，习题答案或提示．

本书编写过程中，省教育厅的有关领导始终给予关心和支持．本书又是多方合作的结果，来自四所院校的十位教师参加了编写

工作：青岛海洋大学刘新国（第二章、第十四章），陈中慧（第一章），谢树森（第七章、第九章），曹圣山（第四章、第十三章），青岛大学田志远（第八章），赵凯（第三章），郭晓沛（第十一章及部分附录），青岛建工学院于进伟（第十章），李志敏（第五章、第六章），青岛科技大学董鹤年（第十二章），最后由刘新国负责全书一体化. 每位编者都得到了各自学校有关领导的关心和支持. 编写过程中参考了大量的教材和文献，在此无法一一列举，借此谨向相关作者致谢. 本书能顺利付梓与石油大学出版社的帮助是分不开的，在此一并致谢.

限于编者的学识和经验，书中定有不当之处，敬请读者指正.

编者

2002年6月

目　　录

第一章　函数、极限与连续性

客观世界是变化的，变量之间最主要的一种关系就是函数关系，它是高等数学研究的主要对象，极限则是研究变量最重要、最基本的方法. 函数的连续性是函数最重要的性质. 本章分为三节，分别介绍了函数、极限和连续性的有关概念、性质和方法，这些内容是全书的基本知识.

第一节　函　　数

一、集合、区间

1. 集合　　具有确定性，互异性

集合是高等数学中的一个基本概念. 所谓集合是指具有某种指定性质的事物的全体. 组成这个集合的事物称为该集合的元素，集合通常用大写字母 $A,B,\cdots$ 表示. 集合的元素常用小写字母 $a,b,\cdots$ 表示. 若事物 a 是集合 M 的元素，则记为 $a\in M$（读作 a 属于 M）；若事物 a 不是集合 M 的元素，则记为 $a \notin M$.

注 1　定义中的某种性质必须是明确的，可以用它判断任意元素是否属于该集合.

注 2　定义中关于性质的描述有多种方法，如列举法、解析法等.

例　$A=\{x\,|\,x^2-5x+6=0\}$；　　$B=\{2,3\}$；

$C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2+1=0\}$.

集合 A,C 是用解析法表示，而集合 B 是采用列举法.　$A=\{a,b,c\cdots\}$

列举法：把集合的元素一一列出

描述法：将集合所具有的性质描述出来　$M=\{x\,|\,x$ 具有的性质$\}$

数集：$N=\{0,1,2\cdots\}$ $Z=\{\cdots-n,\cdots-2,-1,0\cdots\}$

$Q=\{\frac{p}{q}|p\in Z$ 且 $q\in N^{+}$ 且 p,q 互质$\}$ R [?] A^{*} 除0以外的元素构成

A^{+} 除0与负数后的元素构成的集合

$A=B \Leftrightarrow A\subset B$ 且 $B\subset A$

$A\subset B \Leftrightarrow \forall x\in A$ 有 $x\in B$

元素都是数的集合称为数集.经常用到的数集有：

全体自然数构成的集合记为$\mathbf{N}$,全体整数的集合记为$\mathbf{Z}$,全体有理数的集合记为$\mathbf{Q}$,全体实数的集合记为$\mathbf{R}$.

如果集合A的元素都是集合B的元素,即若$a\in A$,则有$a\in B$,这时称A是B的子集,记作$A\subset B$(读作A包含于B),或$B\supset A$(读作B包含A).显然有$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

如果$A\subset B$同时有$B\subset A$,就称集合A与B相等,记作$A=B$,此时集合A与B由相同的元素构成.上例中,$A=B$.

不含任何元素的集合称为空集,记作$\varnothing$.上例中的集合C在实数范围内是空集,即$C=\varnothing$.一切既属于集合A,又属于集合B的元素组成的集合,称为集合A、B的交集,记为$A\cap B$.一切属于集合A或属于集合B的元素组成的集合,称为集合A、B的并集,记为$A\cup B$.即

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$ 则称 A 为 B 的真子集 $A\subsetneq B$

$\varnothing$：不含任何元素的集合

$A=\{x|x\in R, x^{2}+1=0\}=\varnothing$

规定 $\varnothing$ 为任何集合的子集

$$A\cap B=\{x|x\in A\text{ 且 }x\in B\},$$

$$A\cup B=\{x|x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

设集合A是U的子集,U中一切不属于A的元素组成的集合,称为集合A在U中的余集,记为$C_{u}A$.即

$$C_{u}A=\{x|x\in U\text{ 且 }x\overline{\in}A\}.$$

可以证明集合上的$\cup$,$\cap$和余集三种运算有以下规律：

(1) $A\cap A=A,A\cup A=A$ (幂等律)；

(2) $A\cap B=B\cap A,A\cup B=B\cup A$ (交换律)；

(3) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$,

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ (结合律)；

(4) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (分配律)；

(5) $C_{u}(C_{u}A)=A,A\cap C_{u}A=\varnothing,A\cup C_{u}A=U$；

(6) $C_{u}(A\cap B)=C_{u}A\cup C_{u}B,C_{u}(A\cup B)=C_{u}A\cap C_{u}B$.

2. 区间、邻域

设a和b都是实数,且$a<b$,数集

集合的运算 并交补 1. $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$

2. $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$

3. $A\setminus B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 称为A与B的差集

4. $A^c=C_I A=\{x|x\in I$ 且 $x\notin A\}$

5. ① $A\cap A=A$, $A\cup A=A$. ② $A\cup B=B\cup A$

$$\{x|a<x<b\}$$

称为开区间,记为(a,b),即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$

a、b 称为开区间的端点.数集

$$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为闭区间,记为$[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}.$$

a、b 称为闭区间的端点.显然开区间不包括它的两个端点,而闭区间包括两个端点.只包括一个端点的区间

$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$$

及

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$$

称为半开区间.

一种特殊的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$,它也可表示为集合$\{x||x-x_0|<\delta\}$,称为 x_0 的 δ 邻域,经常记为$U(x_0,\delta)$.用符号$\mathring{U}(x_0,\delta)$表示满足不等式$0<|x-x_0|<\delta$的集合,称为点x_0的去心δ邻域.

直积(笛卡尔积). 设A,B为任意两集合, $A\times B=\{(x,y)|x\in A$ 且 $y\in B\}$ 称为A与B的直积

二、映射、函数

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)|x\in\mathbb{R}$ 且 $y\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^2$

(三) 区间与邻域

设a,b为实数,且$a<b$. $[a,b]=\{x|a\leq x\leq$ … $(a,b)=\{x|a<x<$ …

1. 映射

定义1 设A,B是给定的两个非空集合,如果有一个规则f,使对每一个$x\in A$,由f惟一确定一个$y\in B$,那么就说f是A到B的一个映射,记为

$$f: A\to B,$$

称A为映射f的定义域,B为f的值域,y是x在f作用下的像,记作$y=f(x)$,表示为:

$$f: x\to y.$$

注 映射有两个要素:一是定义域集合A,二是规则f.映射可用符号描述为:$\forall x\in A$,按规律f,$\exists$惟一的$y\in B$,则称f是A到B的一个映射.其中符号$\forall$表示"对任意的"或"对给定的",符号$\exists$表

① 设δ为一正数,则$(x_0-\delta,x_0+\delta)$为数集$\{x||x-x_0|<\delta\}$,称为点x_0的δ邻域,记为$U(x_0,\delta)$

$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x||x-x_0|<\delta$ 且 $x\neq x_0\}$ 称为x_0的去心邻域.

Df 定义域　映射 f: X→Y

① f: X→Y, 若 Rf=Y, 称 f 为从 X 到 Y 上的满射

② f: X→Y 若 ∀x1, x2 ∈ X 且 x1≠x2, 有 f(x1)≠f(x2) 称 f 为从 X 到 Y 上的单射

③ f: X→Y f 既是满射, 又是单射, 则称 f 为一一映射.

示“存在”.这两个符号以后经常用到.

两个映射 $f: A \to B$, $g: A_1 \to B_1$, 当且仅当 $A = A_1$ 且对一切 $x \in A$ 均有 $f(x) = g(x)$ 时,才称两个映射相等. 这时又有 $B = B_1$.

例 1　$A = \mathbf{N}, B = \mathbf{N}$,

$g: n \to 2n$,　$f: n \to n$.

例 2　$A = \mathbf{Z}, B = \mathbf{N}$,

$f: n \to |n| + 1$,　$g: n \to |n|$.

上述两个例子中的映射都是不同的映射.

2. **函数**

(1) 实例

一物体从距地面高度为 h_0 处自由下落(初速为零,不计空气阻力),设物体下落经历时间 t 时,物体与地面的距离为 h. 显然时间 t 的变化范围是一个集合 $A = \left[0, \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\right]$, 物体与地面间的距离 h 的变化范围也是一个集合 $B = [0, h_0]$. 由物理学自由落体定律可知, t 与 h 有一个对应规律

$$t \to h = h_0 - \frac{1}{2} g t^2,$$

其中 g 为重力加速度,是常量. 由映射的概念知,自由落体过程中有两个变量的集合 A 和 B,它们之间存在映射关系,即

$$f: A \to B,$$

可表示为

$$f: t \to h = h_0 - \frac{1}{2} g t^2.$$

注意　这里集合 A 和 B 都是实数集合,这种实数集合到实数集合间的映射,称为函数.

(2) 函数

定义 2　设 X、Y 是两个非空的实数集合,如果对集合 X 中的每一个 x 值,按照某种规律 f,集合 Y 中都有惟一确定的值 y 与它

函数 (Df, Rf ⊂ R)

记 y=f(x).

对应，那么称y是x的函数，记为

$$f: X \to Y$$

或

$$y=f(x), \quad x \in X,$$

其中x称为自变量，y称为因变量，自变量x的变化集合X称为函数$y=f(x)$的定义域. 当$x_0 \in X$时，与x_0对应的数值称为函数$y=f(x)$在点x_0处的函数值，记为$f(x_0)$. 当x取遍X中的所有数值时，对应的函数值构成的集合称为函数$y=f(x)$的值域，记为

$$f(X)=\{y \mid y=f(x), x \in X\}.$$

注1 函数是映射的特殊情况，所以对应规律和定义域是两个重要因素，对应规律与自变量和因变量采用的符号无关，因而函数

$$y=f(x), \quad x \in X$$

与函数

$$s=f(t), \quad t \in X$$

表示同一个函数. 但是函数$y=x$与$y=\frac{x^2}{x}$不是相同的函数. 在同一问题中不同的函数要用不同的字母表示，如$y=f(x)$，$y=g(x)$等.

注2 函数关系可以有不同的表示方法，但是要表明其定义域和对应规律. 经常采用的方法有三种：

(i) 公式法

用分析表达式表示函数关系的方法称为公式法. 分析表达式是对自变量及某些常数经初等运算及极限运算的表达式，例如

$$y=\sin x+\lg(1-x^2), \quad y=\sqrt{\frac{4-x^2}{x-1}}+\mathrm{e}^x$$

都是用公式法表示的函数.

(ii) 列表法

将自变量的一系列值与对应的函数值排列成表，这种表示函数的方法称为列表法，如经常用的平方根表、对数表、三角函数表等.

(iii) 图像法

设函数$y=f(x)$，$x \in X$，在直角坐标系中，自变量的值为横坐

标，对应的函数值 $f(x)$ 为纵坐标，称点集

$$\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in X\}$$

为函数 $y=f(x)$ 的图形(图像).

例1 函数

$$y=\begin{cases}1, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & x<a \text{ 或 } x>b\end{cases}$$

称为区间 $[a,b]$ 的特征函数，它的定义域 $X=(-\infty,+\infty)$，值域 $Y=\{0,1\}$，图形如图 1-1 所示.

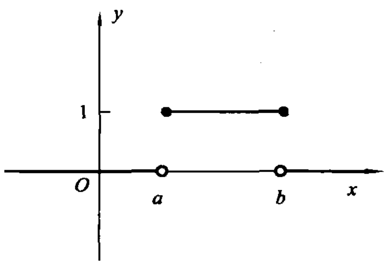

图 1-1

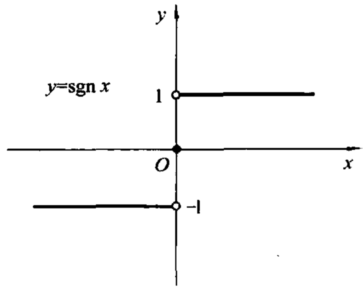

图 1-2

例2 函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域 $X=(-\infty,+\infty)$，值域 $Y=\{1,0,-1\}$，图形如图 1-2 所示.

例3 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $X=(-\infty,+\infty)$，值域 $Y=[0,+\infty)$，这个函数称为绝对值函数，它的图形如图 1-3 所示.

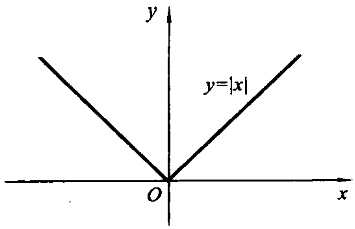

图 1-3

例 4 函数

$$y=[x]$$

表示$\forall x\in\mathbf{R}$,它所对应的 y 是不超过 x 的最大整数. 如$[1.5]=1$, $[-0.5]=-1$,$[2]=2$,称函数 $y=[x]$为 x 的最大整数部分,它的定义域$X=(-\infty,+\infty)$,值域$Y=\mathbf{Z}$. 它的图像呈现阶梯形状,如图 1-4 所示.

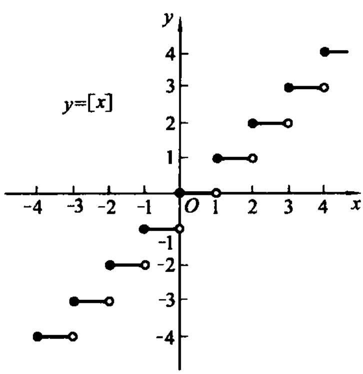

图 1-4

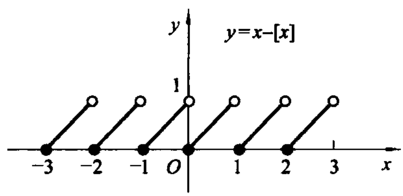

图 1-5

相应地有函数

$$y=x-[x],\quad x\in\mathbf{R},$$

它表示对应的 y 是 x 的小数部分,记为 $y=\{x\}$. 如

$$\{1.5\}=0.5,\{2\}=0,\{-3.1\}=-3.1-(-4)=0.9,$$

它的定义域$X=(-\infty,+\infty)$,值域$Y=[0,1)$,函数图像呈锯齿形,如图 1-5 所示.