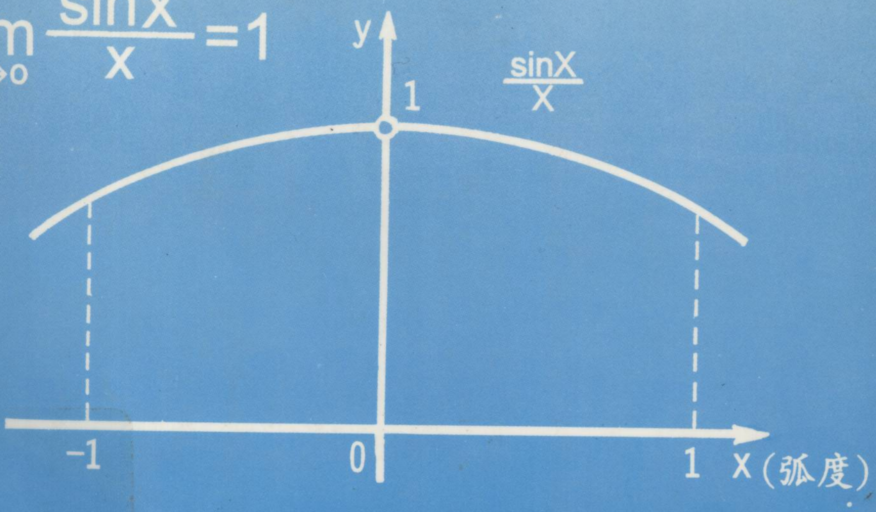
大学预科教材丛书

数学

暨南大学华文学院预科部数学教研室编

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$



暨南大学出版社

大学预科教材丛书

数　　学

暨南大学华文学院预科部数学教研室编

暨南大学出版社

图书在版书目(CIP)数据

数学/暨南大学华文学院预科部数学教研室编·广州:暨南大学出版社,1996.8

ISBN7-81029-385-O

Ⅰ.数…
Ⅱ.暨…
Ⅲ.数学
Ⅳ.O1

暨南大学出版社出版
广东省农垦总局印刷厂印刷
新华书店发行
开本:850×1168 1/32 印张:14.75 字数:37万字
1996年8月第1版 1996年8月第1次印刷
印数:1-1000册
定价:25.00元

说　明

根据大学预科数学教学要求，经多年的探索与实践，我们编写了这套数学教材，旨在复习巩固中学的数学基础知识，同时考虑本科需要，适当增加一点微积分，为学生升入本科学习高等数学打下一定的基础，体现预料在教学上与本科接轨的特点.

本书分上、下两篇.上篇共分为五章，都是中学的重要基础知识，以单元复习的形式编写，并配置了一定数量的例题和相应的习题.下篇分为六章，内容除中学数学的选学内容外，还有微积分初步.在编写过程中，参考了六年制重点中学高中数学课本“代数”第二、三册和“微积分初步”的有关章节，对例题作适当的补充，并配置一定数量的习题.

参加上篇编写的有黎丽霞（第一章），吴惠民，岑文（第二章），张卓（第三、四章），蒋雪珍（第五章）；参加下篇编写的有黎丽霞（第一、二、三章），陈柳群（四、五、六章）.全书由王全林教授、林民辉副教授审稿，并得到学校学院及预科部有关部门领导的鼓励和支持，在此一并表示深切的谢意.

由于水平有限，缺点与错误在所难免，尚祈专家和读者加以指正.

暨南大学预科部数学教研室

1996.4.23

目　　录

上　　篇

下　篇

第一章　函　数

一、集合与映射

1. 集合的有关概念

(1) 集合　把一些确定的对象看成一个整体就形成了一个集合.一般用大写字母 A、B、C… 表示集合.

(2) 元素　集合里的各个对象叫做集合的元素.一般用小写字母 a、b、c… 表示集合里的元素.

(3) 元素与集合的关系　如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A,记作 $a \overline{\in} A$(或者 $a \notin A$).

2. 集合的特征

(1) 确定性　对于任何一个对象,都能够确定它是不是某一给定集合的元素.

(2) 元素互异性　对一个给定集合中所含的任何两个元素都是不同的对象.即集合里的元素没有重复现象.

(3) 元素无序性　对于一个集合,通常不考虑它的元素之间的顺序.两个集合只要它们所含的元素完全相同,就是同一个集合.

3. 集合的种类

(1) 有限集　含有有限个元素的集合叫做有限集.

(2) 无限集　含有无限个元素的集合叫做无限集.

(3) 单无素集　只含有一个元素的集合叫做单元素集.

(4) 空集　不含任何元素的集合叫做空集,空集用 ϕ 表示.

(5) 数集　元素为数的集合叫做数集.常用的数集有:

自然数集,记作 N;

整数集,记作 Z;

有理数集,记作 Q;

实数集,记作 R;

复数集,记作 C,等等.

4. 集合的表示法

(1) 列举法　把集合里的元素一一列举出来写在大括号内,这种表示集合的方法,叫做列举法.

(2) 描述法　把集合中元素的公共属性写在大括号内,这种表示集合的方法,叫做描述法.

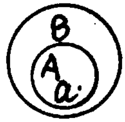
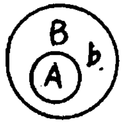
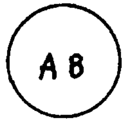
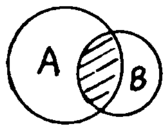
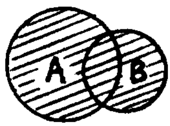
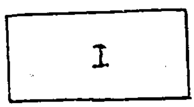
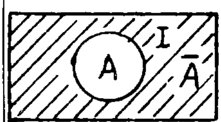
(3) 图示法　把集合中的所有元素用一条封闭曲线圈起来,这种表示集合的方法,叫做图示法.

5. 集合与集合的关系

集合间的关系如下页表:(A、B 表示集合)

6. 映射

给定两个集合 A、B,如果按照某种对应法则 f,对于集合 A 中任何一个元素,在集合 B 中都有唯一的元素和它对应,这样的对应(包括集合 A、B 及对应法则 f) 叫做从集合 A 到集合 B 的映

名　　称	记　　号	定　　义	图　　示
子　　集	$A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$	若 $a \in A$，则 $a \in B$，那么集合 A 叫做集合 B 的子集	
真子集	$A \subset B$ 或 $B \supset A$	若 $A \subseteq B$，且存在 $b \in B$，而 $b \notin A$，集合 A 叫做集合 B 的真子集.	
相　　等	$A = B$	若 $A \subseteq B$，且 $B \subseteq A$，那么集合 A 和 B 叫做相等.	
交　　集	$A \cap B$	同属于集合 A 和集合 B 的一切元素所组成的集合，叫做集合 A 和集合 B 的交集	
并　　集	$A \cup B$	属于集合 A 或属于集合 B 的一切元素所组成的集合，叫做集合 A 和集合 B 的并集	
全　　集	I	在研究某些集合之间的关系时，这些集合常是某一给定集合的子集，这个给定集合叫做全集.	
补　　集	$\overline{A}$	若 $A \subseteq I$，由集合 I 中所有不属于集合 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 的补集.	

射，记作 $f: A \longrightarrow B$.

如果给定一个从集合 A 到集合 B 的映射，那么，和 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的象，a 叫做 b 的原象.

【例 1】

用列举法表示下列集合：(1) {不大于 5 的自然数}；

(2) $\{x \mid x^2 - 2x - 8 < 0, x \in Z\}$；

(3) $\{(x, y \mid x + 2y = 7, x, y \in N\}$.

【解】

(1) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$；

(2) $\{x \mid -2 < x < 4, x \in Z\} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$；

(3) $\{(1,3), (3,2), (5,1)\}$.

【例 2】

用描述法表示下列集合：

(1) 所有的 10 的整数次幂；(2) $\{1, -3, 5, -7, 9, -11, \cdots\}$.

【解】

(1) $\{x \mid x = 10^n, n \in Z\}$；

(2) $\{x \mid x = (-1)^{n+1}(2n-1), n \in N\}$；

【例 3】

用适当的符号填空：

(1) O ____ ϕ；　(2) O ____ $\{O\}$；　(3) ϕ ____ $\{O\}$；

(4) a ____ $\{a\}$；　(5) ϕ ____ $\{a, b\}$；　(6) $Z \cup N$ ____ N；

(7) $Q \cup Z$ ____ R；　(8) $Q \cap Z$ ____ N；

(9) $A \cup B$ ____ B；

【解】

(1) $\overline{\in}$；　(2) $\in$；　(3) $\subset$；

(4) $\in$；　(5) $\subset$；　(6) $\supset$；

(7) $\subset$；　(8) $\supset$；　(9) $\supset$.

【例 4】

写出$\{0,1\}$的所有子集及真子集.

【解】

$\{0,1\}$的所有子集是ϕ, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0,1\}$;真子集是ϕ, $\{0\}$, $\{1\}$.

【例 5】

已知$I = R, A = \{x \mid x^2 + 3x + 2 \geqslant 0\}$,求$\overline{A}$.

【解】

$A = \{x \mid x^2 + 3x + 2 \geqslant 0\}$

$\quad = \{x \mid x \leqslant -2\} \cup \{x \mid x \geqslant -1\}$,

$\therefore \overline{A} = \{x \mid -2 < x < -1\}$.

【例 6】

设$I = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, A = \{3,4,5\}, B = \{4,7,8\}$,求$\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$.

【解】

$\overline{A} = \{1,2,6,7,8\}$, $\overline{B} = \{1,2,3,5,6\}$,

$\overline{A} \cap \overline{B} = \{1,2,6\}$, $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1,2,3,5,6,7,8\}$.

【例 7】

设$A = \{1,2,3\cdots\}, B = \{\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \cdots\}$, f是从A到B的映射,对应法则$f: x \longrightarrow y = \frac{2x-1}{2x+1}$.求(1)$A$的元素3的象;(2)$B$的元素$\frac{15}{17}$的原象.

【解】

(1)$\because$ A中的元素$x = 3$;

$\therefore$ $y = \frac{2x-1}{2x+1} = \frac{2\times 3-1}{2\times 3+1} = \frac{5}{7}$;

即 A中的元素3的象是$\frac{5}{7}$

(2)$\because$ $y = \frac{15}{17}$,即 $\frac{2x-1}{2x+1} = \frac{15}{17}$

解得 $\qquad x = 8.$

所以 B 的元素$\frac{15}{17}$的原象是 8.

【例 8】

设二次方程 $x^2 - px + 15 = 0$ 的解集为 A，方程 $x^2 - 5x + q = 0$ 的解集为 B，当 $A \cup B = \{2,3,5\}$，$A \cap B = \{3\}$ 时，求集合 A 和 B 以及 P 与 q 的值.

【解】

由 $A \cap B = \{3\}$ 可知 3 是两个方程的公共根，所以

$$\begin{cases} 3^2 - 3P + 15 = 0 \\ 3^2 - 5 \times 3 + q = 0 \end{cases}$$

得 $$\begin{cases} P = 8 \\ q = 6 \end{cases}.$$

解方程 $\quad x^2 - 8x + 15 = 0$，得 $\quad x_1 = 3,\quad x_2 = 5$

$x^2 - 5x + 6 = 0$，得 $x_1 = 3,\quad x_2 = 2.$

$\therefore A = \{3,5\},\quad B = \{3,2\}.$

二、函数的概念与性质

1. 函数的定义

设在某变化过程中有两上变量 x 和 y，如果对于 x 在某个范围内的每一个确定的值，按照某个对应法则，y 都有唯一确定的值和它对应，那么 y 叫做 x 的函数. 用符号 $y = f(x)$ 表示，这里 x 叫做自变量，y 叫做因变量. 自变量 x 的取值范围叫做函数的定义域，和 x 的值对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合叫做函数的值域.

从映射的观点看，函数 $y = f(x)$ 实际上是从 x 取值的集合

(定义域)到 y 取值的集合(值域)上的映射.它有三个要素:定义域,对应法则,值域.

2. 函数的表示法

(1) 解析法　用等式表示两个变量间的函数关系的方法.

(2) 列表法　列表表示两个变量间的函数关系的方法.

(3) 图象法　用图象表示两个变量间的函数关系的方法.

3. 函数的性质

(1) 单调性　对于给定区间上的函数 $f(x)$:如果对于属于这个区间的自变量的任意两个值 x_1, x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,都有 $f(x_1) < f(x_2)$,那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是增函数;如果对于属于这个区间的自变量任意两个值 $x_1 < x_2$ 时,都有 $f(x_1) > f(x_2)$,那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是减函数。

如果函数 $y = f(x)$ 在某个区间上是增函数或者在此区间上是减函数,就说 $f(x)$ 在此区间上具有单调性,此区间叫做 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 奇偶性　如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x, $-x$ 也在定义域内,且有 $f(-x) = -f(x)$,那么 $f(x)$ 是奇函数.如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x, $-x$ 也在定义域内,且有 $f(-x) = f(x)$,那么 $f(x)$ 是偶函数.

奇函数的图象关于原点对称;偶函数的图象关于 y 轴对称.

(3) 极值与最值　如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的附近有意义,并且 $f(x_0)$ 的值比在 x_0 附近所有各点的函数值都大(或都小),则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值(或极小值).极大值与极小值统称为极值.

如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的函数值 $f(x_0)$ 比定义域内其他所有各点的函数都大(或都小),则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的最大

值(或最小值),最大值与最小值统称为最值.

4. 反函数

如果对于函数 $y=f(x)$ 值域中每一个 y 值,都唯一确定一个 x 值,其对应法则记为 f^{-1},则称函数 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数,习惯上记作 $y=f^{-1}(x)$.

如果 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数,其图象关于直线 $y=x$ 对称,此时函数 $y=f(x)$ 的定义域正好是它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域;函数 $y=f(x)$ 的值域,正好是它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域.因此,求函数 $y=f(x)$ 的反函数,可以先把函数式 $y=f(x)$ 看作以 x 为未知数的方程,从中解出 $x=f^{-1}(y)$,再改写为 $y=f^{-1}(x)$.

【例 9】

求下列函数的定义域:

(1) $y=(1+x)^0-\dfrac{\sqrt{1+x}}{x}$;　　(2) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{|x+1|-2}$;

(3) $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$;　　(4) $y=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$.

【解】

(1) 要使函数有意义,必须

$$\begin{cases}1+x\neq 0,\\ 1+x\geqslant 0,\\ x\neq 0,\end{cases}\qquad x>-1 \text{ 且 } x\neq 0,$$

$\therefore$　函数的定域是:$(-1,0)\cup(0,1+\infty)$.

(2) 要使函数有意义,必须

$$\begin{cases}x^2-3x-4\geqslant 0,\\ |x+1|-2\neq 0.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x \leqslant -1 \text{ 或 } x \geqslant 4, \\ x \neq 1, x \neq -3. \end{cases}$

∴ 函数的定义域是$(-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup (4, +\infty)$.

(3) 要使函数有意义,必须

$$\begin{cases} 4 - x^2 \geqslant 0, \\ x - 1 \neq 0. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ x \neq 1. \end{cases}$

∴ 函数的定义域是:$[-2,1) \cup (1,2]$.

(4) 为使分母不为零,则

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 1 + \dfrac{1}{x} \neq 0, \\ 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}} \neq 0. \end{cases}$$

即$\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -1, x \neq 0, \\ x \neq -\dfrac{1}{2}, x \neq -1, x \neq 0. \end{cases}$

∴ 函数的定义域是:$\{x \mid x \in R \text{ 且 } x \neq -1, -\dfrac{1}{2}, 0\}$.

【例 10】

求下列函数的值域:

(1)$y = \sqrt{49 - x^2}$;　　(2)$y = \dfrac{3x - 2}{x - 1}$.

【解】

(1)∵　$0 \leqslant 49 - x^2 \leqslant 49$

∴　$-7 \leqslant x \leqslant 7$

则　$0 \leqslant y \leqslant 7$

$\therefore$　函数的值域是:$[0,7]$

(2) 因为 $y=\dfrac{3x-2}{x-1}$ 的反函数 $y=\dfrac{x-2}{x-3}$,反函数 $y=\dfrac{x-2}{x-3}$ 的定义域即是原函数 $y=\dfrac{3x-2}{x-1}$ 的值域,而函数 $y=\dfrac{x-2}{x-3}$ 的定义域是:$\{x \in R$, 且 $x \neq 3\}$

$\therefore$　函数 $y=\dfrac{3x-2}{x-1}$ 的值域是:$\{y \mid y \in R$ 且 $y \neq 3\}$

【例 11】

【证明】

(1) 函数 $f(x)=3x+2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数;

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

【证明】

(1) 设 x_1, x_2 是任意两个实数,且 $x_1<x_2$,则

$f(x_1)=3x_1+2, f(x_2)=3x_2+2$

$$
\begin{aligned}
f(x_2)-f(x_1) &= (3x_2+2)-(3x_1+2) \\
&= 3(x_2-x_1)
\end{aligned}
$$

$\because$　$x_2>x_1$,　$\therefore$　$x_2-x_1>0$

$\therefore$　$f(x_2)-f(x_1)>0$

即 $f(x_2)>f(x_1)$.

所以函数 $f(x)=3x+2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数.

(2) 设 $x_1>0, x_2>0$ 且 $x_1<x_2$,则

$f(x_1)=\dfrac{1}{x_1}$,　$f(x_2)=\dfrac{1}{x_2}$,

$f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{x_1-x_2}{x_1x_2}$

由 $x_1>0, x_2>0$,得 $x_1x_2>0$,