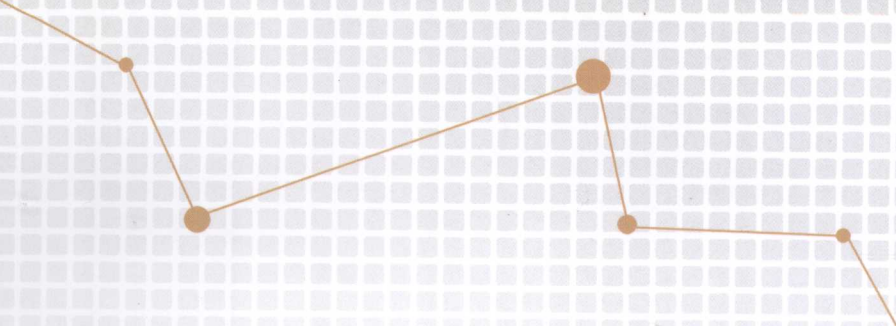
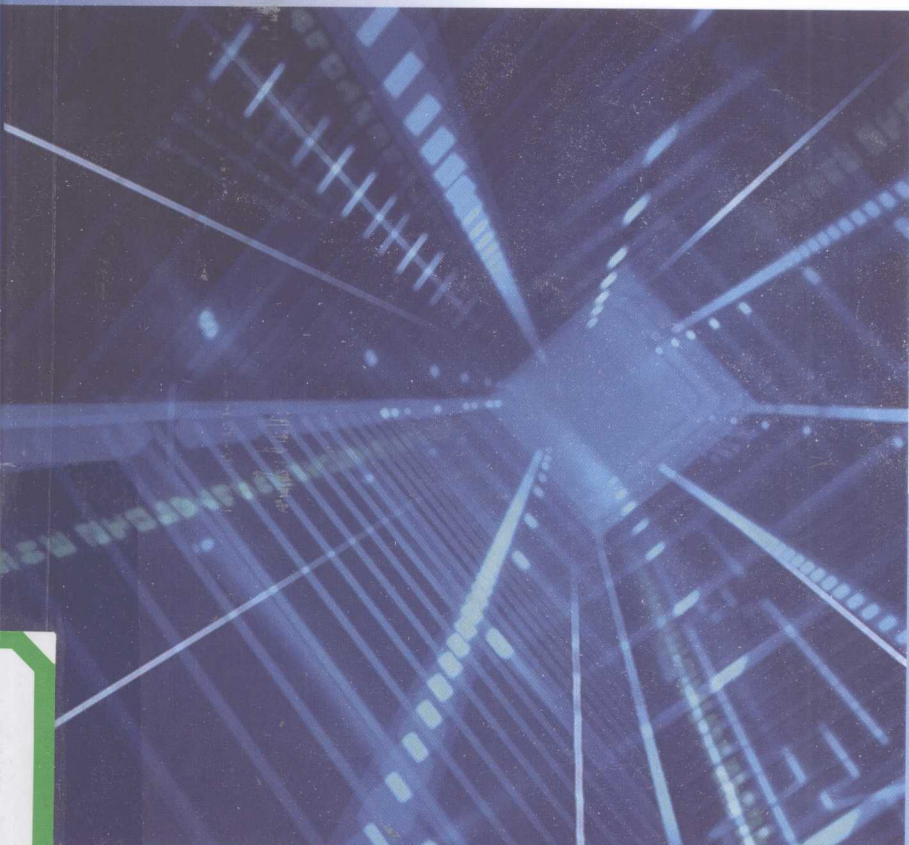




脉冲切换系统

最优控制理论及应用

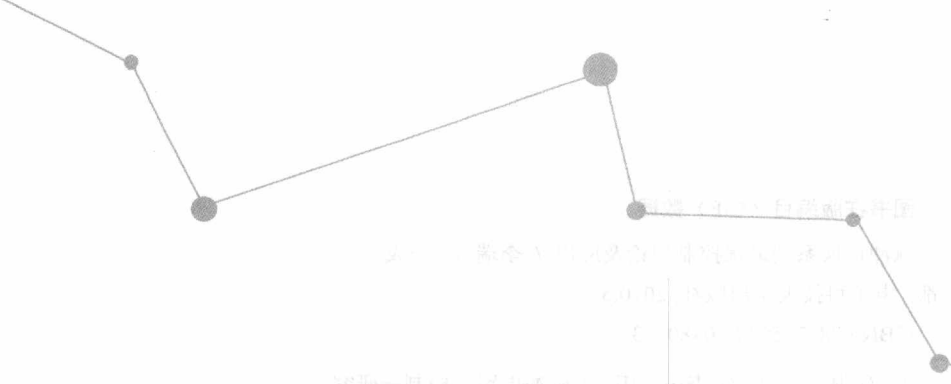
李 瑞 / 著



Optimal
Control Theory and
Application of Impulsive and Switched System



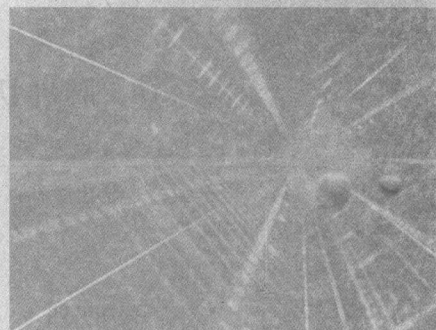
电子科技大学出版社



脉冲切换系统 最优控制理论及应用

李 瑞 / 著

Optimal
Control Theory and
Application of Impulsive and Switched System



电子科技大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

脉冲切换系统最优控制理论及应用 / 李瑞著. — 成

都: 电子科技大学出版社, 2010.5

ISBN 978-7-5647-0480-3

I. ①脉… II. ①李… III. ①脉冲电路—控制—研究

IV. ①TN78

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 065484 号

脉冲切换系统最优控制理论及应用

李 瑞 著

出 版: 电子科技大学出版社 (成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦 邮编: 610051)

策划编辑: 万晓桐

责任编辑: 万晓桐

主 页: www.uestcp.com.cn

电子邮件: uestcp@uestcp.com.cn

发 行: 新华书店经销

印 刷: 成都金龙印务有限责任公司

成品尺寸: 185mm×260mm 印张 9.25 字数 222 千字

版 次: 2010 年 5 月第一版

印 次: 2010 年 5 月第一次印刷

书 号: ISBN 978-7-5647-0480-3

定 价: 36.00 元

■ 版权所有 侵权必究 ■

◆ 本社发行部电话: 028-83202463; 本社邮购电话: 028-83208003。

◆ 本书如有缺页、破损、装订错误, 请寄回印刷厂调换。

前 言

20 世纪 60 年代初, 由于空间技术的迅猛发展和计算机的广泛应用, 动态系统的优化理论得到了迅速发展, 形成了最优控制这一重要的学科分支, 并在控制工程、经济管理与决策以及人口控制等领域得到了成功的应用, 取得了显著的成效。最优控制在被控对象参数已知的情况下, 已经成为设计复杂系统的有效方法之一。然而, 对于实际的最优控制问题, 由于其复杂性, 很难得出解析解, 寻求数值解就十分必要了。

本书针对切换系统与脉冲系统的最优控制问题, 系统地介绍了基于梯度的数值解法。由于切换系统与脉冲系统在理论和工程方面均有广泛的应用, 因而近几十年来备受广大研究者的关注, 其最优控制问题普遍存在于航空航天、工业过程控制中。

控制函数参数化方法是本书中各种算法的基础。利用控制函数参数化方法, 可以将最优控制问题转化为优化问题, 利用各种成熟的优化技术来求解。这种方法在实际工程问题中得到了广泛的应用, 它的算法易于理解而且容易编程实现。此外, 值得一提的是, 基于控制函数参数化方法的软件包 MISER 已被成功的开发出来, 简化了求解最优控制问题的难度。

对于切换系统与脉冲系统的最优控制问题, 由于切换时间点是待优化的参数, 使得基于梯度的算法无法直接应用。借助于时间缩放转换方法, 通过引入一个额外的参数, 可以将系统中变化的切换时间转化为固定的切换时间点, 从而易推导出目标函数和约束函数的梯度公式。这种转换方法, 是由 Prof. Kok Lay Teo 和他的合作者研究得到的, 其在本书各类最优控制问题的求解过程中, 发挥了重要的作用。

为了易于读者理解, 在第二章中, 作者介绍了最优控制数值解法中涉及的一些数学基础知识。但是, 最优控制涉及的数学内容十分丰富, 由于篇幅所限, 无法一一列举。为了保持本书内容的完整性, 作者在第三章和第四章中, 分别介绍了最优控制中的一些基本问题和最优控制的数值解法。无论是关于最优控制理论还是其数值解法, 其内容之丰富是众所周知的, 然而, 本书的主要目的是将近几年来, 作者在脉冲切换系统最优控制问题数值解法方面的点滴收获展示给读者, 一方面, 希望其成为在该领域有兴趣读者的参考资料, 另一方面, 希望本书能带动更多的读者, 改进和完善现有的一些结果。

在第五章中, 作者介绍了最优参数选择问题及其解法, 它是求解本书后续章节中各类最优控制问题的基础。具体地说, 通过控制函数参数化方法, 最优控制问题即转化为最优参数选择问题。第五章的内容主要取自 Prof. Kok Lay Teo 的专著 *A Unified Computational Approach To Optimal Control Problems*。

从第六章到第九章, 作者分别介绍了脉冲系统、切换系统、时滞切换系统的最优控制问题, 以及线性切换系统的跟踪问题。构建了基于梯度的计算方法, 这些方法基于严格的数学推导与分析, 并给出了数值算例, 使所给出的方法易于理解。

本书侧重于理论方面的研究结果, 但所得到的理论结果在工业控制及航空航天领域有着广泛的应用前景。在最后一章中, 作者以超声速飞行器的时间燃料最优控制问题为例, 系统

地讨论了如何利用本书所介绍的方法，解决工程中的实际问题。

本书包含了作者近年来的一些工作，如第五章的部分内容，第六章、第七章、第八章、第九章及第十章的内容。值得一提的是，作者在这些方面的工作与 Prof. Kok Lay Teo 的悉心指导是分不开的。在本书的写作过程中，许多内容得益于谢学书教授的著作及 Prof. Kok Lay Teo 的著作，这些著作作为本书的一些基础内容提供了部分素材。

由于作者水平有限，书中错误和不当之处在所难免。在此，作者诚挚的欢迎读者和同行提出批评指正意见。

目 录

第一章 绪论	1
1.1 最优控制问题简介	1
1.2 脉冲切换系统理论概述	4
1.3 最优控制问题中常用的数值计算方法	8
第二章 数学基础	10
2.1 向量与矩阵的范数	10
一、向量范数	10
二、矩阵范数	11
三、向量序列和矩阵序列的极限	11
2.2 导数与微分	13
一、函数向量和函数矩阵对数量变量 t 的导数	13
二、对向量变量的导数	14
三、对矩阵变量的导数	16
四、复合函数的导数	17
五、一些例子	18
2.3 函数的极值问题	19
一、一元函数的极值问题	19
二、二元函数 $f(x_1, x_2)$ 的极值问题	20
三、多元函数极值问题	21
四、有约束条件的函数极值问题	23
第三章 最优控制中的基本问题	25
3.1 泛函与变分	25
一、定义与公式	25
二、无条件泛函极值	27
3.2 利用变分法求解最优控制问题	29
一、末时刻固定末状态自由问题	29
二、各种末端情况下的最优控制问题	31
三、变分法求解最优控制问题举例	31
3.3 极大值原理简介	33
3.4 时间最优控制	35
3.5 线性二次型理论	39

一、线性二次型有限时间状态调节器	39
二、二次型性能指标的最优跟踪问题	41
第四章 最优控制的计算方法	43
4.1 梯度法	43
4.2 共轭梯度法	46
一、求函数极值的共轭梯度法	46
二、用共轭梯度法解最优控制问题	47
4.3 边界迭代法	50
4.4 拟线性化法	53
第五章 规范型最优控制问题	55
5.1 最优参数选择问题	55
5.2 最优参数选择问题的求解方法	56
5.3 规范形最优控制问题	58
5.4 基于控制参数化方法的求解过程	58
收敛性分析	59
5.5 时间缩放转化方法	60
5.6 数值算例	63
第六章 最优脉冲控制问题	66
6.1 自治脉冲系统的最优控制问题	66
6.2 最优脉冲控制问题的求解过程	67
6.3 脉冲系统的最优控制问题的描述	71
6.4 脉冲系统最优控制问题的求解过程	73
6.5 数值算例	76
第七章 切换系统的最优控制问题	82
7.1 切换系统最优控制问题的描述	82
7.2 切换系统最优控制问题的求解方法	83
7.3 近似问题的收缩性	86
7.4 计算进程	89
7.5 数值算例	93
第八章 时滞切换系统的最优控制问题	97
8.1 一般时滞系统的最优参数选择问题	97
8.2 时滞切换系统的最优控制问题描述	100
8.3 时滞切换系统最优控制问题的求解过程	100
8.4 数值算例	103

第九章 线性切换系统的跟踪问题	104
9.1 线性切换系统的跟踪问题的描述	104
9.2 一个线性跟踪问题	105
9.3 含有终值条件的最优参数选择问题	109
9.4 离散值优化问题	113
9.5 数值算例	114
第十章 巡航导弹的时间-燃料 最优控制问题	118
10.1 传统的变结构控制律设计	118
一、大空域巡航导弹飞控系统所面临的问题	118
二、传统的滑模变结构控制方法	119
三、执行机构饱和问题	121
10.2 改进的滑模变结构控制律设计	122
10.3 时间-燃料最优控制问题	123
10.4 求解过程	125
10.5 仿真结果	127
参考文献	130

第一章 绪 论

1.1 最优控制问题简介

在生产过程、军事行动、经济活动以及人类的其他有目的的活动中，常需要对被控系统或被控过程施加某种控制作用以使某个性能指标达到最优，这种控制作用称为最优控制。下面举几个易于说明问题的例子。

【例 1.1】火车快速运行问题。设有一列火车从甲地出发，要求算出容许的控制使其到达乙地的时间最短。

火车的运动方程为

$$m\ddot{x} = u(t)$$

其中， m 是火车的质量， $\ddot{x}$ 是火车的加速度。

为使旅客舒适，加速度的值应该有限制。 $u(t)$ 是产生加速度的控制作用（即推力），因而，其值也应有限制，设

$$|u(t)| \leq M$$

初始条件为

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = 0 \end{cases}$$

终端条件为

$$\begin{cases} x(t_f) = x_f \\ \dot{x}(t_f) = 0 \end{cases}$$

性能指标为

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0$$

这里的最优控制问题是选择 $u(t)$ 使得火车运行的时间最短。

【例 1.2】月球软着陆问题。如图 1.1 所示，宇宙飞船在月球表面实现软着陆，要求控制发动机的推力 f ，使燃料消耗最少。

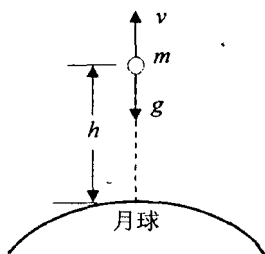


图 1.1 月球软着陆示意图

设飞船总质量为 m ，自身质量及所带燃料分别为 M 和 F ；它的高度和垂直速度分别为 h 和 v 。月球的重力加速度可视为常数 g ，自某 $t=0$ 时刻开始飞船进入着陆过程。其运动方程和初始条件为

$$\begin{cases} \dot{h} = v \\ \dot{v} = \frac{f}{m} - g \\ \dot{m} = -kf \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} h(0) = h_0 \\ v(0) = v_0 \\ m(0) = M + F \end{cases}$$

其中 k 是一常数。要求控制飞船从初始状态出发，于某一时刻 t_f 实现软着陆，即

$$h(t_f) = 0, \quad v(t_f) = 0$$

在这一问题中，推力 $f(t)$ 即为控制函数，其受发动机最大推力 $f_{\max}$ 的限制，即

$$0 \leq f(t) \leq f_{\max} \quad (1.1)$$

式(1.1)为问题的控制域。显然满足上述限制，使飞船实现软着陆的推力 $f(t)$ 不止一种，这里是要寻找使其消耗燃料最少的推力。使燃料消耗最小推力，即是使飞船着陆时的质量保持最大，所以优化的指标为

$$J = m(t_f)$$

【例 1.3】生产计划问题。设 $x(t)$ 表示商品存货量， $r(t) \geq 0$ 表示对商品的需求率，是已知函数， $u(t)$ 表示生产率，它将由计划人员来选取，故是控制变量。 $x(t)$ 满足下面的微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -r(t) + u(t) & t \in [0, t_f] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

x_0 是初始时刻的商品存货量，且 $x_0 \geq 0$ 。显然

$$x(t) \geq 0 \quad t \in [0, t_f]$$

其次，生产能力是有限制的，即容许控制为

$$0 \leq u(t) \leq A \quad t \in [0, t_f]$$

这里 $A > 0$ 表示最大生产率，另外为了保证满足需求，必须有

$$A > r(t) \quad t \in [0, t_f]$$

假定每单位时间的生产成本是生产率 $u(t)$ 的函数，即 $h[u(t)]$ 。设 $b > 0$ 是单位时间储存单位商品的费用，于是，单位时间的总成本为

$$L[x(t), u(t), t] = h[u(t)] + bx(t)$$

由 $t=0$ 到 $t=t_f$ 的总成本为

$$J(u) = \int_0^{t_f} L[x(t), u(t), t] dt$$

最优控制问题为寻找最优控制 $u(t)$ ，使总成本 $J(u)$ 最小。

由上面的例子可见，求解最优控制问题时要给定系统的状态方程，状态变量所满足的初

始条件和终端条件,性能指标的形式(时间最短、消耗燃料最小,误差平方积分最小等)以及控制作用的容许范围等。

下面用数学语言来比较详细地描述最优控制问题的内容。

对于一个最优控制问题,通常包括以下四个组成部分:

(1) 受控系统的数学模型,即动态系统的状态方程:它反映了动态系统在运动过程中所遵循的规律。一般的受控系统的数学模型可以写成如下的微分方程形式

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t), u(t), t] \quad (1.2)$$

系统可以是定常的,也可以是时变的;可以是线性的,也可以是非线性的。

(2) 受控动态系统的初始条件和终端条件:动态系统在控制 $u(t)$ 作用下,总要发生从一个状态到另一个状态的转移。初始时刻 t_0 和初始状态 $x(t_0)$ 是固定的,而终端状态 $x(t_f)$ 是控制所要达到的目标,因问题而异,它可以是固定的,也可以是自由的,或是受某种条件约束的。通常可以定义一个目标集来概括满足终端状态约束的状态集合,记为 M ,则终端条件与目标集之间的关系可以表示为

$$x(t_f) \in M。$$

(3) 容许控制:在实际问题中,控制量由于其具有实际的物理意义,通常会受到客观条件的限制,只能在一定范围内取值,这个范围被称为控制域,通常用 U 来表示。凡是在闭区间 $[t_0, t_f]$ 上有定义,且在控制域 U 内取值的每个控制函数 $u(t)$ 均称为容许控制,并记为 $u(t) \in U$ 。

(4) 性能指标:从给定的初态 $x(t_0)$ 到目标集 M 的转移可通过不同的控制律 $u(t)$ 来实现,这就需要在各种可行的控制律中找出一种效果最好的控制,即需要建立一种评价控制效果的标准。这个标准通常被称为性能指标、目标函数或代价函数等。性能指标的选择是很灵活的,并没有一个统一的格式,但在通常情况下,如下形式的性能指标可以概括一般形式的性能指标

$$J = \varphi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t] dt \quad (1.3)$$

其中,第一项称为末值型指标,第二项称为积分型指标。

最优控制问题的一般提法是:

问题 1.1 给定受控系统的状态方程(1.2),初始条件为

$$x(t_0) = x_0$$

求一容许控制 $u(t) \in U$,使得性能指标(1.3)最小化。

若性能指标(1.3)中仅含有末值型指标,称问题 1.1 为麦耶耳(Mayer)问题;若性能指标(1.3)中仅有积分型指标,称为拉格朗日(Lagrange)问题;若性能指标(1.3)中两者均有,称为波尔扎(Bolza)问题。拉格朗日问题和麦耶耳问题可以看成是波尔扎问题的特殊情况。所以波尔扎问题具有最一般的形式。但是,通过引入辅助变量,这三种问题可以互相转化。在后面的研究中,往往会根据具体的题目,引入这三种性能指标的某一种展开研究。

在最优控制理论中,常常采用三种方法求解如上的最优控制问题:

(1) 古典变分法(极大值原理的基础)

(2) 极大值原理 (苏, 庞德里亚金, Pontryagin)

(3) 动态规划 (美, 贝尔曼, Bellman)

1.2 脉冲切换系统理论概述

混杂系统是集连续动态和离散事件为一体的复杂系统。此类系统有很强的物理背景。例子包括: (1) 伴随定向操作的连续系统, 例如跳跃球, 会行走的机器人, 生物细胞增长和分裂等; (2) 被离散逻辑控制的连续系统, 例如自动调温计, 涉及阀、泵的化工厂, 汽车中的智能巡逻控制, 飞行器自动驾驶仪模型等; (3) 协调过程, 包括空气和地面传输系统等。

对于上面提到的系统, 其数学模型可分为连续时间模态与离散事件模型。其中, 连续时间模态描绘机械系统的活动、线性电路的操作、或者一个化学反应; 而离散事件模型描绘机械系统中的碰撞、环路切换或化工厂中的阀或泵的开关动作。

脉冲系统是混杂系统中一类重要的系统。它包括三部分: (1) 一个连续的微分方程, 代表了动态系统在重置事件发生之间的行为; (2) 一个差分方程, 代表了当重置事件发生时, 系统状态的瞬间变化; (3) 一个决定何时系统状态发生突变的准则。很多复杂的系统可用脉冲系统来描述。常见的脉冲系统包括网络控制系统, 生物神经网络系统, 病理学中某些发病规律模型, 经济学中的最优控制模型等。所有这些系统的共性为状态在切换点处存在切换和突变, 不能由单纯的连续或离散模型来描述。一个脉冲系统具有如下形式

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u_c(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (t, x(t), u_c(t)) \in S \quad (1.4)$$

$$\Delta x(t) = g(t, x(t), u_d(t)) \quad (t, x(t), u_d(t)) \in S \quad (1.5)$$

其中, $x(t) \in D \subset R^n$, D 是一个开集, $\Delta x(t) \triangleq x(t^+) - x(t)$, $u_c(t) \in U_c \subseteq R^m$, $u_d(t_k) \in U_d \subseteq R^m$, S 是重置集合, 称时间 t_k 为重置时间, 式(1.4)被称为连续动态, 式(1.5)被称为重置规则。

切换系统属于另外一类特殊的混杂系统。一般的, 一个切换系统包括一族子系统和一个控制系统切换行为的规则。数学上, 一个切换系统可由下面的方程来表示

$$\begin{cases} \dot{x} = f_\sigma(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

其中 $x(t)$ 是状态, $u(t)$ 是控制输入, σ 是一个取值于指标集 $M = \{1, \dots, m\}$ 的逐段常函数, 被称为切换信号, 它决定在每段时间内哪个子系统工作。 $\vartheta = [t_1, t_2, \dots, t_m]^T$ 为切换时间向量, 通常是未知的。 $f_k: R^n \rightarrow R^n, k \in M$, 是实向量值函数。这里状态 x 在切换点处是连续的。

图 1.2 给出了一个切换系统的结构示意图。显然, 一个切换系统就是一个多模型系统。每个独立的部分被称为子系统。一般的, 子系统代表了低水平的局部动态, 由微分或差分方程来表示。除子系统外, 切换系统还包括一个切换装置, 它是一个高层次的协调者, 产生切换规则来协调子系统之间的切换。

由于理论和工程应用方面的需求, 切换系统在控制领域内是人们研究的一个热门课题。切换系统在实际中大量存在。“切换”作为一种思想, 早已引入控制系统中。20 世纪 50 年代初, 在航天航空领域, 为节省燃料, 提出了时间最优控制和燃料最优控制问题。并由此产生了著名的 Bang-Bang 控制原理, 属于典型的切换控制。受继电系统的相平面方法启发而发

展和完善起来的变结构控制，也可以说是一种比较典型的切换控制。通过设计变结构控制器和切换面，使得系统在切换面来回切换，从而获得系统的渐近稳定性等性质，达到控制目的。此外，室温调节系统、汽车传输系统、计算机唱片驱动器系统以及一些机器人控制系统等都属于切换系统的研究范畴。

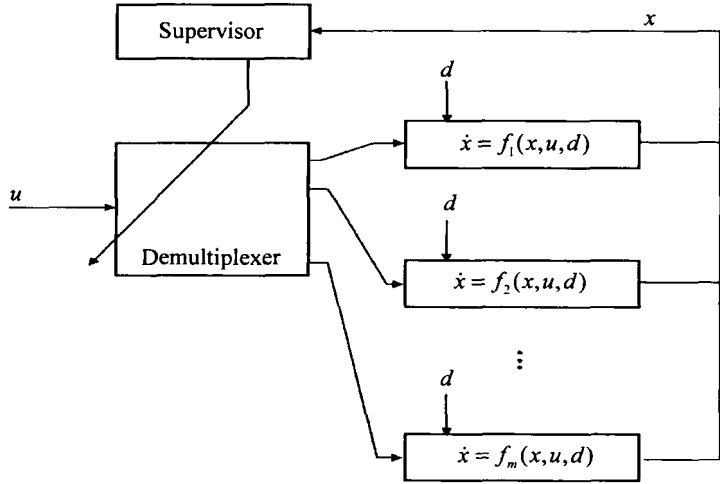


图 1.2 切换系统模型

下面，引入一个切换系统的例子。

【例 1.4】服务器切换系统。服务器切换系统是由 Chase 等人提出用来描述一些柔性制造系统和网络排队系统的。该切换系统由 n 个缓冲器和一个服务器组成，在任何时刻仅有一个缓冲器在工作。

这 n 个缓冲器按照如下的切换策略进行工作：

- (1) 开始让第一个缓冲器工作。
- (2) 当第 j 个缓冲器满负荷工作时，让 $j+1$ 个缓冲器开始工作。
- (3) 当第 n 个缓冲器满负荷工作时，又让第 1 个缓冲器开始工作。

令 $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ ，这里 $q_i, i = 1, 2, \dots, n$ 表示服务器正从缓冲器中移走的内容。于是离散状态变量 $q(t) \in Q$ 描述服务器在 t 时刻的状态，令 $x_i(t)$ 表示第 i 个缓冲器在 t 时刻存储内容的数量，且令

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$$

则该系统在 t 时刻的状态可以用 $(x(t), q(t))$ 刻画。则该系统的数学模型为

$$\dot{x}(t) = a(q(\sigma(t))), t \geq 0$$

其中， $\sigma: [0, +\infty) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}, \sigma(0) = 1$ ，切换规则如下：当 $\sigma(t) = j$ 和 $x_j(t) = 0$ 时， $\sigma(t+0) = j+1, j = 1, 2, \dots, n-1$ ；当 $\sigma(t) = n$ 和 $x_n(t) = 0$ 时， $\sigma(t+0) = 1$ 。

对具有广泛应用背景的脉冲切换系统，其最优控制问题广泛存在于航空航天、工业过程控制领域中。它属于以非线性分段光滑动力系统为约束的泛函优化问题。对这类问题的数值优化理论与算法的研究，不仅是非线性不可微动态规划领域的前沿课题，也是控制论与其他学科交叉发展的前沿课题。下面给出一个脉冲切换系统最优控制问题的实例。

【例 1.5】 开关-电容转换器的最优控制问题。

开关-电容转换基本单元的结构如图 1.3 所示。它包括一个电容 C 和等效串联电阻 r_c ，两个二极管 D_A ， D_B ，及两个晶体管 S 和 QS 。其中， S 作为一个静态开关工作，而 QS 在饱和区域内工作，类似于一个压控电流装置。电流大小由栅源电压 $V_{g, QS}$ 控制。在周期为 T_s 的一个回路中 S 和 QS 是反向操作的。在第一个周期内， QS 和 DA 工作， S 和 DB 打开。 C 利用一个恒定电流充电，给出一个电容上的线性电压轨迹。在第二个周期中， QS 和 DA 打开， S 和 DB 合上。 C 与输入资源串联起来提供输出负荷。输出电压近似于输入电压和电容电压的和。通过并联两个开关电容转换单元，在各回路内反向操作，实现了一个开关-电容 DC/DC 转换器。图 1.4 给出了开关-电容转换器的环路图。

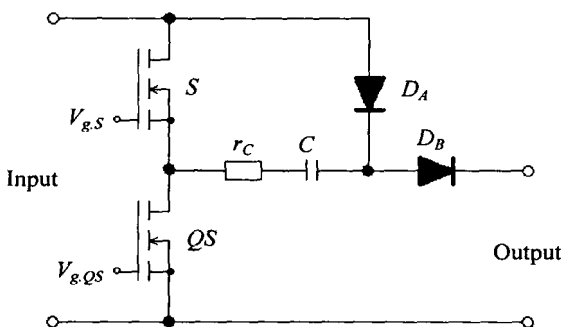


图 1.3 开关-电容转换器单元的结构图

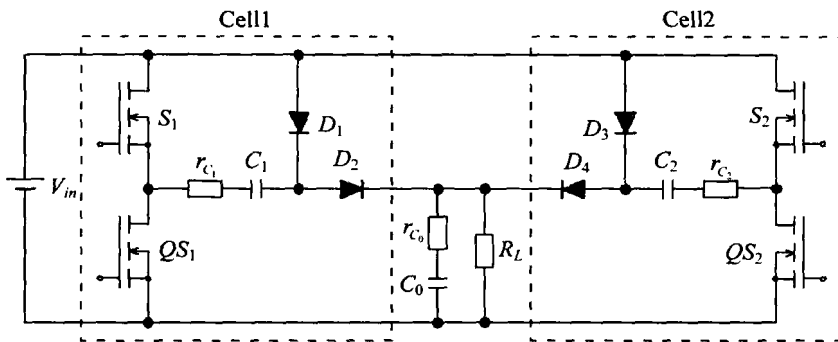


图 1.4 开关-电容转换器的环路图

利用已有文献的结论, DC/DC 转换器的状态空间模型可以用一个线性切换系统来描述

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_i x(t) + B_i u(t) \quad (1.6)$$

$$y(t) = C_i x(t) + D_i u(t) \quad (1.7)$$

其中

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{\alpha_1} \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_1}{C_1(R_{C_1} + 2R_{on})} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_L + R_{C_0}}{C_2} & -\frac{R_L}{C_2} \\ 0 & -\frac{R_L}{C_0} & -\frac{R_L + R_{C_2} + 2R_{on}}{C_0} \end{bmatrix} \\
A_2 &= \frac{1}{\alpha_2} \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_2}{C_2(R_{C_2} + 2R_{on})} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_L + R_{C_0}}{C_1} & -\frac{R_L}{C_1} \\ 0 & -\frac{R_L}{C_0} & -\frac{R_L + R_{C_1} + 2R_{on}}{C_0} \end{bmatrix} \\
B_1 &= \frac{1}{\alpha_1} \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{C_1(R_{C_1} + 2R_{on})} & \frac{R_L + R_{C_0}}{C_2} & \frac{R_L}{C_0} \end{bmatrix}^T \\
B_2 &= \frac{1}{\alpha_2} \begin{bmatrix} \frac{\alpha_2}{C_2(R_{C_2} + 2R_{on})} & \frac{R_L + R_{C_0}}{C_1} & \frac{R_L}{C_0} \end{bmatrix}^T \\
C_1 &= \frac{1}{\alpha_1} \begin{bmatrix} 0 & -R_L R_{C_0} & R_L(R_{C_2} + 2R_{on}) \end{bmatrix}, D_1 = \frac{R_{C_0} R_L}{\alpha_1} \\
C_2 &= \frac{1}{\alpha_2} \begin{bmatrix} 0 & -R_L R_{C_0} & R_L(R_{C_1} + 2R_{on}) \end{bmatrix}, D_2 = \frac{R_{C_0} R_L}{\alpha_2} \\
\alpha_1 &= R_{C_0} R_L + (R_{C_2} + 2R_{on})R_L + R_{C_0}(R_{C_2} + 2R_{on}) \\
\alpha_2 &= R_{C_0} R_L + (R_{C_1} + 2R_{on})R_L + R_{C_0}(R_{C_1} + 2R_{on})
\end{aligned}$$

这里, $x = [V_{C_1}, V_{C_2}, V_{C_0}]^T$; $u = [I_{Ch}, V_{in}, V_D]^T$, $y(t)$ 表示电阻电压降。在切换瞬间 t_1 , 需要一个状态渗漏 ξ , 满足

$$x(t_1) = x(t_1^-) + \xi$$

在开关-电容转换器的最优控制问题中, 涉及很多优化指标, 但在切换点处输出电压的跳跃应尽量小, 这是由于许多装置要求一个稳定的电压, 过大的电压变化可能导致严重的危害, 所以在这里输出电压在切换点处的跳跃, 即开关电容转换器的输出泄漏, 和能量应最小化。因此, 上述最优控制问题可描述如下:

给定系统(1.6)~(1.7), 选择切换瞬间 t_1 和最优控制 $u(t)$, 使得目标函数

$$J = C[y(t_1) - y(t_1^-)]^2 + \sum_{i=1}^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} (y(t) - y(t_{i-1}))^2 dt$$

最小化。

上述问题即为脉冲切换系统的最优控制问题, 将在第五章作为一个数值算例求解这个问题。

需要指出的是,对于此类问题不但要求选择最优控制而且要求求解最优切换瞬间和最优状态跳跃高度,所以通过求解相应的哈密顿-雅可比-贝尔曼等式得到解析解十分困难,从而,寻求良好的数值解法十分必要。

1.3 最优控制问题中常用的数值计算方法

最优控制问题就其本质来说是求泛函极值的变分学问题。最优控制理论发展了一系列最优控制存在的必要条件。这些成果很大程度上源于苏联学者庞特里雅金和他合作者的工作。最优控制理论在工程、经济等领域有许多成功的应用。然而,除非系统方程、目标函数和限制函数的形式都非常简单,否则很难得到最优控制问题的解析解。因此,寻求最优控制问题的数值解法十分必要。在本节中,归纳了几种常用的数值方法。

(1) 逐步梯度恢复算法 (SGRA)

逐步梯度恢复算法是在 1970 年由 Miele 首次提出的。这个算法由一系列循环过程组成,每个循环过程包括一个梯度设计阶段和一个恢复阶段。在梯度设计阶段,减小目标函数值;在恢复阶段,约束误差减小,避免目标函数值产生过大的变化。在一个完整的梯度-恢复循环过程中,目标函数值是减小的,而限制函数满足预先设定的精度要求。

(2) 直接配置方法 (DIRCOL)

直接配置方法是由 Stryk 首次提出的。通过离散状态和控制变量,将无穷维的最优控制问题转化为一系列有限维的非线性受限优化问题。转化后的问题既可利用稠密序列二次优化方法求解,又可利用稀疏序列二次规划方法求解。直接配置方法也可用来计算伴随矩阵变量的可信赖估计,及状态限制和切换结构的加增函数。因此,这种方法易于与不直接方法结合,如多重打靶法等。但是,直接配置法只适合计算比较小型的问题,对于复杂的大型问题,如果用直接配置法计算,计算量则很大。

(3) 动态规划原则 (DPP)

动态规划的思想是在 1940 年由美国学者理查德-贝尔曼提出的。到 1953 年,它的思想达到了成熟期,这种递推关系被称为贝尔曼等式。动态规划原则在许多重要领域有很成功的应用,如系统分析、决策科学、优化理论和最优控制等。之后许多学者将原始的动态规划原则推广,得出一系列新的结论。最近又发展了迭代动态规划原则。迭代动态规划原则的主要思想是在优化一个函数的过程中多次应用动态规划原则。在这个技术中,状态和控制均被离散化。状态函数中的格点定义了状态轨迹中可达到的点,控制中的格点定义了控制变量中容许的控制值。分割点被不断地细化直到获得一个满意的控制策略。限制函数利用罚函数来处理。迭代动态规划原则在最优控制领域内有广泛的应用,尤其是在化工领域。迭代动态规划方法不是基于梯度的,所以容易应用并且鲁棒性强;但另一方面,由于需要大量调整参数,如区域收缩因子、控制的允许值、格点数目、初始区域大小和恢复因子等,使得其在实际应用中具有一定的局限性。

(4) 回归整合最优轨线法 (RIOTS)

回归整合最优轨线法是通过求解离散化的近似问题得到连续时间的最优控制问题的近似解,是一种可从数学仿真程序中随时调用的程序集成。这种近似问题是利用固定阶的 Runge-Kutta 法和有限维的 B-spline 参数化方法获得的。得到的近似问题可用数学规划方法

来求解。递推整合最优轨线法存在着一些缺陷。这种方法不能有效地处理受限问题。另一个缺点是它需要维持一致近似。

(5) 控制参数化方法

经典的控制参数化方法 (CPT) 的主要思想是将时间区间 $[0, T]$ 分割为一些子区间, 控制函数被近似为相应的预先给定切换点的逐段常函数或逐段线性函数。这样, 得到一系列近似的最优参数选择问题。每个问题可看做数学规划问题求解, 如序列二次规划法等, 同时可应用各种现有的最优控制软件包求解, 如 MISER 3.3。这种方法易于应用, 具有可靠的理论基础。

在经典的控制参数化方法中, 要求时间分割必须事先给定, 这样在优化过程中切换时间点就是给定的, 从而所得优化问题易于求解。然而, 为了得到更精确的近似控制函数, 切换点也应看做待定变量。如果把切换点看做待定变量会引起两个问题: 首先, 如果把切换点看做是待定变量, 目标函数和限制函数的梯度公式关于切换时间点是不连续的, 因而无法应用基于梯度的算法求解。另外, 如果把控制函数的切换时间看做是待定变量, 会使得系统方程的数值积分很复杂。这些缺点可利用一种时间转换方式克服。在一些文献中, 这种时间转换方式又被称为控制参数化改进方法。利用这种时间转换方法, 可以得到标准的最优参数选择问题, 从而, 可利用基于梯度的优化技术来求解, 如序列二次规划法等。同时各种最优控制软件包, 如 MISER 3.3 也可应用于此问题。这种方法已成功地解决了很多问题, 在本论文中, 这种转换方法发挥了巨大的作用。