高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

同济大学 彭 辉等 主编

高等数学辅导

（上下册合订 同济·第六版）

张天德 主审

联系考研，渗透精讲历年考研真题

- 典型例题 深入讲解思路方法技巧
- 习题答案 权威提供详尽准确解析
- 同步自测 梯度测试提升应试能力

全新修订 第3版

赠 最新考研数学真题

山东科学技术出版社

Spark® 星火

-72

高等数学辅导

（上下册合订 同济·第六版）

主 编 彭 辉 叶 宏 张焕玲

副主编 孙凤庆 吕成军

主 审 张天德

山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导/彭辉,叶宏主编. —济南:山东科学技术出版社,2007.7(2009.8 重印)

高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

ISBN 978-7-5331-4744-0

Ⅰ.高...　Ⅱ.①彭...②叶...　Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 107860 号

高等数学辅导

彭辉　叶宏　主编

出版者:山东科学技术出版社

地址:济南市玉函路 16 号

邮编:250002　电话:(0531)82098088

网址:www.lkj.com.cn

电子邮件:sdkj@sdpress.com.cn

发行者:山东科学技术出版社

地址:济南市玉函路 16 号

邮编:250002　电话:(0531)82098071

印刷者:山东滨州明天印务有限公司

地址:滨州黄河四路 512 号

邮编:256600　电话:(0543)3391477

开本:880mm×1230mm　1/32

印张:26

字数:700 千字

版次:2009 年 8 月第 1 版第 3 次印刷

ISBN 978-7-5331-4744-0

定价:29.80 元

前 言

高等数学是理工类专业一门重要的基础课程，也是硕士研究生入学考试的重点科目。同济大学数学系主编的《高等数学》是一套深受读者欢迎并多次获奖的优秀教材，被全国许多院校采用。本着坚持改革、反复锤炼，努力反映国内外高等数学课程改革和学科建设的最新成果和最高水平的理念，2007年同济大学数学系推出了《高等数学》第六版。该教材保持了原来的优点、特色，进一步强调提高学生的综合素质并激发学生创新能力。为帮助、指导广大读者学好高等数学，我们编写了这本与同济大学数学系主编的《高等数学》(第六版)完全配套的《高等数学辅导》，以使读者加深对基本概念的理解，加强对基本解题方法与技巧的掌握，最终提高应试能力和数学思维水平。

本书章节的划分和内容设置与六版完全一致。每节内容由三部分组成：一、内容简析；二、题型·例题·方法；三、教材习题解答。"内容简析"主要对本章涉及的基本概念、基本定理进行系统梳理，指出基本概念的理解和定理的运用中的难点，解答学习过程中可能出现的疑难问题，并特别归纳出各类考试中经常考查的知识点。"题型·例题·方法"以所考查知识点为纲，精选大量不同难度、不同风格的相关例题，给出详细解答，以帮助读者理清主要解(证)题思路，掌握基本解(证)题方法和常用技巧。"教材习题解答"对每节的全部习题作了详细解答，同时用"警示语"的形式对解题要点、技巧、关键和易错的地方作了简短警示。

各节内容之后，另外增加三部分内容：本章知识结构及内容小结；教材总习题解答；同步自测题及参考答案。"本章知识结构及内容小结"用网格形式揭示出本章内容之间的有机联系。"教材总习题解答"给出了教材每章后的总习题的详细解析。"同步自测题及参考答案"采用类同AB卷的梯度测试形式，从各类考试题中精选出大量有代表性的题目，并给出详细解答。

全书内容编写系统、新颖、清晰、独到，充分体现了如下四大特色：

一、知识梳理清晰、简洁　直观、形象的图表总结，精炼、准确的考点提炼，权威、独到的题型归纳，将教材内容抽丝剥茧、层层展开，呈现给读者简明扼要、层次分明的教材知识结构，以便于读者快速复习、高效掌握，形成稳固、扎实的知识网，从而为以后提高解题能力和数学思维水平夯实基础。

二、能力提升迅速、互动　所有重点、难点、考点，统统归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，给出丰富的精选例题、考研真题，举一反三、深入讲解，真正将知识掌握和能力提升高效结合，一举完成。

三、联系考研密切、实用　本书是一本教材同步辅导，也是一本实用的考研复习用书，书中处处联系考研。例题中有考研试题，同步自测题中也有考研试题，最后还附上最新考研数学真题及解析，尤其是讲解中处处渗透考研经常考到的考点、重点等，为的就是让同学们同步完成考研备考，达到考研要求的能力。

四、梯度测试科学、高效　根据循环训练理论，书中的同步测试题提供类同AB卷的由浅入深的测试形式，克服了一般教辅书中题目无层次的缺陷。其中自测题一为基础巩固题，重在覆盖知识面，难度接近或略高于阶段（期中、期末）考试；自测题二则体现了教学的较高要求，试题具有较强的综合性。

本书注意博采众家之长，参考了多本同类书籍，吸取了不少养分，在此向这些书籍的作者表示感谢。同时，由于我们水平所限，不足之处，在所难免，殷切希望读者提出宝贵意见，以便再版时改进、修正。

编者

目 录

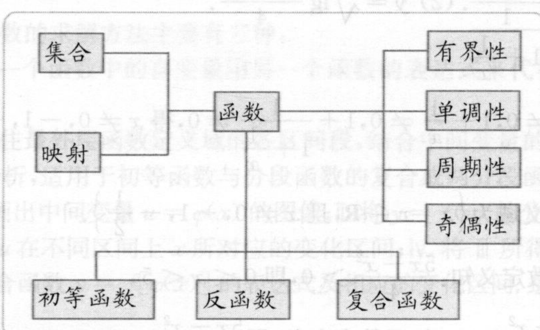
第一章　函数与极限

函数是微积分讨论的主要对象，它以极限理论为基础，在研究函数时我们总是通过函数值 $f(x)$ 的变化来看函数的性质，所以应该用运动变化的观点来掌握函数，极限与函数的连续性理论是微积分的基础，如何用已知的、可求的来逼近未知的、要求的，用有限来逼近无限，在无限变化的过程中考查变量的变化趋势，从有限过渡到无限，这是本章需掌握的基本思想.

第一节　映射与函数

一、内容简析

【知识结构】



【重要知识点和考点分析】

1. 两个奇函数的和或差仍是奇函数；两个偶函数的和、差、积、商（除数不为 0）仍是偶函数；两个奇函数的积或商（除数不为 0）为偶函数；一个奇函数与一个偶函数的积、商（除数不为 0）为奇函数.

2. 复合函数可由两个或多个函数相继进行有限次复合而成. 但是并不是任意两个函数都可以进行复合. 设外层函数 $y=f(u),u\in D$，内层函数 $u=g(x),x\in E$ 仅当外层函数的定义域与内层函数的值域相交时，即 $E^{*}=\{x\,|\,g(x)\in D,x\in E\}\neq\varnothing$ 时，两个函数才能复合. 例如，$y=\sqrt{u^2-2}$，$u=\sin x$ 就不能复合成 $y=\sqrt{\sin^2 x-2}$.

3. 函数有反函数的充要条件为函数是一一对应的. 严格单调函数必有反函数，且严格递增（减）函数的反函数也必严格递增（减）. 反之，有反函数的函数未必一定是严格单调函数，$y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 表示同一条曲线，若用 x 表示自变量，y 表示因变量，则 $y=f^{-1}(x)$ 及 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，$f^{-1}(x)$ 的定义域即为 $f(x)$ 的值域.

4. 分段函数是特别要注意的一类函数，它用几个不同解析式“分段”表示一个函数.所有解析式对应的自变量集合的并集是该函数的定义域.定义域的各段最多只能在端点处重合，重合时对应的函数值应该相等.图像分段的函数不一定是分段函数，分段函数的图象也可以是一条不断开的曲线(或曲面).

5. 本节的难点是复合函数，重点是复合函数及分段函数.考研中常出现的题型是求复合函数，特别是求分段函数的复合函数，方法主要有3种：代入法、分析法和图示法.

【本节考研要求】

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示方法，并会建立函数关系式.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数概念.

二、题型、例题、方法

基本题型Ⅰ：求函数定义域

例1 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$. (2) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$.

解：(1) 由 $x\neq 0, 1+\dfrac{1}{x}\neq 0, 1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\neq 0$，得 $x\neq 0,-1,-\dfrac{1}{2}$.

故函数定义域为 $\left\{x \mid x\in\mathbf{R}，且\ x\neq 0,-1,-\dfrac{1}{2}\right\}$.

(2) 由对数定义知：$\dfrac{5x-x^2}{4}>0$，即 $0<x<5$，

当 $\lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 0$ 时，函数有定义.即 $\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 1$，

可知 $1\leqslant x\leqslant 4$，故函数定义域为：$\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 4\}$.

【方法点击】 求初等函数的定义域有下列原则：① 分母不能为零. ② 偶次根式的被开方数不能为负数. ③ 对数的真数不能为零或负数. ④ $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $|x|\leqslant 1$. ⑤ $\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$. ⑥ $\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 求复合函数的定义域，通常将复合函数看成一系列初等函数的复合，然后考查每个初等函数的定义域和值域，得到对应的不等式组，通过联立求解不等式组，就可以得到复合函数的定义域.

例2 设 $f(x)=e^{x^2}$，$f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 的定义域.(考研题)

【思路探索】 由题目条件设法求出 $\varphi(x)$ 的函数表达式，然后再求出 $\varphi(x)$ 的定义域.

解：由 $f(x)=e^{x^2}$，知 $f(\varphi(x))=e^{\varphi^2(x)}$，又 $\because f(\varphi(x))=1-x$.

$\therefore e^{\varphi^2(x)}=1-x$，于是 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$，再根据 $\varphi(x)\geqslant 0$，

可知：$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$ 或 $\varphi(x)=-\sqrt{\ln(1-x)}$.

因此 $\varphi(x)$ 的定义域为：$\ln(1-x)\geqslant 0$. 即 $x\in(-\infty,0]$.

基本题型 Ⅱ：求函数表达式

例 3 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, x\leqslant 0,\\ x+2, x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=($ $)$.（考研题）

(A) $\begin{cases}2+x^2, x<0,\\ 2-x, x\geqslant 0,\end{cases}$ (B) $\begin{cases}2-x^2, x<0,\\ 2+x^2, x\geqslant 0,\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, x<0,\\ 2-x, x\geqslant 0,\end{cases}$ (D) $\begin{cases}2+x^2, x<0,\\ 2+x, x\geqslant 0,\end{cases}$

解：$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), f(x)\leqslant 0,\\ f(x)+2, f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}2+x, x\geqslant 0,\\ x^2+2, x<0\end{cases}=\begin{cases}2+x^2, x<0,\\ 2+x, x\geqslant 0.\end{cases}$

故应选(D).

【方法点击】 本题考查将两个分段函数复合成一个复合函数的过程. 先将 $g[f(x)]$ 表示为 $f(x)$ 的函数，再解不等式 $f(x)\leqslant 0$ 与 $f(x)>0$，最后将 $g[f(x)]$ 表示为 x 的函数.

小结：复合函数的求解方法主要有三种：

a) 代入法：将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来代替，适用于初等函数的复合.

b) 分析法：抓住最外层函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，适用于初等函数与分段函数的复合或两分段函数的复合.

c) 图示法：ⅰ. 画出中间变量 $u=\varphi(x)$ 的图像；ⅱ. 将 $y=f(u)$ 的分界点在 xu 坐标平面上画出；ⅲ. 写出 u 在不同区间上 x 所对应的变化区间；ⅳ. 将 ⅲ 所得的结果代入 $y=f(u)$ 中，便得到复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应的变化区间. 适用于两分段函数的复合.

基本题型 Ⅲ：求反函数

例 4 设 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-16, & x>2.\end{cases}$ 求 $f^{-1}(x)$.（考研题）

【思路探索】 本题为分段函数，因此要分区间讨论它的反函数表达式.

解：当 $x<-1$ 时，$y=1-2x^2$，得到 $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-y}$，$y<-1$.

当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$y=x^3$，

得到 $x=\sqrt[3]{y}$，$-1\leqslant y\leqslant 8$.

注意符号的变化.

当 $x>2$ 时，$y=12x-16$，

得到 $x=\frac{y+16}{12}$，$y>8$，

$$\text{所以反函数为 } y=f^{-1}(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-x}, & x<-1,\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8,\\ \dfrac{x+16}{12}, & x>8.\end{cases}$$

【方法点击】 反函数求解方法比较固定，即由 $y=f(x)$ 解出 x 的表达式，然后交换 x 与 y 的位置，即可求得反函数 $y=f^{-1}(x)$. 对于分段函数要注意所求函数表达式的区间.

基本题型Ⅳ：把复合函数分解为基本初等函数的复合

例5 函数 $y=\ln\cos(e^x)$ 由哪些基本初等函数复合而成?

解：函数 $y=\ln\cos(e^x)$ 可由基本初等函数：$u=e^x, v=\cos u, y=\ln v$ 三个函数复合而成.

【方法点击】 牢记基本初等函数的表达式是解决此类问题的基础，而由里到外，逐级分解是解决问题的关键. 做题时不能跨越某个级别，漏掉某个基本初等函数，要分清复合函数的成分和结构.

基本题型Ⅴ：函数单调性的问题

例6 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，且 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减小，证明：对任意两点 $x_1>0, x_2>0$，有 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

【思路探索】 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调减小是唯一的条件，因此要从 $\dfrac{f(x)}{x}$ 出发，逐步构造和结论联系的桥梁.

证明：不妨设 $0<x_1\leqslant x_2$，故有：$\dfrac{f(x_2)}{x_2}\leqslant\dfrac{f(x_1)}{x_1}$

$\dfrac{f(x)}{x}$ 单调减小.

$\therefore x_1 f(x_2)\leqslant x_2 f(x_1)$，又 $\because x_2<x_1+x_2$，则：

$\dfrac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\dfrac{f(x_2)}{x_2}$.

$\therefore x_2 f(x_1+x_2)\leqslant x_1 f(x_2)+x_2 f(x_2)\leqslant x_2(f(x_2)+f(x_1))$

即 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

【方法点击】 单调性是函数的一个性质，充分利用单调性的定义，结合不等式的放缩技巧可以得出许多有用的结论.

例7 判断函数 $y=\cos x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的单调性.

解：$\forall x_1, x_2\in(0,\pi), x_1<x_2$，

$\because \cos x_2-\cos x_1=-2\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}\sin\dfrac{x_2-x_1}{2}$，

由于 $x_1<x_2$，故有 $0<\dfrac{x_1+x_2}{2}<\pi, 0<\dfrac{x_2-x_1}{2}<\pi$，

$\therefore \sin\dfrac{x_1+x_2}{2}>0, \sin\dfrac{x_2-x_1}{2}>0$，从而 $\cos x_2-\cos x_1<0$，

即 $y=\cos x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上单调递减.

【方法点击】　证明函数单调性的主要方法有：

① 利用函数单调性定义.

② 利用导数证明.(例题见后续章节)

基本题型 Ⅵ：函数奇偶性问题

例 8　设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且对 $\forall\, x,y$ 都有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$，且 $f(x)\neq 0$. 证明 $f(x)$ 为偶函数.

【思路探索】　判断函数的奇偶性关键要考查 $f(x)$ 和 $f(-x)$ 的关系，因此紧盯住这一目标，对条件进行变形是解决问题的入手点.

证明： 由 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$，用 $-y$ 代 y 得：

$f(x-y)+f(x+y)=2f(x)f(-y)$，得 $2f(x)f(y)=2f(x)f(-y)$，

又因为 $f(x)\neq 0$，故 $f(y)=f(-y)$，$\therefore f(x)$ 为偶函数.

【方法点击】　判断函数奇偶性通常采用的方法有：

① 从定义出发，或者利用运算性质(奇函数的代数和为奇函数等等).

② 证明 $f(-x)+f(x)=0$ 或 $f(-x)-f(x)=0$.

基本题型 Ⅶ：函数周期性问题

例 9　设 $a<b$，函数 $f(x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)$ 关于 $x=a$，$x=b$ 对称，证明 $f(x)$ 为周期函数.

证明： $\because \forall\, x\in\mathbf{R}$，

$f(x+2b-2a)=f(b+x+b-2a)=f(b-(x+b-2a))$

$=f(2a-x)=f(a+a-x)=f(a-(a-x))=f(x)$，

$\therefore f(x)$ 是周期函数，$2b-2a$ 是它的一个周期.

【方法点击】　判定函数为周期函数的主要方法：① 从定义出发，找到 $T\neq 0$，使得 $f(x+T)=f(x)$. ② 利用周期函数的运算性质证明.

教材习题 1-1 解答(上册 P_{21})

1. **解：** $A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$

$A\cap B=[-10,-5)$，$A\backslash B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$

$A\backslash(A\backslash B)=[-10,-5)$.

2. **证明：** $(\Rightarrow)\ \forall\, a\in(A\cap B)^c$，则 $a\notin A\cap B$. $\therefore a\notin A$ 或 $a\notin B$，

即 $a\in A^c$ 或 $a\in B^c$，$\therefore a\in A^c\cup B^c$.

由 a 的任意性，知：$(A\cap B)^c\subset A^c\cup B^c$.　①

$(\Leftarrow)\ \forall\, a\in A^c\cup B^c$，则 $a\in A^c$ 或 $a\in B^c$，即 $a\notin A$ 或 $a\notin B$，

$\therefore a\notin A\cap B$，　即 $a\in(A\cap B)^c$.

由 a 的任意性，知：　$(A\cap B)^c\supset A^c\cup B^c$.　②

$\therefore$ 由 ①、② 得：$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

3. **证明：** (1) $(\Rightarrow)\ \because A\subset X,B\subset X$，　$\therefore A\cup B\subset X$. $\therefore f(A\cup B)$ 有意义.

对 $\forall\, y\in f(A\cup B)$，则 $\exists\, x\in A\cup B$，使得 $f(x)=y$.

$\therefore x\in A$ 或 $x\in B$. 即 $f(x)\in f(A)$ 或 $f(x)\in f(B)$，

$\therefore f(x) \in f(A) \cup f(B)$，即 $y \in f(A) \cup f(B)$.

由 y 的任意性，知：$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.　①

$(\Leftarrow)$ 设 $\forall y \in f(A) \cup f(B)$，则 $y \in f(A)$ 或 $y \in f(B)$，

$\therefore \exists x \in A$ 或 $x \in B$，使得 $f(x) = y$，

即 $\exists x \in A \cup B$，使 $f(x) = y$，$\therefore y = f(x) \in f(A \cup B)$.

由 y 的任意性，知：$f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B)$.　②

$\therefore$ 由①②，得：$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(2) $\because A \subset X, B \subset X$. $\therefore A \cap B \subset X$. $\therefore f(A \cap B)$ 有意义.

$\forall y \in f(A \cap B)$，则 $\exists x \in A \cap B$，使得：$f(x) = y$.

$\because x \in A$ 且 $x \in B$，$\therefore f(x) \in f(A)$ 且 $f(x) \in f(B)$

即 $f(x) \in f(A) \cap f(B)$，即 $y \in f(A) \cap f(B)$

由 y 的任意性，知：$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

4. **解**：(1) $\{x \mid x \geqslant -\frac{2}{3}\}$.　(2) $\{x \mid x \neq \pm 1\}$.

(3) $\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ 且 } x \neq 0\}$.　(4) $\{x \mid -2 < x < 2\}$.

(5) $\{x \mid x \geqslant 0\}$.　(6) $\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - 1, k \in \mathbf{Z}\}$.

(7) $\{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 4\}$.　(8) $\{x \mid x \leqslant 3 \text{ 且 } x \neq 0\}$.

(9) $\{x \mid x > -1\}$.　(10) $\{x \mid x \neq 0\}$.

5. **解**：(1) 不同.　$f(x)$ 定义域为：$x \neq 0$ 而 $g(x)$ 定义域为 $x > 0$.

(2) 不同.　对应法则不同. $f(x) = x$，而 $g(x) = |x|$.

(3) 相同.　$f(x) = \sqrt[3]{x^3(x-1)} = x\sqrt[3]{x-1} = g(x)$.

(4) 不同.　$f(x), g(x)$ 定义域不同.

6. **解**：函数 $y = \varphi(x)$ 的图形如图 1-1 所示：

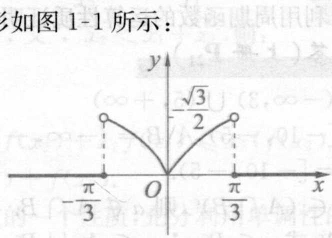


图 1-1

$$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left|\sin\frac{\pi}{6}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin\frac{\pi}{4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi(-2) = 0.$$

7. **证明**：(1) $y = f(x) = \dfrac{x}{1-x} = -1 + \dfrac{1}{1-x}$，　$x \in (-\infty, 1)$