普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教辅

高等数学

同步辅导与复习提高

◆ 金 路 徐惠平 编

（上册）

復旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

高等数学

同步辅导与复习提高

上　册

金　路　徐惠平　编

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导与复习提高．上册/金路，徐惠平编．—上海：复旦大学出版社，2010.8
ISBN 978-7-309-07515-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．①金…②徐…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 150643 号

高等数学同步辅导与复习提高(上册)
金　路　徐惠平　编
出品人/贺圣遂　责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号　邮编：200433
网址：fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com
门市零售：86-21-65642857　团体订购：86-21-65118853
外埠邮购：86-21-65109143
上海华业装潢印刷厂有限公司

开本 787×960　1/16　印张 15.75　字数 293 千
2010 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
印数 1—5 100

ISBN 978-7-309-07515-1/O·459
定价：28.00 元

前　　言

“高等数学”是大学学习中的一门重要基础课程.由于数学在自然科学、工程技术和社会科学等领域的作用越来越突出,应用面越来越广,因此社会对具有良好数学素质和创新能力强、知识面广的人才的需要也越来越迫切.“高等数学”作为学生学习现代科学知识的基础课程,承载着锻炼学生逻辑思维、培养学生熟练运算能力和运用数学技术的能力,以及为后续课程提供良好基础的重任,其重要性不言而喻.而高等数学研究对象和方法的改变,对于刚从初等数学学习转到高等数学学习的学生来说,从认知、观念、心理等各个层面常常感到不适应、感到困惑.特别是对于形式多样、难易不同、方法各异的习题和练习感到无所适从、感到手足无措.虽然对于如何学好高等数学大家见仁见智,各有不同观点和方法,但学习数学知识的有效途径是多做习题,却是经过长期的数学教学实践所达成的共识.

我们通过多年的教学实践,深知学生的疑难与困惑,了解在学习方法、解题方法和技巧方面的引导对于他们的重要性.经过长期的教学实践和研究积累,查阅了各种期刊、教学参考资料和习题集,并听取了同行的意见和建议,我们编写了这本高等数学学习辅导教材,以适应教学需要.在编写过程中,我们特别注意了以下几点:

一、重视基础知识的学习与基本技能的训练,适当增强基础题目的讲解内容.这是因为只有熟练掌握了基本概念、基本原理和基本方法,才能有能力去分析和解决复杂的问题.同时,这也是锻炼逻辑思维、训练数学表达与推理的必要环节.

二、强调教学内容与例题分析的同步衔接,增强典型问题和规律性解答部分的内容,为学生课后复习与练习提供尽可能多的方法、技巧与参照,在开拓读者思路方面提供一把入门的钥匙.

三、系统总结教学内容,注重知识整合,科学地指导学生进行数学解题.在题目的选取与安排上,逐步增加综合型例题,以例题为载体,复习和运用学过的知识,培养学生综合运用数学知识去解决问题的能力.

四、解题训练的根本目的是培养和锻炼学生运用数学知识去解决数学问题的能力,因此在重视基础的同时,我们还选择了许多比较灵活的问题,以及一些研究型问题,它们需要具有一定的解题经验与较深入地思考才能够入手.通过这些例题,希望引导学生认识到独立思考和独立工作的重要性,体验分析问题、研究问

题、转化问题，进而解决问题的过程.

五、对许多例题给出了多种解法，展示数学方法的灵活性与多样性. 同时，在许多有启示的例题之后给出一些评注，揭示其内在蕴含的规律和可操作的方法，达到举一反三的效果.

六、由于“高等数学”是招收研究生考试的科目，我们对于全国和一些院校的硕士研究生入学考试试题，以及一些数学竞赛试题，适当地进行选择，有机地穿插在本书的例题和习题之中. 这样，一方面为有志于继续深入学习的学生提供帮助，另一方面也为正在学习高等数学的学生提供更多的综合能力训练素材.

七、为使学生能够进一步掌握学习内容和进行自我训练，了解自己的学习状况，在每小节之后都配置了一定量的习题，并附有答案或提示.

在本书的编写过程中，复旦大学数学科学学院童裕孙、陈纪修、吴泉水、程晋、楼红卫、朱大训等教授提供了各种建议、支持和帮助；复旦大学教务处也予以鼓励和支持，在此表示衷心的感谢. 同时，感谢复旦大学出版社范仁梅同志的大力支持和帮助，由于她的辛勤工作，本书才得以与读者见面.

囿于学识，本书错误和不当之处在所难免，殷切期望广大读者和同行提出宝贵的批评和建议.

编者

2010 年 6 月于复旦大学

目　　录

第一章
极限与连续

§1.1 函　　数

知识要点

一、函数的概念

定义 1.1.1 设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的一个子集,如果按某个规则 f,使得对于 D 中每个数 x,都有唯一确定的实数 y 与之对应,则称 f 是以 D 为**定义域的(一元)函数**,称 x 为**自变量**,y 为**因变量**. 这个函数关系记作

$$f:D\to\mathbf{R},$$
$$x\mapsto y,\ x\in D.$$

又记 $y=f(x)$,并称 $R=\{f(x)\mid x\in D\}$ 为函数 $f(x)$ 的**值域**.

有时为明确起见,记上述函数 $f(x)$ 的定义域为 $D(f)$,值域为 $R(f)$.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,在平面直角坐标系中称 $G_f=\{(x,f(x))\mid x\in D\}$ 为函数 f 的图像.

二、函数的性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 关于原点对称. 如果

$$f(-x)=f(x),\ x\in D(f),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**;如果

$$f(-x)=-f(x),\ x\in D(f),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于坐标原点中心对称.

2. 周期性

对于函数 $f(x)$,如果存在正数 T,使得

$$f(x+T)=f(x),\ x\in D(f),$$

则称$f(x)$是以T为**周期的周期函数**,满足上述关系的最小正数T称为$f(x)$的**最小正周期**.

3. 单调性

设有函数$f(x)$,如果对于任意$x_1,x_2 \in D \subset D(f)$,当$x_1 < x_2$时,恒有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2)\ (\text{或} f(x_1) \geqslant f(x_2)),$$

则称$f(x)$在D上是**单调增加**(或**单调减少**)的;如果上述关系式中等号均不成立,则称$f(x)$在D上是**严格单调增加**(或**严格单调减少**)的.

4. 有界性

设有函数$f(x)$,$D \subset D(f)$,如果存在常数M,使得

$$f(x) \leqslant M,\ x \in D,$$

则称函数$f(x)$在D上有**上界**,称M为$f(x)$的一个上界;如果存在常数m,使得

$$f(x) \geqslant m,\ x \in D,$$

则称函数$f(x)$在D上有**下界**,称m为$f(x)$的一个下界;在D上既有上界又有下界的函数称为在D上**有界**. 显然f是D上的有界函数等价于:存在正常数K,使得

$$|f(x)| \leqslant K,\ x \in D.$$

如果这样的数K不存在,则称$f(x)$在D上**无界**.

三、复合函数与反函数

设有函数f和g,称定义在

$$\{x \mid x \in D(g),\ g(x) \in D(f)\}$$

上的函数$f \circ g$为f和g的**复合函数**,其中

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

对于复合函数$f \circ g$,称$u = g(x)$为中间变量,称$x \in D(f \circ g)$为自变量.

设有函数f,如果对每一个$y \in R(f)$,有唯一的$x \in D(f)$满足$y = f(x)$,则称这个定义在$R(f)$上的对应关系

$$y \mapsto x$$

为函数f的**反函数**,记作f^{-1}.

四、初等函数

常数函数,幂函数,指数函数,对数函数,三角函数,反三角函数这6类函数称为**基本初等函数**. 由这些基本初等函数经过有限次四则运算和复合所构成的函数,统称为**初等函数**.

例题分析

例 1.1.1 求函数$f(x)=\sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{x-3}}$的定义域.

解 定义域中的点 x 应满足:

$$\frac{(x-1)^2}{x-3}\geqslant 0,$$

也就是

$$\begin{cases}(x-1)^2\geqslant 0,\\ x-3>0,\end{cases} \text{或} \begin{cases}(x-1)^2\leqslant 0,\\ x-3<0.\end{cases}$$

由此即得

$$x>3,\ \text{或}\ x=1,$$

所以函数的定义域为 $D(f)=\{1\}\cup(3,+\infty)$.

例 1.1.2 证明函数$f(x)=\dfrac{2^x}{1+2^x}$在$(-\infty,+\infty)$上严格单调增加.

证 任取 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$,则

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=\frac{2^{x_1}}{1+2^{x_1}}-\frac{2^{x_2}}{1+2^{x_2}}\\&=\frac{2^{x_1}-2^{x_2}}{(1+2^{x_1})(1+2^{x_2})}<0,\end{aligned}$$

其中最后一个不等式利用了函数 $y=2^x$ 的严格单调增加性质. 所以$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上严格单调增加.

例 1.1.3 讨论下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\ln(\sin x+\sqrt{\sin^2x+1})$;

(2) $f(x)=x\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$.

解 (1) 因为对于每个 $x\in\mathbf{R}$,有

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(-\sin x+\sqrt{\sin^2x+1})=\ln\frac{1}{\sin x+\sqrt{\sin^2x+1}}\\&=-\ln(\sin x+\sqrt{\sin^2x+1})=-f(x),\end{aligned}$$

所以$f(x)=\ln(\sin x+\sqrt{\sin^2x+1})$ 为奇函数.

(2) 因为对于每个 $x\in\mathbf{R}$,有

$$f(-x)=-x\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=-x\frac{1-2^x}{1+2^x}=f(x),$$

所以$f(x)=x\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$为偶函数.

例 1.1.4 证明函数$f(x)=x\sin x$是非周期函数.

证 用反证法. 设$T>0$是$f(x)=x\sin x$的一个周期,则

$$f(x+T)=f(x),\ x\in\mathbf{R}.$$

在上式中取$x=0$,有$T\sin T=0$,于是$T=k\pi, k=1,2,\cdots$. 这样便有

$$f(x+T)=(x+T)\sin(x+T)=(-1)^k(x+T)\sin x.$$

再在$f(x+T)=f(x)$中取$x=\dfrac{\pi}{4}$,并注意上式可得,对于$k=1,2,\cdots$,成立

$$\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}=(-1)^k\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)\sin\frac{\pi}{4},$$

即

$$(-1)^k k=\frac{1}{4}(1-(-1)^k),$$

这是不可能的. 因此$f(x)=x\sin x$是非周期函数.

例 1.1.5 讨论下列函数是否有界:

(1) $f(x)=\arctan x,\ x\in(-\infty,+\infty)$;

(2) $f(x)=\tan x,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(3) $f(x)=\tan x,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$;

(4) $f(x)=x\cos x,\ x\in(-\infty,+\infty)$.

解 (1) 因为$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2},\ x\in(-\infty,+\infty)$,所以$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界.

(2) 因为$|\tan x|\leqslant 1,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$,所以$f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$上有界.

(3) 函数$f(x)$无界. 用反证法来证明:若$f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上有界,则存在$L>0$,使得

$$|\tan x|\leqslant L,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

但是,取$x_L=\arctan(L+1)\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,便有

$$|f(x_L)|=|\tan x_L|=L+1>L,$$

这与L的选取矛盾.

(4) 函数$f(x)$无界. 用反证法来证明:若f在$\mathbf{R}$上有界,则存在$L>0$,使得

$$|x\cos x| \leqslant L,\ x \in \mathbf{R}.$$

但是,取 $x_n = 2n\pi(n = 1,2,\cdots)$,便有

$$|f(x_n)| = |x_n \cos x_n| = 2n\pi,$$

取足够大的 n,例如取 $n = \left[\frac{L}{2\pi}\right] + 1$ $\left(\left[\frac{L}{2\pi}\right]\right.$表示取整数,即

$$\left.\frac{L}{2\pi} - 1 < \left[\frac{L}{2\pi}\right] \leqslant \frac{L}{2\pi} < \left[\frac{L}{2\pi}\right] + 1\right),$$

便有

$$|f(x_n)| > L,$$

这与 L 的选取矛盾.

例 1.1.6 试将下列函数分解为几个简单函数的复合.

(1) $F(x) = \ln(1 + \sin^2 2x)$, $D(F) = (-\infty, +\infty)$;

(2) $F(x) = (1 + \arctan^4 3x)^3$, $D(F) = (-\infty, +\infty)$.

解 (1) 取

$$f(u) = \ln u,\ D(f) = (0, +\infty),$$
$$g(v) = 1 + v^2,\ D(g) = (-\infty, +\infty),$$
$$h(w) = \sin w,\ D(h) = (-\infty, +\infty),$$
$$k(x) = 2x,\ D(k) = (-\infty, +\infty),$$

则有

$$F = f \circ g \circ h \circ k.$$

(2) 取

$$f(u) = u^3,\ D(f) = (-\infty, +\infty),$$
$$g(v) = 1 + v^4,\ D(g) = (-\infty, +\infty),$$
$$h(w) = \arctan w,\ D(h) = (-\infty, +\infty),$$
$$k(x) = 3x,\ D(k) = (-\infty, +\infty),$$

则有

$$F = f \circ g \circ h \circ k.$$

例 1.1.7 设 $f(x) = e^{x^2}$,一元函数 φ 满足 $f[\varphi(x)] = 1 - x$,且 $\varphi(x) \geqslant 0$,求 φ.

解 由 $f(x) = e^{x^2}$ 及 $f[\varphi(x)] = 1 - x$,得

$$f[\varphi(x)] = e^{[\varphi(x)]^2} = 1 - x,$$

因此解得 $\varphi(x) = \pm\sqrt{\ln(1 - x)}$. 又因为 $\varphi(x) \geqslant 0$,所以

$$\varphi(x) = \sqrt{\ln(1 - x)},\ x \leqslant 0.$$

例 1.1.8 设 $f(x) = \sqrt{x + |x|}$,求 $f[f(x)]$.

解 按定义，有

$$f[f(x)]=\sqrt{f(x)+|f(x)|}=\sqrt{\sqrt{x+|x|}+\left|\sqrt{x+|x|}\right|}.$$

当 $x\geqslant 0$ 时，

$$\sqrt{x+|x|}+\left|\sqrt{x+|x|}\right|=\sqrt{2x}+\sqrt{2x}=\sqrt{8x}.$$

当 $x<0$ 时，

$$\sqrt{x+|x|}+\left|\sqrt{x+|x|}\right|=\sqrt{x-x}+\left|\sqrt{x-x}\right|=0.$$

于是

$$f[f(x)]=\begin{cases}\sqrt[4]{8x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

例 1.1.9 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x<1,\\ \ln x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}e^x, & x>0,\\ x+1, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

解 显然

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}\varphi(x), & \varphi(x)<1,\\ \ln\varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 1.\end{cases}$$

由 φ 的定义，$\varphi(x)<1$ 当且仅当 $x+1<1$，即 $x<0$，此时 $\varphi(x)=x+1$；$\varphi(x)\geqslant 1$ 当且仅当 $x>0$ 或 $x=0$，即 $x\geqslant 0$，此时 $\varphi(x)=\begin{cases}e^x, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}=e^x, x\geqslant 0$. 因此

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}x+1, & x<0\\ \ln e^x, & x\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

例 1.1.10 求下列函数的反函数：

(1) $f(x)=\dfrac{2-x}{x+1}$;

(2) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x-1, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

解 (1) 设 $y=\dfrac{2-x}{x+1}$，则 $y(x+1)=2-x$，由此解得

$$x=\frac{2-y}{y+1},$$

即 $f(x)$ 的反函数为其自身：

$$f^{-1}(x)=\frac{2-x}{x+1},\ x\neq -1.$$

(2) 设 $y=\begin{cases}\sqrt{2x-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x-1, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时,$y = \sqrt{2x - x^2}$,从中解得

$$x = 1 - \sqrt{1 - y^2},\ 0 \leqslant y \leqslant 1;$$

当 $1 < x \leqslant 2$ 时,$y = 2x - 1$,从中解得

$$x = \frac{y + 1}{2},\ 1 < y \leqslant 3.$$

所以 $f(x)$ 的反函数为

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{x + 1}{2}, & 1 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

例 1.1.11 求 $y = \sin x \mid \sin x \mid \left(\mid x \mid \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$ 的反函数.

解 当 $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ 时,$y = \sin^2 x$,于是 $\sin x = \sqrt{y}(0 \leqslant y \leqslant 1)$,所以

$$x = \arcsin\sqrt{y},\ 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

当 $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x < 0$ 时,$y = -\sin^2 x$,于是 $\sin x = -\sqrt{-y}(-1 \leqslant y < 0)$,所以

$$x = \arcsin(-\sqrt{-y}) = -\arcsin\sqrt{-y},\ -1 \leqslant y < 0.$$

于是 $y = \sin x \mid \sin x \mid$ 的反函数为

$$y = \begin{cases} \arcsin\sqrt{x}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\arcsin\sqrt{-x}, & -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$$

例 1.1.12 已知函数 $f(x)$ 满足

$$f(x) + 2f\left(\frac{2 - x}{1 + x}\right) = 3x,$$

求 $f(x)$.

解 令 $u = \dfrac{2 - x}{1 + x}$,则 $x = \dfrac{2 - u}{u + 1}$. 代入给出的条件得

$$f\left(\frac{2 - u}{1 + u}\right) + 2f(u) = \frac{3(2 - u)}{1 + u},$$

即成立

$$f\left(\frac{2 - x}{1 + x}\right) + 2f(x) = \frac{3(2 - x)}{1 + x}.$$

此式与 $f(x) + 2f\left(\dfrac{2 - x}{1 + x}\right) = 3x$ 结合解得

$$f(x) = \frac{4 - 3x - x^2}{1 + x}.$$

例 1.1.13 设函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上定义,其图像关于直线$x=a$对称,也关于直线$x=b$对称($a<b$).证明$f(x)$是以$2(b-a)$为周期的函数.

证 因为$f(x)$的图像关于直线$x=a$对称,所以在$\mathbf{R}$上成立

$$f(a-x)=f(a+x),$$

于是

$$f(x)=f(a-(a-x))=f(a+(a-x))=f(2a-x).$$

因为$f(x)$的图像关于直线$x=b$对称,所以在$\mathbf{R}$上成立

$$f(b-x)=f(b+x),$$

因此在$\mathbf{R}$上成立

$$\begin{aligned}f(x)&=f(2a-x)=f(b-(b+x-2a))\\&=f(b+(b+x-2a))=f(x+2(b-a)).\end{aligned}$$

这说明$f(x)$是以$2(b-a)$为周期的函数.

习　　题

1. 确定下列初等函数的定义域:

(1) $f(x)=\arctan\dfrac{x+1}{2}$;　　(2) $f(x)=\sqrt{2\sin^2x+3\cos x-3}$;

(3) $f(x)=\dfrac{\ln(2-x)}{\sqrt{x^2-1}}$;　　(4) $f(x)=\dfrac{\tan x}{\sqrt{4-x^2}}$.

2. 作出下列函数的图像:

(1) $f(x)=x[\sin x]$;　　(2) $f(x)=1-|x^2-1|$;

(3) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

3. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\sin\dfrac{x^2}{1+x^2}$;　　(2) $f(x)=\ln|\sec x+\tan x|$;

(3) $f(x)=\arctan 2^x-\dfrac{\pi}{4}$;　　(4) $f(x)=\left(\arccos x-\dfrac{\pi}{2}\right)\sin x$.

4. 设函数$f(x)$满足:$D(f)$关于原点对称,证明:$f(x)$可表示成一个奇函数与一个偶函数之和.

5. 设函数$f(x)$定义在$(-\infty,+\infty)$上.若有常数$c\neq 0$,使得$f(x+c)=-f(x)$,$x\in(-\infty,+\infty)$.证明:函数$f(x)$是一个周期函数.

6. 在下列函数中,哪些是周期函数?如果是周期函数,写出它们的最小正周期:

(1) $f(x)=x\tan x$;　　(2) $f(x)=|\sin 2x|$;

(3) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$;　　(4) $f(x)=\cot(3x+1)$.

7. 判断下列函数在给定区间上是否有界:

(1) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2},\ x\in\mathbf{R}$;　　(2) $f(x)=x^2\tan x,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(3) $f(x)=\dfrac{1-x}{x},\ x\in(0,1)$;　　(4) $f(x)=\ln x-100\sin x,\ x\in(1,+\infty)$.

8. 设$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2, & x>0.\end{cases}$ 求$f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$, $g\circ g$.

9. 下列函数分别是由哪几个较简单的函数复合而成?

(1) $f(x)=\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}$;

(2) $f(x)=\ln(1+\arctan^2 x)$;

(3) $f(x)=\cos^3(1+\sqrt{x})$.

10. 求下列函数的反函数,并指出反函数的定义域:

(1) $f(x)=\tan\dfrac{x}{2},\ \pi<x<3\pi$;　　(2) $f(x)=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}$;

(3) $f(x)=1-\sqrt{1-x^2},\ -1\leqslant x<0$;　　(4) $f(x)=\begin{cases}(x-\pi)^2, & 0\leqslant x<\pi,\\ \sin x, & \pi\leqslant x\leqslant \dfrac{3}{2}\pi.\end{cases}$

11. 设$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,记$f_1(x)=f(x)$,$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))\ (n=1,2,\cdots)$,证明:

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}\qquad(n=1,2,\cdots).$$

§1.2　数列的极限

知识要点

一、数列的极限的概念

数列的极限是反映数列变化趋势的重要指标.

定义 1.2.1　设$\{a_n\}$是数列. 如果存在常数a,使得对于任意给定的正数$\varepsilon>0$,存在正整数N,使得当$n>N$时,成立

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

则称$\{a_n\}$以a为**极限**,或称$\{a_n\}$**收敛**于a,记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a,$$

否则,就称数列$\{a_n\}$**发散**.

二、无穷小量与无穷大量

定义 1.2.2　设有数列$\{a_n\}$. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,即,对于任意给定的正数$\varepsilon>0$,

存在正整数 N,使得当 $n > N$ 时,成立

$$|a_n| < \varepsilon,$$

则称 $\{a_n\}$ 是**无穷小量**,记作

$$a_n = o(1),\ n \to \infty.$$

定理 1.2.1 有限多个无穷小量的代数和为无穷小量.

定理 1.2.2 有界量和无穷小量的乘积是无穷小量.

定义 1.2.3 设 $\{a_n\}$ 是数列. 如果对于任意给定的数 $K > 0$,存在正整数 N,使得当 $n > N$ 时,成立

$$|a_n| > K,$$

则称 $\{a_n\}$ 是**无穷大量**,记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

如果上述不等式可改作 $a_n > K$(或 $a_n < -K$),则称 $\{a_n\}$ 是正(或负)无穷大量,分别记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

定理 1.2.3 设 $\{a_n\}$ 是无穷小量,且 $a_n \neq 0$,则 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是无穷大量;反之亦然.

三、收敛数列的性质

定理 1.2.4(四则运算法则) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$,则

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B;$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}(B \neq 0).$$

定理 1.2.5(唯一性) 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛,则 $\{a_n\}$ 的极限唯一.

定理 1.2.6(有界性) 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛,则 $\{a_n\}$ 是有界数列.

定理 1.2.7(夹逼性) 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 为数列. 如果自某项以后均有 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$,则

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A.$$

四、单调有界数列

设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_n \leqslant a_{n+1},\ n \geqslant 1,$$

则称 $\{a_n\}$ 是**单调增加**数列,也称作**单调上升**数列;如果

$$a_n \geqslant a_{n+1},\ n \geqslant 1,$$

则称 $\{a_n\}$ 是**单调减少**数列,也称作**单调下降**数列.

定理 1.2.8 单调有界数列必有极限.

定理 1.2.9(Stolz 定理) 设$\{a_n\}$是严格单调增加的正无穷大量,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-b_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}=a(a\text{ 可以有限,或 }+\infty\text{ 与 }-\infty),$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=a.$$

五、Cauchy 收敛准则

定理 1.2.10(Cauchy 收敛准则) 数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是:对于任意给定的$\varepsilon>0$,存在正整数N,使得当$m,n>N$时,成立

$$|a_n-a_m|<\varepsilon.$$

例 题 分 析

例 1.2.1 用定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3}{2n^2-1}=0.$

证 分析:对于任意给定的$\varepsilon>0$,要$\left|\dfrac{n+3}{2n^2-1}-0\right|<\varepsilon$,这只要$\left|\dfrac{n+3n}{n^2}\right|<\varepsilon$,即$\left|\dfrac{4}{n}\right|<\varepsilon$即可. 于是,对于任意给定的$\varepsilon>0$,取$N=\left[\dfrac{4}{\varepsilon}\right]$,则当$n>N$时,便有

$$\left|\frac{n+3}{2n^2-1}-0\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{2n^2-1}=0.$$

注 为了验证$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,需要证明$\{a_n-A\}$是无穷小量,由于这个量一般比较复杂,要从中找出$N$,通常需要进行适当的放大,简化表达式.

例 1.2.2 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+4}{n^2-n}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n}{n^2-n+1}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n}{3n^2-2n+1}$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5(-2)^n+2\cdot5^n}{4^n+3\cdot5^n+7}$;　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cos^2n}{3n^2+2n+1}$.

解 (1) 利用定理 1.2.4,可得