解析幾何講義

（上 册）

數學系解析幾何教學小組編

東 北 師 範 大 學

一九五五年一月・長春

解析幾何講義

（上冊）

[illegible]

[illegible]

[illegible]

私オ

解析幾何講義

編　者：數學系解析幾何教學小組
出版者：東北師範大學教務處教材科
印刷者：東北師範大學印刷廠

一九五五年一月・初版，1500冊

解析幾何教學大綱

1. 講 授 目 的

解析幾何學的對象是用代數分析法研究幾何圖形。在初等數學各科，應用代數學解決許多幾何問題，例如，在幾何學中必須用數來定義線段及弧的長度，某些圖形的面積和體積等，在三角法中利用數的比值來確定角度與線段比間的關係。可是在這些數學分析裏、關於各種幾何圖形的問題是依靠分析法來解決的、但在解析幾何學裏則依靠數表徵這些幾何圖形的最本質的特性——它的位置。

為敘述方便起見劃分為兩部分講授，第一部分是在座標應用的基礎上，用代數的方法研究平面幾何圖形。第二部分是用同樣的方法討論空間的幾何圖形。

2. 教 材 內 容

第一章　直線上與平面上的座標

軸與軸上的綫段

直綫上的座標，數軸

平面上的笛卡兒直角座標

關於笛卡兒斜角座標的概念，極座標

第二章　平面解析幾何的簡單問題

兩點間的距離

按已知比分割線段

自由向量的概念，向量在軸上的射影

向量在座標軸上的射影，向量的幅角

二向量間的角的計算

兩個向量共線與垂直的條件

向量在任意軸上的射影的計算

三角形面積的計算

當軸平行移動時笛卡兒座標變換式

當座標軸旋轉時笛卡兒直角座標變換式

當移動原點與旋轉軸時笛卡兒直角座標座換式

第三章　曲線方程式

曲線方程式的概念，已知方程式求曲線的例題

已知曲線求其方程式的例題

關於曲綫相交的問題

曲線的參數方程式

代數曲線

第四章　一次曲線

直線是一次曲線

不完整的直線方程式，截矩式的直綫方程式

兩個直線方程式的聯立研究

直線的方向向量，直線的典型方程式，直線參數方程式

直綫的角係數，直線是線性函數的圖形

二直綫間的角的確定，二直線平行與垂直的條件

直線的法線式，求從點至直綫的距離的問題

直線束的方程式

第五章　二次曲線的幾何性質

引　言

圓

橢圓，橢圓的定義及其典型方程式

橢圓形狀的討論

双曲線，双曲線的定義及其典型方程式

双曲線形狀的討論

橢圓與双曲線的準線

拋物線及其典型方程式

拋物線形狀的討論

橢圓，双曲線與拋物線的極方程式

二次曲線的直徑

橢圓，双曲線與拋物線的光學性質

橢圓是圓的等比收縮

橢圓，双曲線與拋物線是圓錐曲線

第六章　二次曲線的一般理論

一般理論

有心曲線

無心曲線

解析幾何學

一九五四 —— 一九五五學年第一學期

數學系本科一年，專修科一年，物理系本科一年用

數學系幾何教研室解析幾何小組　編

★

第一編　平面解析幾何學

第一章　直線上與平面上的座標

§ 1. 軸與軸上的線段

1. 研究任意直線它有兩個相反的方向，我們可以規定其中的一個叫做它的正向（而相反的一個叫做負向）.

我們所指定有正向的直線叫做軸（在圖上軸的正向用矢來表示，例如下面的圖1（表示軸a）.

2. 設已知任意一軸，此外並指定（或選取）一個單位線段就是長度單位，用它測量任意線段，則可以確定這個線段的長度.

在已知軸上取任意兩點，並分別標以字母，例如 A. B. 以點 A. B 爲界的

軸上的線段，如果指定其中一點爲線段的始點，另一個爲終點，則這個線段叫做有向線段、有向線段的方向看做自始點指向終點.

在以後課文中，是在表示有向線段的境界的兩個字母上面畫一橫線來表示有向線段；此時表示始點的字母居於首位. 因此$\overline{AB}$表示一個以A,B爲界的有向線段，它的始點是點A. $\overline{AB}$也表示一個以A,B爲界的有向線段，但它的始點是點B.

將來所研究的軸上的有向線段常簡稱爲線段，而略去"有向"二字.

在某一個軸上有一個線段$\overline{AB}$，當這個線段的方向與軸的正向一致時，對於其長冠以"+"號，與軸的負向一致時，對於其長冠以"—"號. 此時所得的數，叫做這個線段$\overline{AB}$的量，線段$\overline{AB}$的量用記號AB（不帶有橫線)來表示、當點A與點B重合時，也不例外。此時因爲它的量AB等於零，而線段$\overline{AB}$叫做零線段、零線段的方向是不定的、因此這樣的線段須另具條件，才能叫做有向的.

線段的量與它的長度不同，是個有符號的數；顯然線段的長是它的量的模數、因此線段$\overline{AB}$的長，根據代數學中表示數的模數的方法，我們用記號 $|AB|$ 來表示、顯然 $|AB|$ 與 $|BA|$ 表示同一數、相反地，量AB與量 BA 是不同符號的、因此

$$AB=-BA$$

在圖1上表示一個軸 a，並在這個軸上的點A，B，C，D；E_1E_2是單位線段、假設 A，B，C，D 是這樣位置着；A與B向的距離等於2，C與D向的距離等於3. 自A向B的方向與軸的正向一致，自C向D的方向與軸的正向相反、所以在已知的情形有

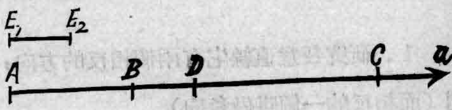


圖 1

$$AB=2, \qquad CD=3-3,$$

或

$$BA=-2, \qquad DC=3,$$

此外，還可寫成

$$|AB|=2. \qquad |CD|=3,$$

3．對於軸上的任何位置的三點A，B，C，線段$\overline{AB}$，$\overline{BC}$與$\overline{AC}$，的量間，恒有關係式

$$AB+BC=AC \tag{1}$$

這個關係式叫做基本恒等式．

證明基本恒等式．首先假設線段$\overline{AB}$與$\overline{BC}$不是零線段而有相同的方向(圖2，上)；此時線段$\overline{AC}$的長等於線段$\overline{AB}$，$\overline{BC}$的長的和且方向與它們相同，在這種情形，三個數AB，BC與AC是同符號，並且數AC等於數AB與數BC的和，就是恒等式（1）成立．

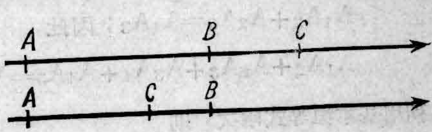


圖 2

現在假設線段$\overline{AB}$與$\overline{BC}$不是零線段、但方向相反（圖2，下）此時線段$\overline{AC}$的長等於線段$\overline{AB}$與$\overline{BC}$的長的差且方向與其中長的線段的方向相同．在這種情形，數AB與數BC的符號相反，而數AC的模數等於數AB與數BC的模數的差，又其符號與模數較大的數的符號相同．所以由於有符號數的加法法則，對於這樣位置的點，數AC等於數AB與BC的和，就是恒等式（1）成立．

最後假設線段$\overline{AB}$與$\overline{BC}$有一個是零線段，如果$\overline{AB}$是零線段，則點B與點A重合．所以，

$$AB+BC=AA+AC=0+AC=AC$$

如果$\overline{BC}$是零線段，則點B與點C重合，所以

$$AB+BC=AC+CC=AC+0=AC.$$

因此恒等式（1）對於點A，B，C的所有位置確實成立．

註．如果關係式（1）中記號AB，EC與AC僅看做為對應線段的長（不帶性質符號），則它僅於點B在點A與點C之間時成立、但關係（1）的一般性質是有

它的根源的，就是 AB，BC與AC 是線段 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$ 與 $\overline{AC}$ 的量；也就是線段的長度加以適當的符號.

4．利用基本恒等式（n° 3）可以證明對於軸上任何位置的點，A_1，A_2，A_3，…，A_n，A_{n+1}，線段 $\overline{A_1A_2}$，$\overline{A_2A_3}$，，…，$\overline{A_nA_{n+1}}$ 的量間有以下關係

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots A_nA_{n+1}=A_1A_{n+1} \qquad (2)$$

例如設已知五個點 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5，此時關係式（2）可寫爲

$$A_1A_2+A_2A_3+A_3A_4+A_4A_5=A_1A_5 \qquad (3)$$

玆利用基本恒等式（n° 3）可證明當軸上的點 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 爲任意位置時，它是正確的、首先將基本恒等式應用到點 A_1, A_2, A_3，則

$$A_1A_2+A_2A_3=A_1A_3\text{；因此}$$

$$A_1A_2+A_2A_3+A_3A_4+A_4A_5=A_1A_3+A_3A_4+A_4A_5$$

再利用基本恒等式兩次，則

$$A_1A_3+A_3A_4+A_4A_5=A_1A_4+A_4A_5=A_1A_5$$

因而關係式（3）成立.

如果想要證明關係式的一般形式，也就是當所研究的點爲任意個數時，則可應用數學歸納法（從n推到n+1的方法）來證明.

註．於關係式（2）中，某些點重合時仍然成立、其中如果 A_1 與 A_{n+1} 重合，則 $A_1A_{n+1}=A_1A_1=o$，所以得有

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_nA_{n+1}=o$$

§2．直線上的座標，數軸

5．現在想規定一種方法，利用它用已知數來確定任意直線上點的位置．這種方法可以想出很多，在這裏僅叙述比較簡單而且最適用的.

設已知任意直線，並用字母 a 表示它、取一線假作爲長度單位，再指定直線 a 的正向（因此它便成爲軸），並且在這個直線上取任意點，用字母 o 標記它、

然後於軸上取任意點M，則等於線段 $\overline{OM}$ 的量 OM 的數，叫做點M在軸 a 上的

座標、點O叫做座標原點，它的座標等於零.

已知點M的座標，則這個點在已知直線上的位置完全確定，就是座標的絕對值，也就是OM，是自點O至點M的距離；而座標的符號，就是數OM，的符號，確定自點O至點M的方向；如果座標爲正的，則點M位於自點O的正向方面；如果座標爲負的則在負向方面；如果座標等於零，則點M與點O重合（總之可直接地從軸上線段的量的定義得到，參考 n°2）.

假設直線 a 在我們的面前成水平的位置，並且正向指向右方，此時直線上的點的位置與它的座標符號間之關係，可以叙述如下：座標爲正的點，在座標原點O的右方，座標爲負的點，在座標原點O的左方.

任意點的座標常用字母 x 表示、因此當研究一些點時，常用同一字母而記以不同註碼來表示，例如$M_1, M_2, \cdots, Mn$；此時這些點的座標也用同一字母而記以對應註碼表示，如 $x_1, x_3, \cdots xn$；在本講義中是將該點的座標寫在表示該點的字母後面的括弧中，例如$M_1(x_1)$，$M_2(x_2)$，….

6．在這裏我們證明兩個極簡單但是很重要的定理，它們是關於導入座標系的軸的問題.

定理1．對於軸上任意兩點M,(x_1)與$M_2(x_2)$，下列等式恒成立.

$$M_1M_3=x_2-x_1$$

證明.　由於基本恒等式（$n^0 3$）

$$OM_1+M_1M_2=OM_2$$

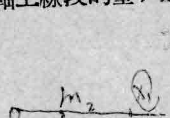
所以　$M_1M_2=OM_2-OM_1$

而　$OM_2=x_2, OM_1=x_1$

所以　$M_1M_2=x_2-x_1$

這就是所要求的證明.

這個定理可以叙述爲：求軸上線段的量，是從它的終點的座標減去它的始點的座標.



定理2．如果 M_1 (x_1) 與M_2 (x_2) 是軸上的任意兩點， d 又是 它 們 間 的距離，則

$$d=|x_2-x_1|$$

證明．由前面的定理

$$M_1M_2=x_2-x_1$$

而兩點M_1與M_2間的距離是線段$\overline{M_1M_2}$的量的絕對值，所以

$$d=|x_2-x_1|.$$

定理得到證明．

註．因爲數 x_2-x_1與x_1-x_2 的絕對值相同，所以可寫成 $da=|x_2-x^1|$ 或 $d=|x_1-x_2|$，因此上面的定理可以敘述爲：軸上任意兩點間的距離，是這兩點座標的差的絕對值．

例1．已知點A(5)，B(−1)，C(−8)，D(2)，求線段$\overline{AB}$，$\overline{CD}$與$\overline{DB}$的量．

解．由定理1，則

$$AE=-|-5=-6$$

$$CD=2-(-8)=10$$

$$DE=-1-2=-3$$

例2．求兩點?(3)與q(−2)間的距離．

解．　$d=|-2-|3|=5$

7．如果在任意軸上導入座標系，則軸上的每個點有一個完全確定的座標；反之不論我們取個甚麼（實）數則在軸上便可求得完全確定的一點M而它的座標爲x．此時可以說點M表示數 x．按照x°5 所述的方法、導入座標的軸上的點表示所有的實數；這樣的軸，叫做數軸．在圖3上表示數軸與一些個整數． ——

圖　3

這樣用軸上的點來表 示 數 的 規定，對於數軸上所有的數可給以幾何的引證，同時就有可能把算術關係式

用幾何術語來表示,例如不等式$3<x<5$的所有解,可以很明顯的表示爲軸上兩點之間的點,而兩點之一個是表示數3的點(就是宅的座標等於3),另一個是表示數5的點(就是宅的座標等於5),這種情形、可以說不等式$3<x<5$確定以點3與5爲界的區間(數軸的)、

用幾何術語表示算術關係式的方法是很方便的,並且在數學的各科中經常利用宅.

習　題　一.

1. 在數軸上描次列三點

   $A(3)$, $B(\sqrt{2})$, $C(-\sqrt{5})$.

2. 已知兩點$A(-1)$與$B(3)$,試求線段$\overline{AB}$的量與長度$|AB|$.

3. 求點A的座標,而已知.

   (1) $B(2)$與$\overline{AB}=-3$; (2) $B(-5)$與$|AB|=2$.

4, 描座標滿足下列方程式的各點

   (1) $|x|=2$; (2) $|x-1|=3$; (3), $|1-x|=2$;

   (4) $|2+x|=2$.

5. 說明座標滿足下列不等式的各點的幾何位置.

   (1) $x>2$; (2) $2x-3\leq 0$; (3) $-2\leq x\leq 3$; (4) $\frac{2x-1}{x-2}>1$;

   (5) $x^2+x-2=>0$; (6) $|x|<1$; (7) $|x-1|\geqq 2$.

6. 求已知點$M(x)$而分兩已知點$M_1(x_1)$與$M_2(x_2)$間的線段的比爲$\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}$.

7. 求兩點$A(-5)$與$B(1)$間的線段的中點的座標.

8. 已知兩點$M_1(2)$與$M_2(-5)$及$\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}=3$,求分割點M的座標.

§3. 平面上的笛卡兒直角座標.

8. 如果規定方法用已知數確定平面上點的位置,則說在平面上導入座標系.

現在研究極簡單而且比較適用的座標系就是笛卡兒直角座標系.

笛卡兒直角座標系、確定於已知的測量長度用的長度單位與兩個互相垂直（就是指定正向的直線）且有一定順序（就是指定共中那一個，爲第一個，那一個爲第二個）的軸.

兩軸的交點叫做座標原點，且這樣的軸叫做座標軸、並且共中第一個叫做橫軸、第二個叫做縱軸，

用字母O表示座標原點，用字母Ox表示橫軸，用字母Oy表示縱軸、在圖上字母x,y是寫在共對應軸的近傍和從點O起的正向上，並且是在描出軸的末端；因此在圖上o與x的順序是表示橫軸的方向，而O與y的順序是表示縱軸的方向，這樣就不必用矢表示軸的正向；因此今後在圖中的座標軸上不再加以矢.

設M爲平面上任意點，射影M於座標軸上，就是從點M引直線Ox與Oy的垂線，宅們的垂足分別用Mx與My表示（圖4）.

在已知座標系，點M的座標是數

$x=OMx$, $y=OMy$,

在這裏OMx爲橫軸上線段 $\overline{OMx}$ 的量，OMy爲縱軸上線段$\overline{OMy}$的量. 數x叫做點M的第一座標，或橫座標，數y叫做點M的第二座標或縱座標，

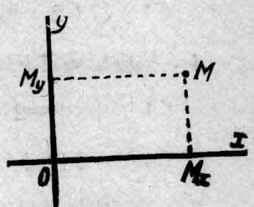


圖 4

在本講義中是將座標寫在表示該點的字母後邊的括弧裏，例如M（x,y）如果同時研究一些點，需用同一字母而記以不同的註碼來表示宅們，例如M_1，M_2,…Mn，並此時這些點的座標也用同一字母分別記以註碼來表示，而把所研究的點寫爲M_1（x_1,y_1）M_2（x_2,y_2）…,Mn（x_n,yn）

9. 如果已知笛卡兒直角座標系、則於這個座標系中，平面上的每個點有完全確定的一對座標 x_1y，反之，對於任意兩個（實）數 x_1y，則在平面上可以求得完全確定的一點，共橫座標於已知的座系等於x，縱座標系等於y，爲了按座標描出該點，必須在橫軸上從座標原點起截取線段$\overline{OMx}$，而使宅的量等於x，在縱軸上從座標原

點起截取線段$\overline{OMy}$，而使它的量等於y，（所截取線段的方向，確定於數x,y 的符號）；然後自Mx 引平行於軸Oy 的直線，自My 引平行於軸Ox 的直線，此二直線的交點，就是所求的點M.

10. 在n°5中曾敍述過關於在直線上導入座標系的問題，現在在座標軸 Ox 與 Oy上導入座標系，並且不變原來的長度單位及軸Ox與Oy 的方向，又取點O 作爲每個軸的座標原點.

研究平面上任意點M與它在軸Ox上的射影Mx.

點Mx在軸Ox上的座標，等於線段$\overline{OMx}$的量 OMx，這個量也就是點M的橫座標（n°8），因此可以說：點M的橫座標等於點Mx在橫軸Ox上的座標，同理點M的縱座標等於點My在縱軸Oy上的座標. 顯然這兩個結論是非常重要的，因爲當研究平面上的點時，根據它們便可應用定理1與2（n°6），而這兩個定理是明說直線上座標系的性質的.

11. 爲了便於作成以後的敍述，現在說明幾個術語. 軸Oy分平面爲兩個半平面，在軸Ox正向的叫做右方半平面，另一個叫做左方半平面.

同樣軸Ox也分平面爲兩個半平面，在軸Oy正向的叫做上方半平面，另一個叫做下方半平面.

12. 設點M是右方半平面上的任意點；此時軸Ox上的線段$\overline{OMx}$的方向是正的，因此點M的橫座標x＝OMx爲正數；如還點M在左方半平面上，則軸 Ox 上的線段$\overline{OMx}$的方向是負的，所以數x＝OMx爲負的；最後當點M在軸Oy 上時，它在軸Ox上的射影Mx與點O重合並且x＝OMx 是零，因此右方半平面上所有點的橫座標爲正數（x＞o），左方半平面上所有點的橫座標爲負數（x＜o），在軸Oy 上點的橫座標等於零（x＝o）.

同理可以推知上方半平面上所有點的縱座標爲正數（y＞o），下方半平面上所有點的縱座標爲負數（y＜o），在軸Ox上點的縱座標等於零（y＝o）.

應該注意，座標原點O是兩個軸交點，它的兩個座標爲x＝o，y＝o，並且這

是它的特徵（就是兩個座標都等於零的點只有點O）.

13. 兩個座標軸分平方面爲四部分，叫做四個象限，每個象限如圖5所示.

設某一點的座標爲x，y. 時，由以上規定

若$x>0$，$y>0$，則點M在第一象限內，

若$x<0$，$y>0$，則點M在第二象限內，

若$x<0$，$y<0$，則點M在第三象限內，

若$x>0$，$y<0$，則點M在第四象限內，

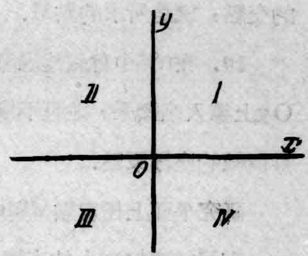


圖 5

由於所研究的四個象限，很容易按點的座標的符號，確定它的位置.

習　題　二.

1. 描次列諸點

A (2,3)，B (−5,1)，C (0,3)，D (−5,0)，E (−2,−3)

2. 求點 (−5,−1) 在橫軸上的射影的座標.

3. 求點 (−3,2) 在縱軸上的射影的座標.

4. 求與點 (−4,6) 關於軸Ox對稱點的座標.

5. 求與點 (3,−5) 關於軸Oy對稱點的座標.

6. 求與點 (−5,−4) 關於座標原點對稱點的座標.

7. 求與點 (2,3) 關於第一座標角的平分線對稱點的座標.

8. 求與點 (−4,3) 關於第二座標角的平分線對稱點的座標.

9. 確定點M (x, y) 所在的象限，而已知:

(1). $xy>0$；(2). $xy<0$；(3). $x-y=0$；(4). $x+y=0$；

(5). $x+y>0$；(6). $x+y<0$；(7). $x-y>0$；(8). $x-y<0$；

§4. 關於笛卡兒斜角座標的概念. 極座標.

14. 我們已經熟悉了笛卡兒直角座標系。這種座標系是常使用的。然而在個別

的情況下，當研究特殊問題時，使用其他座標系較為方便．

現在我們 ~~在本節中將~~ 簡略研究兩座標軸間是任意角的笛卡兒座標。這種座標系，確定於已知的長度單位，與於O點相交成任意角（除掉O與180°）的兩個軸 Ox，Oy。設M為平面上的任意點．自M引平行與軸 Ox．Oy二直線而與軸 Ox，Oy，的交點分別用Mx，My 表示．（圖６）

於定軸 ~~已~~ 知座標系中，點的座標是數

$$x=OMx \qquad y=OMy$$

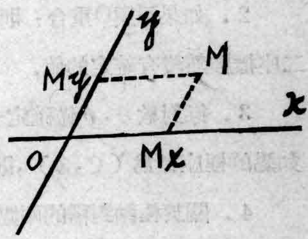


圖　６

在這裏OMx是軸 Ox上線段$\overline{OMx}$的量，OMy是軸Oy 上線段$\overline{OMy}$的量．

於特殊情形，當軸Ox，Oy 間的角是直角時，則現在所說的座標系就變為笛卡兒直角座標系、如果兩軸Ox與Oy 間的角不是直角時，則這種座標系叫做軸卡兒斜角座標系、以後在本講義中是不使用笛卡兒斜角座標系．

15．再研究所謂極座標系；它是特別便利而且是常使用的．

極座標系確定於已知某點 O（極）與從這個點所引的射線 OA（極軸）及為了測量長度用的單位．此外於已知極座標系，必須說明繞點O怎樣旋轉才算是正旋轉，關於此點我們仍看做反時針旋轉為正旋轉．

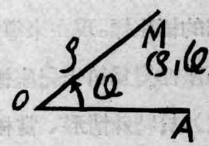


圖　７

設已知極與極軸（圖７），研究任意點M並用 ρ 表示它自點O的距離（$\rho=|OM|$），用 θ 表示旋轉射線OA與射線OM重合時所形成的角（$\theta=\angle AOM$），

θ 像三角法中所用的角一樣（因此，點M不完全確定角 θ 而只差形式為 $\pm 2n\pi$ 的加數）．

數 ρ 與 θ 叫做點M的極座標（關於已知座標系），同時 ρ 叫做第一座標或極徑，數 θ 叫做第二座標或極角（幅角）

註　１．在點M的極角所有可能值中，其滿足不等式