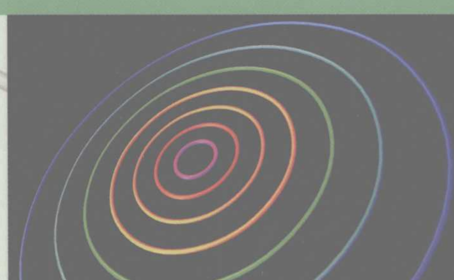
高 等 学 校 教 材

微分几何

纪永强 编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

微分几何

纪永强 编著

高等教育出版社

内容简介

本书主要讲述了经典微分几何中曲线和曲面的局部理论。全书共分为三章：第一章作为预备知识，介绍了三维矢量空间和三维内积空间及有关性质，以及平面及空间中的正交变换及刚体变换，主要讲清了这些量的几何特征。第二章是曲线的局部微分几何，叙述了曲线的基本理论，包括曲线的基本公式与曲线的存在唯一性定理以及各种特殊的曲线。第三章是曲面的局部微分几何，叙述曲面的基本理论，包括曲面的第一、第二与第三基本形式，还有曲面的各种曲率及曲面上的各种特殊曲线，另外还着重讨论了曲面的基本公式、基本方程以及曲面的存在唯一性定理和各种特殊的曲面。

本书可作为综合大学和师范院校数学类专业的微分几何课程的教材，还可供其他学习微分几何课程的广大读者作为教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

微分几何/纪永强编著.—北京:高等教育出版社，2009.11

ISBN 978-7-04-026270-4

Ⅰ.微… Ⅱ.纪… Ⅲ.微分几何 Ⅳ.O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 183260 号

策划编辑	李　蕊	责任编辑	董达英	封面设计	于　涛
责任绘图	宗小梅	版式设计	马敬茹	责任校对	杨凤玲
责任印制	毛斯璐				

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2009年11月第1版
印　　张	17.5	印　　次	2009年11月第1次印刷
字　　数	320 000	定　　价	22.70元

物料号　26270-00

前　言

微分几何已有悠久的历史，自从 Newton（1643—1727，英国）与 Leibniz（1646—1716，德国）建立了微积分学以后，就产生了微分几何，虽然微分几何已有三百多年的发展史，但至今其蓬勃发展的势头仍不减。它的产生和发展与数学分析有着不可分割的联系，数学分析中的许多问题正是由几何问题引出的。微分几何成为一门独立的学科始于 Gauss（1777—1855，德国），1827 年 Gauss 发表了《关于曲面的一般研究》一文，奠定了近代形式的曲面论的基础，他是从解决绘制地图问题的实际要求出发的。

微分几何包括两部分：局部的与整体的（或大范围的）。现代微分几何是研究整体性质的，然而为了搞清楚整体性质，首先必须研究局部性质。本书着重于论述曲线与曲面的局部性质。

在高等学校数学系的教学改革中，基础课的教学内容与教学方法的改革和现代化始终是教学改革的中心环节。我们在长期的教学实践中，不断地总结经验，同时借鉴了我国一些著名数学家的重要思想、观点和方法，对现行基础课的教学内容与体系进行了调整与改革，增强了基础课的基本系统性和完整性，为学生打开一个通向现代数学的窗口。

本书是笔者长期教改实践的研究成果，许多内容曾在本科教学中多次试用、反复实践，且本人长期从事微分几何方面的科研工作，在科研中取得了诸多相关成果。本书将矢量方法、张量方法与活动标架法这些微分几何的重要方法有机地融入经典内容之中，书中还包括许多改革与创新之处，体现了笔者近年来的科研思想与成果。

本书的主要特色在于突出几何直观，强调几何量的概念，使学生对微分几何学有一个较为完整的初步认识，为学生学习现代数学、现代物理学以及其他与几何密切相关的应用科学提供良好基础。同时广泛地应用了线性代数的基本知识及矩阵的运算手段，论证严谨简明，叙述深入浅出，条理清晰。而且本书每节都提供了典型的例题，且注重了一题多解。实践证明，本教材中所采用的方法具有良好的可操作性，既便于教又易于学。

本书得到了浙江省新世纪高等教育教学改革研究项目的资助。

由于作者水平有限，书中缺点和错误在所难免，诚恳地希望专家及广大读者批评指正。

纪永强

2009 年 6 月

郑重声明

目　录

第一章　预备知识

我们用 $\mathbf{R}$ 表示实数集，$\mathbf{R}^2$ 表示平面，$\mathbf{R}^3$ 表示空间，符号 $\triangleq$ 表示定义为，符号 $\triangleq$ 表示记作，符号 $\Leftrightarrow$ 表示充要条件. 我们用黑体字母 $\boldsymbol{r}$ 表示矢量，在板书时用 $\vec{r}$ 表示矢量.

§1.1　三维矢量空间和三维内积空间及有关性质

1. $\mathbf{R}^3$ 是三维矢量空间

令

$$\mathbf{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbf{R}\},$$

即集合 $\mathbf{R}^3$ 中的元素是有序实数组.

设 $\boldsymbol{r}_1 = (x_1,y_1,z_1) \in \mathbf{R}^3$，$\boldsymbol{r}_2 = (x_2,y_2,z_2) \in \mathbf{R}^3$，$\lambda \in \mathbf{R}$，则 $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_2$ 的和以及数 λ 与 $\boldsymbol{r}_1$ 的积由下式定义：

$$\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 \triangleq (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), \lambda \cdot \boldsymbol{r}_1 \triangleq (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1),$$

易证集合 $\mathbf{R}^3$ 带上以上两种运算 $(\mathbf{R}^3, +, \cdot)$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的三维矢量空间，简记为 $\mathbf{R}^3$.

$$\boldsymbol{i} = (1,0,0), \boldsymbol{j} = (0,1,0), \boldsymbol{k} = (0,0,1)$$

是 $\mathbf{R}^3$ 的一个固定基，称 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的直角标架或坐标系，或记作 $O-xyz$.

为了与后面将要讲到的矢量之间的另一种运算——内积相区别，本书中凡出现数与矢量相乘的地方，运算符号“·”都略去不写.

加法与数乘满足以下运算律：

(1) $\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1$;

(2) $(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2) + \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_1 + (\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3)$;

(3) $\lambda(\mu \boldsymbol{r}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{r}$;

(4) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{r} = \lambda \boldsymbol{r} + \mu \boldsymbol{r}$;

(5) $\lambda(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2) = \lambda \boldsymbol{r}_1 + \lambda \boldsymbol{r}_2$.

2. $\mathbf{R}^3$ 是内积空间

定义 1.1.1　矢量空间 $\mathbf{R}^3$ 上的内积是函数 $g: \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$，满足

(1) 对称性：$g(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = g(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1)$;

(2) 正定性:$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}) \geqslant 0$,且 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$;

(3) 双线性:$g(\lambda_1 \boldsymbol{r}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}) = \lambda_1 g(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}) + \lambda_2 g(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r})$,

$$g(\boldsymbol{r},\lambda_1 \boldsymbol{r}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{r}_2) = \lambda_1 g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1) + \lambda_2 g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_2),$$

其中 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2 \in \mathbf{R}^3$;$\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbf{R}$. 设$\boldsymbol{r}_1 = (x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{r}_2 = (x_2,y_2,z_2)$是 $\mathbf{R}^3$ 中的两个矢量,a_1,a_2,a_3 是任意取定的三个正数,我们定义$\boldsymbol{r}_1$与$\boldsymbol{r}_2$的内积如下:

$$g(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) \triangleq a_1x_1x_2 + a_2y_1y_2 + a_3z_1z_2. \tag{1.1.1}$$

容易证明,g 是 $\mathbf{R}^3$ 的内积. 可见矢量空间 $\mathbf{R}^3$ 有无穷多种内积. 当 $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ 时,此内积称为通常的内积,可用点积来表示,即

$$g(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{1.1.2}$$

易得,点积(内积)满足如下的运算律:

(1) $\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_1$,

(2) $(\lambda \boldsymbol{r}_1) \cdot \boldsymbol{r}_2 = \lambda(\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2)$,

(3) $(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2) \cdot \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_3$.

上面运算律(1)表示点积满足对称性,运算律(2)和运算律(3)表示点积对第一个变元是线性的.

有了内积,可定义矢量的长度以及两矢量之间的距离. 设 $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$是 $\mathbf{R}^3$ 中的矢量,$\boldsymbol{r}$ 的长度

$$|\boldsymbol{r}| \triangleq \sqrt{g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})} = \sqrt{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{1.1.3}$$

设$\boldsymbol{r}_1 = (x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{r}_2 = (x_2,y_2,z_2)$是 $\mathbf{R}^3$ 中的两个矢量,$\boldsymbol{r}_1$与$\boldsymbol{r}_2$之间的距离

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) &\triangleq \sqrt{g(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)} = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

从而 $\mathbf{R}^3$ 就是距离(度量)空间,而且

$$|\boldsymbol{r}_1| = d(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{0}) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}. \tag{1.1.5}$$

矢量 $\boldsymbol{r}$ 是单位矢量:$|\boldsymbol{r}| = 1$ 的充要条件是:

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}) = 1, \text{即} \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} \triangleq \boldsymbol{r}^2 = 1. \tag{1.1.6}$$

两矢量$\boldsymbol{r}_1$与$\boldsymbol{r}_2$正交:$\boldsymbol{r}_1 \perp \boldsymbol{r}_2$的充要条件是:

$$g(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = 0, \text{即} \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = 0. \tag{1.1.7}$$

可以验证

$$g(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = |\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2|\cos\angle(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) \tag{1.1.8}$$

也满足内积的三个条件,所以(1.1.8)式也是空间或平面上矢量的内积.

我们还可以定义一种新的矢量,$\boldsymbol{r}_1$与$\boldsymbol{r}_2$的叉积(外积) $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$如下:

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 \triangleq [\,|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2|\sin\angle(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\,]\boldsymbol{e}, \tag{1.1.9}$$

其中$|\boldsymbol{e}| = 1$,$\boldsymbol{e} \perp \boldsymbol{r}_1$,$\boldsymbol{e} \perp \boldsymbol{r}_2$,且$\boldsymbol{r}_1$,$\boldsymbol{r}_2$,$\boldsymbol{e}$ 成右手系. $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$用分量表示是:

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = (y_1z_2 - y_2z_1)\boldsymbol{i} + (z_1x_2 - z_2x_1)\boldsymbol{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\boldsymbol{k}, \tag{1.1.10}$$

其中 $\boldsymbol{i} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{j} = (0,1,0)$, $\boldsymbol{k} = (0,0,1)$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中成右手系的标准正交基，即

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1, \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0, \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.$$

注 $\boldsymbol{r}_1$与$\boldsymbol{r}_2$的叉积$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$是一个既垂直于$\boldsymbol{r}_1$又垂直于$\boldsymbol{r}_2$的矢量，所以$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$是由$\boldsymbol{r}_1$和$\boldsymbol{r}_2$确定的平面上的一个法矢量，$\boldsymbol{r}_1$与$\boldsymbol{r}_2$的叉积也可以记作$\boldsymbol{r}_1\wedge\boldsymbol{r}_2$.

有了叉积和点积，我们可以定义三个矢量的混合积. $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$的混合积$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)$定义为

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3) \triangleq (\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot\boldsymbol{r}_3. \tag{1.1.11}$$

混合积的分量表示式就是

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \tag{1.1.12}$$

其中$\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{R}^3$, $i = 1,2,3$. 显然$(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}) = 1$.

注 几何上，当$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$与$\boldsymbol{r}_3$不共面时，$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)$的绝对值表示由$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$和$\boldsymbol{r}_3$所张成的平行六面体的体积.

外积和混合积满足下面的运算律：

(1) $\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_1 = -\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$;

(2) $(\lambda\boldsymbol{r}_1)\times\boldsymbol{r}_2 = \lambda(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)$;

(3) $(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3$;

(4) $(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3) = (\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_1) = (\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$
$= -(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_3) = -(\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1) = -(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_2)$;

(5) $(\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_4) = \lambda_1(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_4) + \lambda_2(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_4)$.

上面运算律(1)表示外积满足反交换律，运算律(2)和运算律(3)表示外积关于第一个变元是线性的. 运算律(4)是混合积的轮换定理，运算律(5)表示混合积关于第一个变元是线性的，同理关于第二和第三个变元也是线性的.

3. 关于矢量的一些公式

公式1（三矢量的二重外积公式）

(1) $(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{r}_3 = (\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{r}_2 - (\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{r}_1$, (1.1.13)

(2) $\boldsymbol{r}_1\times(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3) = (\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{r}_2 - (\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{r}_3$. (1.1.14)

显然外积不满足结合律.

公式 2（Lagrange 恒等式）

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_4)=(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_4)-(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_4)(\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3),\tag{1.1.15}$$

特别地，

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)^2=\boldsymbol{r}_1^{\ 2}\boldsymbol{r}_2^{\ 2}-(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2)^2.\tag{1.1.15$'$}$$

可以证明，(1.1.13)式与(1.1.15)式等价，(1.1.13)式是矢量的等式，(1.1.15)式是数量的等式.

公式 3（四个矢量的三重外积公式）

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\times(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_4)&=(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_4)\,\boldsymbol{r}_2-(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_4)\,\boldsymbol{r}_1\\&=(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_4)\,\boldsymbol{r}_3-(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)\,\boldsymbol{r}_4.\end{aligned}\tag{1.1.16}$$

公式 4（行列式的一个数量等式）

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_4,\boldsymbol{r}_5,\boldsymbol{r}_6)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_4 & \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_5 & \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_6\\ \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_4 & \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_5 & \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_6\\ \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_4 & \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_5 & \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_6\end{vmatrix}.\tag{1.1.17}$$

公式 5（六个矢量的一个数量等式）

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_4,\boldsymbol{r}_5\times\boldsymbol{r}_6)\\&=(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_4)(\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_5,\boldsymbol{r}_6)-(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_4,\boldsymbol{r}_5,\boldsymbol{r}_6).\end{aligned}\tag{1.1.18}$$

特别地，

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1)=(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)^2.\tag{1.1.18$'$}$$

4. 共线矢量与共面矢量的充要条件（几何与代数的关系）

(1) 设$\boldsymbol{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$和$\boldsymbol{r}_2=(x_2,y_2,z_2)$都是非零矢量，则$\boldsymbol{r}_1$与$\boldsymbol{r}_2$平行（共线）：

$\boldsymbol{r}_1/\!/\boldsymbol{r}_2$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{r}_1$与$\boldsymbol{r}_2$线性相关：$\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{0}$ $(\lambda_1\lambda_2\neq 0)$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{r}_2$是$\boldsymbol{r}_1$的线性组合：$\boldsymbol{r}_2=\lambda\boldsymbol{r}_1$ $(\lambda\neq 0)$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{r}_1$与$\boldsymbol{r}_2$的外积是零矢量：$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{0}$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{r}_1$与$\boldsymbol{r}_2$的对应坐标成比例：$\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$.

(2) 设$\boldsymbol{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$、$\boldsymbol{r}_2=(x_2,y_2,z_2)$、$\boldsymbol{r}_3=(x_3,y_3,z_3)$是两两不共线的非零矢量，则 三矢量$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$和$\boldsymbol{r}_3$共面的充要条件是：$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$和$\boldsymbol{r}_3$线性相关，即

$\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2+\lambda_3\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{0}$ $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq 0)$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{r}_3$是$\boldsymbol{r}_2$与$\boldsymbol{r}_1$的线性组合：$\boldsymbol{r}_3=\lambda\boldsymbol{r}_1+\mu\boldsymbol{r}_2$ $(\lambda\mu\neq 0)$

$\Leftrightarrow$ 三矢量$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$和$\boldsymbol{r}_3$的混合积为零：$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)=0$

$\Leftrightarrow$ 三矢量$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$和$\boldsymbol{r}_3$的坐标构成的三阶行列式为零：$\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=0.$

易见下面定理成立.

定理 1.1.1 三非零变矢量$\boldsymbol{e}_1(t),\boldsymbol{e}_2(t),\boldsymbol{e}_3(t)$是 $\mathbf{R}^3$ 中成右手系的标准正交基的充要条件是:

$$\boldsymbol{e}_i(t)\cdot\boldsymbol{e}_j(t)=\delta_{ij},i,j=1,2,3,\text{且}(\boldsymbol{e}_1(t),\boldsymbol{e}_2(t),\boldsymbol{e}_3(t))=1.$$

它还等价于

$$\boldsymbol{e}_1(t)\times\boldsymbol{e}_2(t)=\boldsymbol{e}_3(t),\boldsymbol{e}_2(t)\times\boldsymbol{e}_3(t)=\boldsymbol{e}_1(t),\boldsymbol{e}_3(t)\times\boldsymbol{e}_1(t)=\boldsymbol{e}_2(t).$$

习题 1-1

1. 设$\boldsymbol{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$、$\boldsymbol{r}_2=(x_2,y_2,z_2)$是 $\mathbf{R}^3$ 中的两个矢量, a_1,a_2,a_3 是任意给定的三个正数,定义$\boldsymbol{r}_1$与$\boldsymbol{r}_2$的内积如下:

$$g(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\stackrel{\Delta}{=}a_1x_1x_2+a_2y_1y_2+a_3z_1z_2,$$

证明 g 是 $\mathbf{R}^3$ 的内积.

2. 证明:二重矢性积的公式

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{r}_3=(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{r}_2-(\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{r}_1$$

等价于 Lagrange 恒等式

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_4)=(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_4)-(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_4)(\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3).$$

3. 证明下面公式成立:

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_4,\boldsymbol{r}_5,\boldsymbol{r}_6)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_4 & \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_5 & \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_6\\ \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_4 & \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_5 & \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_6\\ \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_4 & \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_5 & \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_6\end{vmatrix}.$$

4. 设$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$ 不共面,证明对任意矢量 $\boldsymbol{r}$,有

$$\boldsymbol{r}=\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_1)}{(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)}\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3+\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_2)}{(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)}\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1+\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_3)}{(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)}\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2.$$

§1.2 平面和空间中的正交变换和刚体变换公式

1. 平面及空间中的线性函数与线性映射和线性变换公式

定义 1.2.1 两矢量空间之间的映射 $\boldsymbol{F}:(V;+,\cdot)\to(W;+,\cdot)$称为线性映射,若

$$\boldsymbol{F}(a\boldsymbol{x}+b\bar{\boldsymbol{x}})=a\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})+b\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}),\tag{1.2.1}$$

其中 $\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}\in V;a,b\in\mathbf{R}$,当 $W=V$ 时,$\boldsymbol{F}$ 叫线性变换;当 $W=\mathbf{R}$ 时,$\boldsymbol{F}$ 叫矢量空间 V 上的线性函数;当 $V=\mathbf{R}$ 时,$\boldsymbol{F}$ 叫矢量空间 W 上的线性曲线; $V=\mathbf{R}^2$ 时,$\boldsymbol{F}$ 叫矢量空间 W 上的线性曲面.

我们的目的是给出空间 $\mathbf{R}^3$ 中的线性函数和线性曲面及线性变换公式,以及平面 $\mathbf{R}^2$ 中的线性函数和线性变换公式,并给出它们的几何特征.

定理 1.2.1 n 元函数 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是线性函数的充要条件是：

对任意 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{e}_i\in\mathbf{R}^n$，有

$$f(\boldsymbol{x})\triangleq f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n. \qquad (1.2.2)$$

其中 $\boldsymbol{e}_i=(0,\cdots,0,\underset{(i)}{1},0,\cdots,0)(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基，$a_i=f(\boldsymbol{e}_i)$.

注 为了更清楚地看清定义域的维数，我们写 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是指 f 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上或定义在 $\mathbf{R}^n$ 的某个子集上的值为实数的函数. 全体 n 元线性函数构成的集合记为 $L(\mathbf{R}^n;\mathbf{R})$. 由定理 1.2.1 我们得常用的两类线性函数如下：

例 1 一元函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是线性函数：$f\in L(\mathbf{R};\mathbf{R})$ 的充要条件是：对于任意的实数 $x\in\mathbf{R}$，有

$$f(x)=ax,$$

即只有正比例函数或零函数是线性函数，它的图像是过原点的以 a 为斜率的直线. 而一次函数 $y=ax+b(b\neq0)$ 不是线性函数.

易见，$L\triangleq\{(x,ax)\mid x\in\mathbf{R}\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的一维(线性)子空间，而 $L^\perp\triangleq\{(ax,-x)\mid x\in\mathbf{R}\}$ 是它的直交补空间，且 $L\oplus L^\perp=\mathbf{R}^2$.

例 2 二元函数 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是线性函数：$f\in L(\mathbf{R}^2;\mathbf{R})$ 的充要条件是：对于任意的 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$，有

$$f(\boldsymbol{x})\triangleq f(x_1,x_2)=a_1x_1+a_2x_2,$$

即 $z=a_1x+a_2y$，它是空间 $\mathbf{R}^3$ 中经过原点的平面的一般方程. 而 $z=x^2+y^2$(旋转椭圆抛物面)不是二元线性函数.

易见，$\pi\triangleq\{(x_1,x_2,a_1x_1+a_2x_2)\mid x_1,x_2\in\mathbf{R}\}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的二维(线性)子空间，几何上，它是经过原点，以 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,a_1)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1,a_2)$ 为方位矢量的平面；它的直交补空间是

$$\pi^\perp\triangleq\left\{(x_1,x_2,x_3)\;\middle|\;\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\frac{x_3}{-1};x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R}\right\}$$
$$=\{(a_1t,a_2t,-t)\mid t\in\mathbf{R}\}.$$

$\pi^\perp$ 是经过原点垂直于平面 π 的直线，并且 $\pi\oplus\pi^\perp=\mathbf{R}^3$. 几何上，一元矢量方程

$$\boldsymbol{r}=(a_1t,a_2t,-t)=t(a_1,a_2,-1)\triangleq t\boldsymbol{e},t\in\mathbf{R}$$

和方程组

$$x=a_1t,y=a_2t,z=-t,t\in\mathbf{R}$$

分别表示直线 $\pi^\perp$ 的参数方程的矢量形式和坐标形式. 而

$$\frac{x}{a_1}=\frac{y}{a_2}=\frac{z}{-1}$$

是直线 $\pi^\perp$ 的标准方程.

定理 1.2.2 设映射 $\boldsymbol{F}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 为 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x}))$，则 $\boldsymbol{F}$

是线性映射：$F \in L(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^m)$的充要条件是：$m$ 个分量函数 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 是 n 元线性函数：$f_i \in L(\mathbf{R}^n;\mathbf{R})$.

由定理 1.2.1 和定理 1.2.2 可得从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的线性映射的公式是：

对任意的 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$，有

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i, \sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n} a_{mi}x_i\right), \tag{1.2.3}$$

即

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i, \quad j = 1, 2, \cdots, m. \tag*{(1.2.3)$'$}$$

其中 $a_{ji}=f_j(\boldsymbol{e}_i)$，$\boldsymbol{e}_i \in \mathbf{R}^n$. 线性映射的表达式(1.2.3)′可以写成矩阵形式.

由此我们得几何中的线性曲线和线性曲面如下：

例 3 $\boldsymbol{F}:\mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^2$ 是平面 $\mathbf{R}^2$ 中的线性曲线：$\boldsymbol{F} \in L(\mathbf{R}^1;\mathbf{R}^2)$的充要条件是：对任意的 $t \in \mathbf{R}$，有

$$\boldsymbol{F}(t) = (a_1 t, a_2 t) \triangleq (x, y),$$

这是平面 $\mathbf{R}^2$ 中过原点的以 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$为方向矢量的直线的参数方程，一般方程为 $a_2 x - a_1 y = 0$.

例 4 $\boldsymbol{F}:\mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^3$ 是空间 $\mathbf{R}^3$ 中的线性曲线：$\boldsymbol{F} \in L(\mathbf{R}^1;\mathbf{R}^3)$的充要条件是：对任意的 $t \in \mathbf{R}$，有

$$\boldsymbol{F}(t) = (a_1 t, a_2 t, a_3 t) \triangleq (x, y, z),$$

这是空间 $\mathbf{R}^3$ 中过原点的以 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$为方向矢量的直线的参数方程，一般方程(标准方程)为$\dfrac{x}{a_1}=\dfrac{y}{a_2}=\dfrac{z}{a_3}$.

注 空间 $\mathbf{R}^3$ 中曲线的参数方程是：$\boldsymbol{F}:\mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^3$，$\boldsymbol{F}(t)=(x(t), y(t), z(t))$.

例 5 $\boldsymbol{F}:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ 是空间 $\mathbf{R}^3$ 中的线性曲面：$\boldsymbol{F} \in L(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^3)$的充要条件是：对于任意的$(u, v) \in \mathbf{R}^2$，有

$$\boldsymbol{F}((u, v)) = (a_{11}u + a_{12}v, a_{21}u + a_{22}v, a_{31}u + a_{32}v) \triangleq (x, y, z),$$

这是空间 $\mathbf{R}^3$ 中过原点的以 $\boldsymbol{a}=(a_{11}, a_{21}, a_{31})$和 $\boldsymbol{b}=(a_{12}, a_{22}, a_{32})$为方位矢量的平面的参数方程. 消去参数 u, v 可得该平面的一般方程.

具体例子：$\boldsymbol{F}((u, v))=(u, u+v, u-v)$是 $\mathbf{R}^3$ 中的线性曲面，一般方程是 $y + z = 2x$.

注 空间 $\mathbf{R}^3$ 中曲面的参数方程是：

$$\boldsymbol{F}:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3, \boldsymbol{F}((u, v)) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

由(1.2.3)′式我们得

定理 1.2.3 设 $\boldsymbol{F}:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 为 $\boldsymbol{F}((u, v))=(x(u, v), y(u, v))$，则 $\boldsymbol{F}$ 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上的线性变换的充要条件是：

$$F((u,v)) = (a_{11}u + a_{12}v, a_{21}u + a_{22}v), \tag{1.2.4}$$

即

$$\begin{cases} x = a_{11}u + a_{12}v \\ y = a_{21}u + a_{22}v \end{cases}, \quad 或 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \triangleq A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{1.2.4$'$}$$

若 $\boldsymbol{F}$ 的 Jacobi(1804—1851,普鲁士)矩阵 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{F})$ 的行列式不为零,即

$$|\boldsymbol{J}(\boldsymbol{F})| \triangleq \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.2.5}$$

则称 $\boldsymbol{F}$ 是非退化的线性变换,容易证明非退化的线性变换 $\boldsymbol{F}$ 是一一变换.

注 平面 $\mathbf{R}^2$ 上的非退化变换是:$\boldsymbol{F}: D \subseteq \mathbf{R}^2 \to \boldsymbol{F}(D) \triangleq D' \subseteq \mathbf{R}^2$,

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}, \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0. \tag{1.2.6}$$

例 6 设 $\boldsymbol{F}: (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \subset \mathbf{R}^2$ 为

$$\boldsymbol{F}((u,v)) = (u \cos v, u \sin v) \triangleq (x,y),$$

这是平面上的极坐标变换,由定理 1.2.3 知,它不是线性变换. 因为 $|\boldsymbol{J}(\boldsymbol{F})| = u \neq 0$,所以它是平面上的非退化的变换. 在此变换下, uv 平面上的线段:$u = u_0$, $v \in [0, 2\pi)$ 对应于 xOy 平面上的圆:$x^2 + y^2 = u_0^2$.

注 对于空间 $\mathbf{R}^3$ 中的线性变换 $\boldsymbol{F} \in L(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^3)$,有相应的公式.

2. 正交变换

定义 1.2.2 内积空间($\mathbf{R}^3, g$)中的变换 $\boldsymbol{F}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ 称为正交变换,若

(1) $\boldsymbol{F}$ 是线性变换:$\boldsymbol{F} \in L(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^3)$,即 $F(a\boldsymbol{x} + b\bar{\boldsymbol{x}}) = aF(\boldsymbol{x}) + bF(\bar{\boldsymbol{x}})$;

(2) $\boldsymbol{F}$ 是保长变换:$g(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})) = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$,即 $|F(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{x}|$,

其中 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3, \bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{R}^3; a, b \in \mathbf{R}; g$ 是任意正定内积.

由定义我们得正交变换的三个等价条件如下:

定理 1.2.4 变换 $\boldsymbol{F}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ 为正交变换的充要条件是:

(1) $\boldsymbol{F} \in L(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^3)$,

(2) $d(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}})) = d(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})$.

定理 1.2.5 变换 $\boldsymbol{F}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ 为正交变换的充要条件是:

(1) $\boldsymbol{F} \in L(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^3)$,

(2) $g(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}})) = g(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})$.

定理 1.2.6 变换 $\boldsymbol{F}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ 为正交变换的充要条件是:

(1) $\boldsymbol{F} \in L(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^3)$,

(2) 对 $\mathbf{R}^3$ 中的任意标准正交基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$,即 $g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$,有

$$g(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_i), \boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_j)) = \delta_{ij}.$$

以上定理表明,正交变换是保距的线性变换,也是保内积的线性变换,同时还是

把标准正交基变为标准正交基的线性变换.

注 以上定理对任意的内积空间(V,g)上的正交变换$\boldsymbol{F}$适用.

下面我们给出$(\mathbf{R}^3,g)$中正交变换的线性表达式(公式).

定理 1.2.7 设变换$\boldsymbol{F}:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$为$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{3}y_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i$,则$\boldsymbol{F}$是正交变换的充要条件是:对于任意的$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{3}x_i\boldsymbol{e}_i\in\mathbf{R}^3$,有

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\\ y_3=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3,\end{cases}\tag{1.2.7}$$

即

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\triangleq \boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\tag{1.2.7$'$}$$

其中$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$是$\mathbf{R}^3$中取定的一组标准正交基,$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_i)=\sum_{j=1}^{3}a_{ji}\boldsymbol{e}_j$, $i=1,2,3$. $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是$\boldsymbol{F}$关于基$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$的矩阵,它是正交矩阵.特别地,当$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)$,$\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$时,使用最广泛.

证明 "$\Rightarrow$"设$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$是$\mathbf{R}^3$中取定的一组标准正交基,$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_i)=\sum_{j=1}^{3}a_{ji}\boldsymbol{e}_j$, $i=1,2,3$,即$(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_1),\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_2),\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_3))=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{A}$,因$g(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=\delta_{ij}$,由定理1.2.6得

$$\delta_{ij}=g(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_i),\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_j))=g\Big(\sum_{k=1}^{3}a_{ki}\boldsymbol{e}_k,\sum_{l=1}^{3}a_{lj}\boldsymbol{e}_l\Big)=\sum_{k=1}^{3}a_{ki}a_{kj},$$

即$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_3$,所以$\boldsymbol{A}$是正交矩阵.并且对任意的$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{3}x_i\boldsymbol{e}_i\in\mathbf{R}^3$,因$\boldsymbol{F}$是线性的,所以

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{3}x_i\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_i)=\sum_{i=1}^{3}x_i\sum_{j=1}^{3}a_{ji}\boldsymbol{e}_j=\sum_{j=1}^{3}\Big(\sum_{i=1}^{3}a_{ji}x_i\Big)\boldsymbol{e}_j\triangleq\sum_{j=1}^{3}y_j\boldsymbol{e}_j,$$

亦即 $y_j=\sum_{i=1}^{3}a_{ji}x_i$, $j=1,2,3$.

"$\Leftarrow$"因$\boldsymbol{A}$是正交矩阵,所以$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_3$,对任意的$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{3}x_i\boldsymbol{e}_i\in\mathbf{R}^3$,有

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=g\Big(\sum_{i=1}^{3}x_i\boldsymbol{e}_i,\sum_{j=1}^{3}x_j\boldsymbol{e}_j\Big)=x_1^2+x_2^2+x_3^2,$$

从而得

$$g(F(\boldsymbol{x}),F(\boldsymbol{x}))=g\left(\sum_{i=1}^{3}y_i\boldsymbol{e}_i,\sum_{j=1}^{3}y_j\boldsymbol{e}_j\right)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$$

$$=(y_1,y_2,y_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=(x_1,x_2,x_3)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=x_1^2+x_2^2+x_3^2=g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}).$$

由(1.2.3)′式知，$\boldsymbol{F}$ 是线性变换(或直接证明)，再由定义 1.2.2 知，$\boldsymbol{F}$ 是正交变换.

注 定理 1.2.7 的必要性用矩阵写更简单；充分性也可用定理 1.2.4 或定理 1.2.5 或定理 1.2.6 来证明.

由(1.2.7)式可知，只要我们能找出 $\mathbf{R}^3$ 中的一组标准正交基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 使 $\boldsymbol{\beta}_1=F(\boldsymbol{e}_1),\boldsymbol{\beta}_2=F(\boldsymbol{e}_2),\boldsymbol{\beta}_3=F(\boldsymbol{e}_3)$，写出正交矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，就能写出 $\mathbf{R}^3$ 中的正交变换.

例 7 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,2,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2,2),\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2=(6,-3,-6)$，它们两两垂直，单位化得：

$$\boldsymbol{\beta}_1=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_1-\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2+\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\left(\frac{6}{9},-\frac{3}{9},-\frac{6}{9}\right)=\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_2-\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_3,$$

其中 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0),\boldsymbol{e}_2=(0,1,0),\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$，上式写成矩阵就是

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\triangleq(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{A},$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是由标准正交基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 到标准正交基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵，它是正交矩阵. 由此我们得正交变换：

$$\begin{cases}y_1=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3,\\y_2=\frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3,\\y_3=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3.\end{cases}$$