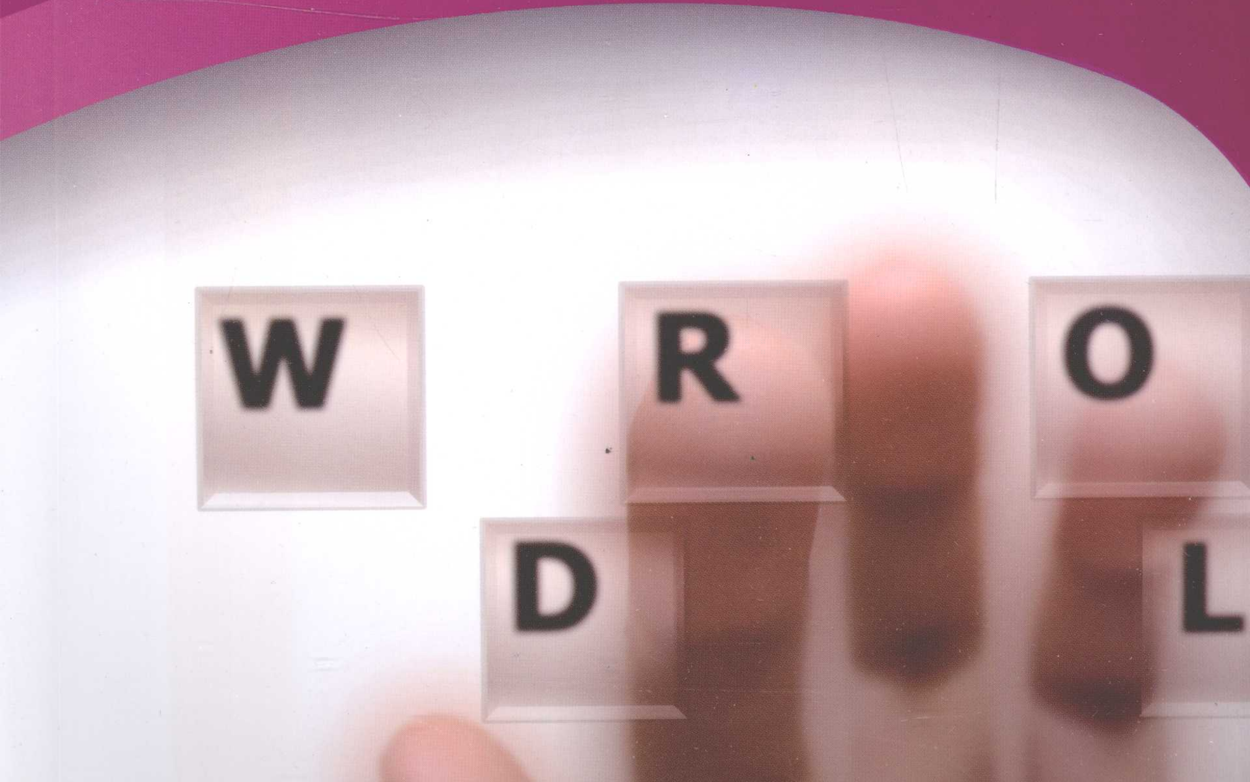
21世纪高职高专基础类课程规划教材

孙守湖 主审

高等应用数学

ADVANCED APPLIED MATHEMATICS

朴南德 刘伟 王宇光 主编



辽宁教育出版社

高等应用数学

主　编：朴南德　刘　伟　王宇光
副主编：包红岩　刘同曦　刘　颖　程凤颖
主　审：孙守湖

辽宁教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等应用数学/朴南德，刘伟，王宇光主编. —沈阳：辽宁教育出版社，2010.7
ISBN 978-7-5382-8926-8

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①朴… ②刘… ③王…　Ⅲ．①应用数学—高等学校—教材　Ⅳ．①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 133548 号

辽 宁 教 育 出 版 社 出 版、发 行
（沈阳市和平区十一纬路 25 号　邮政编码 110003）
沈阳市北陵印刷厂有限公司印刷

开本：787 毫米 ×1092 毫米　1/16　字数：380 千字　印张：17
2010 年 7 月第 1 版　　2010 年 7 月第 1 次印刷

责任编辑：张国强　刘　瑮　　责任校对：王　静

ISBN 978-7-5382-8926-8
定价：29.80 元

前 言

随着职业教育的改革和发展的大方向，为了提高教与学的效果，本书在孙守湖教授的指导下，本着重能力培养、重知识应用、重素质教育的总体思路，以“精、简、易”和注重“应用性、实用性”为特点，编写了高等应用数学教材，本教材在许多方面都具有明显的高职特色，具体反映在：

1. 以“强化基础、注重应用”为原则。将微积分、线性代数及概率统计基本知识有机地结合在一起，根据学生的认知水平、数学的认知规律和教学规律，设计、组织和编排全书内容，力求实现基础性、实用性和发展性三方面需求的和谐与统一。

2. 突出教学内容对高职学生认知基础的适应性。教学内容和难度均考虑到高职学生数学基础薄弱，逻辑思维能力不强的状况，更多地利用直观的图形、通俗的生活化语言降低学生学习难度，提高内容的可读性以适应高职教育的要求。

3. 突出与高职整体培养目标体系相适应。高等数学在高职整体教学体系中是一种文化基础课，归结为是一种基础“工具”课，鉴于此，教材的编写体系、课时安排等与不同专业的培养需要相适应，体现数学为专业服务的功能。

4. 突出数学模型思想的融入。将数学模型融入了主干教学，每章

不仅渗透模型思想，而且均有数学模型应用案例。这样不仅教会了学生学习数学，而且训练了学生用数学方法解决现实问题的能力，从而通过基础课的教学培养学生的实践能力。

5. 本教材精简实用，条理清楚，叙述通俗易懂，深入浅出，便于自学。

6. 本教材每节后配有习题，每章后配有复习题，最后配有综合测试题。习题按循序渐进的原则配置，其中有一般能力检测的基本题和应用能力检测的综合题，书后附有习题参考答案。

本教材由朴南德、刘伟、王宇光任主编。包红岩、刘同曦、刘颖、程凤颖任副主编。本书共分六章，具体分工如下：第一章由包红岩编写，第二章由程凤颖、刘伟编写，第三章由王宇光编写，第四章由刘同曦、王宇光编写，第五章由刘伟编写，第六章由朴南德编写。全书由朴南德、刘伟、王宇光统稿，孙守湖对全书进行审阅和修订。

本教材可以作为高等职业院校、成人院校及同等大专院校的教材或参考书。全书需要90—120学时，根据教学需要自行删减。

尽管编写过程当中做了很多努力，由于能力和水平有限，错误之处在所难免，望得到专家、读者和兄弟院校同行人士的批评指导。

编　者

目 录

第一章 极限与函数的连续性 …… 1
1.1 函数 …… 1
1.2 函数的极限 …… 9
1.3 无穷小与无穷大 …… 11
1.4 极限的基本运算 …… 13
1.5 函数的连续与间断 …… 17
第二章 导数及其应用 …… 21
2.1 导数的概念 …… 21
2.2 函数求导法则及基本公式 …… 27
2.3 函数的微分 …… 31
2.4 函数的单调性和极值 …… 35
2.5 曲线的凹凸性及函数图形的描绘 …… 40
2.6 边际分析与弹性分析 …… 45
第三章 积分及其应用 …… 52
3.1 不定积分的概念 …… 52
3.2 不定积分的性质与基本积分公式 …… 55
3.3 换元积分法 …… 60
3.4 分部积分法 …… 68
3.5 定积分的概念 …… 70
3.6 牛顿－莱布尼茨公式 …… 76
3.7 定积分的换元法与分部积分法 …… 78
3.8 定积分在几何上的应用 …… 82
3.9 定积分在经济上的应用 …… 88
第四章 矩阵及其应用 …… 98
4.1 行列式的概念 …… 98
4.2 矩阵概念及运算 …… 105

4.3 矩阵的初等变换与矩阵的秩 …… 113
4.4 逆矩阵及矩阵方程 …… 116
4.5 线性方程组 …… 120
4.6 线性规划数学模型 …… 127
4.7 运输问题数学模型 …… 145
第五章 概率论 …… 156
5.1 随机事件及概率 …… 156
5.2 概率的基本公式 …… 162
5.3 随机变量及其分布 …… 166
5.4 随机变量的分布函数 …… 176
5.5 随机变量的数字特征 …… 181
第六章 数理统计 …… 193
6.1 随机抽样及其分布 …… 193
6.2 抽样分布 …… 201
6.3 参数估计 …… 205
6.4 假设检验 …… 215
6.5 一元线性回归分析 …… 224
综合测试题一 …… 235
综合测试题二 …… 237
综合测试题三 …… 238
参考答案 …… 242
附 表 …… 258

第一章　极限与函数的连续性

函数是现代高等数学的主要研究对象，极限是分析、解决函数问题的重要工具．极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本方法．连续是函数的重要性态之一．本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的方法，为今后的学习打下必要的基础．

1.1　函数

1．变量与常量

当观察与研究某种自然现象和社会现象时，往往会遇到各种不同的量．一种是常量，即在某一过程中，数值保持不变的量；另一种是变量，即在某一过程中，数值不断变化的量．

2．函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型．

在某一自然现象或社会现象中，往往同时存在多个不断变化的量，这些变量并不是孤立变化的，而是遵守一定的规律相互联系的．函数就是描述这种联系的一个法则．

例如，生产某种产品的固定成本为 7000 元，每生产一件产品，成本增加 70 元，设该种产品的总成本为 y，产量为 x，则变量 y 与 x 之间的相依关系为：$y=7000+70x$．

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集．如果在它的变化范围内每取一值时，y 按照某一对应规律 f 总有确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作：

$$y=f(x) \quad x\in D$$

这里，x 称为自变量，y 称为因变量，x 的变化范围 D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域．

对于 $x_0\in D$ 所对应的 y 值记作 $y_0=f(x_0)=f(x)|_{x=x_0}$，称为当 $x=x_0$ 时函数 f

(x)的函数值，全体函数值所构成的集合 $W=\{y|y=f(x),\ x\in D\}$称为函数 $y=f(x)$的值域.

这里我们不难看出，确定函数有两个要素：定义域和对应法则. 也就是说，对于两个函数来说，当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时它们才表示同一个函数，但与变量用什么字母表示无关.

例1 已知$f(x)=\dfrac{2-x}{2+x}$，求$f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f(x+1)$.

解：$f(0)=\dfrac{2-0}{2+0}=1$ $\quad f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2-\dfrac{1}{2}}{2+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{3}{5}$ $\quad f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{2-\dfrac{1}{x}}{2+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{2x-1}{2x+1}$

$f(x+1)=\dfrac{2-(x+1)}{2+(x+1)}=\dfrac{1-x}{3+x}$

例2 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$ $\quad$ (2) $f(x)=\sqrt{x+3}+\ln(x-2)$

(3) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$

解：(1) 要使 $y=\sqrt{1-x^2}$有意义，必须使 $1-x^2\geqslant 0$，即 $-1\leqslant x\leqslant 1$，因此所求函数的定义域为 $[-1,1]$.

(2) $\begin{cases}x+3\geqslant 0\\ x-2>0\end{cases}$解得 $x>2$，即 $(2,+\infty)$

(3) 由 $\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1$ 且 $x^2<25$，即 $|x-1|\leqslant 5$ 且 $|x|<5$ 得 $-4\leqslant x\leqslant 6$ 且 $-5<x<5$，故所求定义域为 $[-4,5)$.

例3 判断下面函数是否相同：

(1) $y=x$，$y=\sqrt{x^2}$ $\qquad$ (2) $y=\lg x^2$，$y=2\lg x$

解：(1) 不同，对应法则不同. (2) 不同，定义域不同.

3\. 函数的常用表示法

(1) 表格法：将自变量的值与对应的函数值列成表格的方法.

(2) 图象法：在坐标系中用图形来表示函数关系的方法.

(3) 解析法（公式法）：将自变量和因变量之间的关系用数学表达式（又可称为解析表达式）来表示的方法. 根据函数的解析表达式的形式的不同，函数也可分为显函数和隐函数.

(4) 叙述法：用语言或各种专业语言直接叙述函数的方法.

定义2 设 $y=f(x)$，$x\in D$，$y\in W$，如对于 W 中的每一个 y 值，都可以由关系 $y=f(x)$ 式确定唯一的 x 值（$x\in D$）与之对应，即新函数 $x=f^{-1}(y)$ 定义域为 W 值域为 D 的 $y=f(x)$ 反函数. 或它们互称为反函数. 习惯上反函数表示为 $y=f^{-1}(x)$. $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于 $y=x$ 直线对称.

(Ⅰ) 显函数：由函数的解析表达式直接表示. 例如，$y=2x+1$

(Ⅱ) 隐函数：函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定. 例如：$x^2+y^2-xy=0$.

(Ⅲ) 分段函数：函数在其定义域的不同范围内，具有不同的解析表达式.

例如：

$$y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases} \quad 及 \quad y=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

都是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 内的分段函数，其图形分别如图 1-1-1 和 1-1-2 所示.

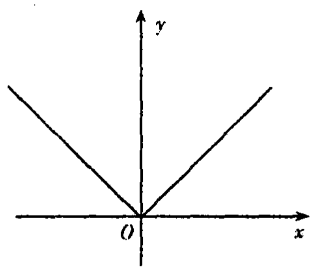


图 1-1-1

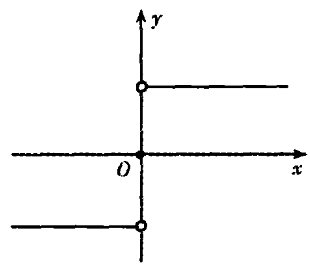


图 1-1-2

4. 函数的特性

(1) 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，使得对 (a,b) 的一切 x，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的，或称 $f(x)$ 是 (a,b) 内的有界函数. 如果具有上述性质的正数 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的，或称 $f(x)$ 是 (a,b) 内的无界函数.

例如，函数 $y=\sin x$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，这是因为无论 x 取何值，$|\sin x|\leqslant 1$. 而函数 $y=\tan x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 上无界，在 $[0,\frac{\pi}{4})$ 上有界，这是因为 x 越是靠近 $\frac{\pi}{2}$，$\tan x$ 变得越大，找不到一个适当的正数 M，使 $|\tan x|\leqslant M$；在 x

取 $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$ 内的值时，$|\tan x|\leqslant 1$，所以 $\tan x$ 在 $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$ 上是有界的.

（2）函数的单调性

设 $y=f(x)$ 是定义在区间 $(a,\ b)$ 内的函数，x_1，x_2 是 $(a,\ b)$ 内任意两个值，如果当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内是单调递增函数；如果当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)>f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内是单调递减函数.

单调递增函数与单调递减函数统称为在该区间内的单调函数，这个区间称为函数的单调区间.

单调递增函数的图形是沿轴正向上升的曲线，如图 1－1－3，单调递减函数的图形是沿 x 轴正向下降的曲线，如图 1－1－4.

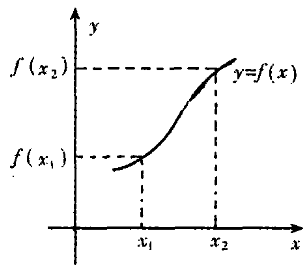


图 1－1－3

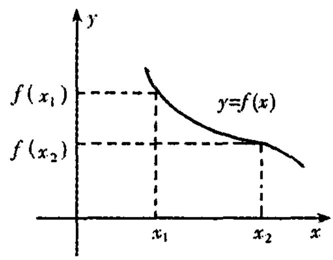


图 1－1－4

（3）函数的奇偶性

对于 $y=f(x)$ 的定义域内任意两个相反数 x 与 $-x$，若有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为偶函数；若有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的，如图 1－1－5；奇函数的图形关于原点是对称的，如图 1－1－6.

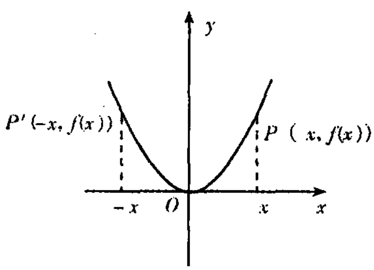


图 1－1－5

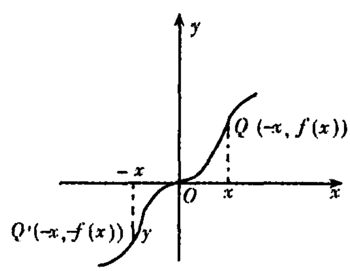


图 1－1－6

例如，$y=\sin x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 都是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数.

（4）函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在正的常数 T，使 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称此

函数为周期函数. 满足这个等式的最小正数 T，称为函数 $y=f(x)$ 的周期.

例如，三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$，$y=\cot x$，是以 π 为周期的周期函数. 显而易见，函数 $y=A\sin(ax+b)$，$y=A\cos(ax+b)$ 的周期是 $\frac{2\pi}{|a|}$；函数 $y=A\tan(ax+b)$，$y=A\cot(ax+b)$ 的周期是 $\frac{\pi}{|a|}$.

5. 初等函数

(1) 基本初等函数

(Ⅰ) 幂函数

幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为任意实数），其定义域因 α 而异，但不论 α 为何值，$y=x^{\alpha}$ 在（0，$+\infty$）内总有意义，且图形经过点（1，1）.

如偶次方类，以 $y=x^2$，$y=x^{\frac{1}{2}}$ 为例，$y=x^2$ 的定义域为（$-\infty$，$+\infty$）；$y=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $[0$，$+\infty)$（如图 1-1-7）.

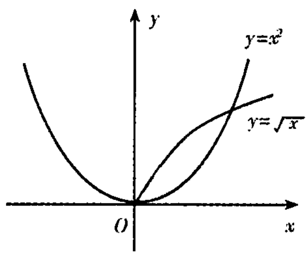


图 1-1-7

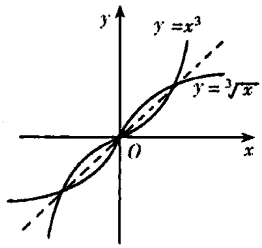


图 1-1-8

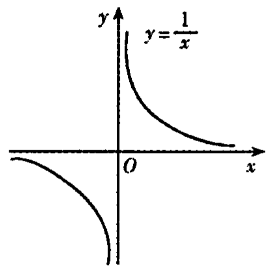


图 1-1-9

奇次方类，以 $y=x^3$，$y=x^{\frac{1}{3}}$ 为例，它们的定义域为（$-\infty$，$+\infty$），且图形关于原点对称（如图 1-1-8）.

再如，负次方类，以 $y=x^{-1}$ 为例，它的定义域为（$-\infty$，0）或（0，$+\infty$），图形对称于原点（如图 1-1-9）.

(Ⅱ) 指数函数

指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$），其定义域为（$-\infty$，$+\infty$），值域为（0，$+\infty$）. 对任何满足条件的 a 值，它的图形都过（0，1）点. 当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少（如图 1-1-10）.

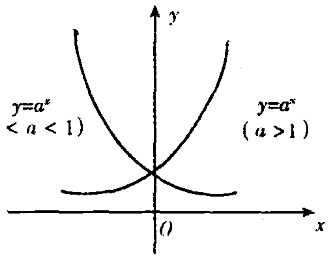


图 1－1－10

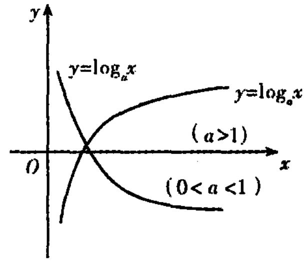


图 1－1－11

（Ⅲ）对数函数

对数函数 $y=log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$），其定义域为（0，$+\infty$），对任何 a（$a>0$ 且 $a\neq1$），它的图形都过（1，0）点. 当 $a>1$ 时函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少.（如图 1－1－11）对数函数和指数函数互为反函数.

（Ⅳ）三角函数：

$y=\sin x$ 及 $y=\cos x$ 的定义域均为（$-\infty$，$+\infty$），且周期均为 2π，它们都是有界函数，即 $|\sin x|\leqslant1$，$|\cos x|\leqslant1$. $y=\sin x$ 为奇函数，$y=\cos x$ 为偶函数（如图 1－1－12）.

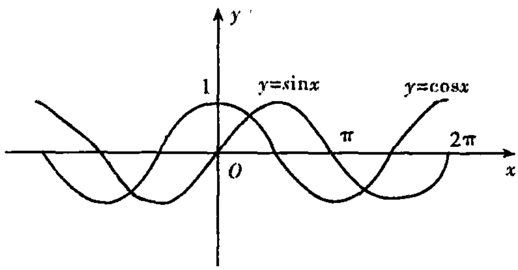


图 1－1－12

$y=\tan x$ 的定义域为除去点 $x=(2k+1)\cdot\dfrac{\pi}{2}$（$k$ 是整数）的所有实数，它是奇函数，多分支，每支都是单调增加的，且以 π 为周期（如图 1－1－13）.

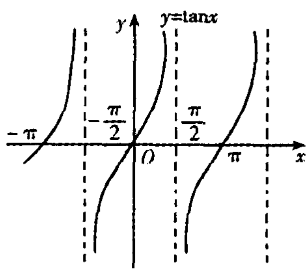


图 1－1－13

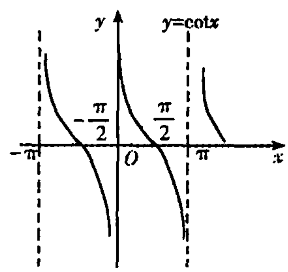


图 1－1－14

$y=\cot x$ 的定义域为除去点 $x=k\pi$（k 为整数）的所有实数，它是奇函数，多分支，每支都是单调减少的，且以 π 为周期（如图 1-1-14）.

（V）反三角函数：

我们仅取主值分支：

$y=\arcsin x$，$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，$x\in[-1,\ 1]$（如图 1-1-15）；

$y=\arccos x$，$y\in[0,\ \pi]$，$x\in[-1,\ 1]$（如图 1-1-16）；

$y=\mathrm{arctg}x$，$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$（如图 1-1-17）；

$y=\mathrm{arcctg}x$，$y\in(0,\ \pi)$，$x\in[-\infty,\ +\infty]$（如图 1-1-18）.

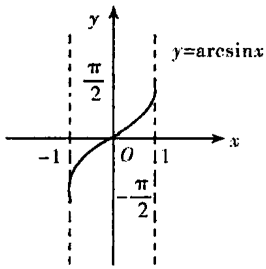


图 1-1-15

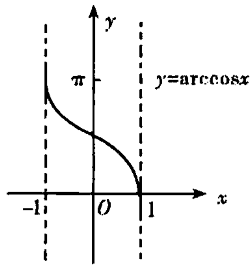


图 1-1-16

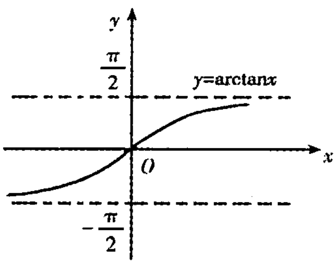


图 1-1-17

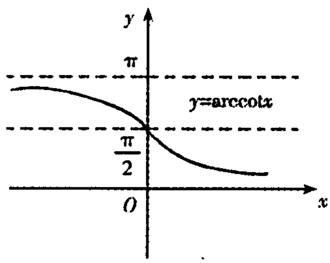


图 1-1-18

（2）复合函数

如果 y 是 u 的函数：$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数：$u=\varphi(x)$，通过 u 将 y 表示成 x 的函数，即
$$y=f[\varphi(x)]$$
则称 y 为由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，或简称为 y 是 x 的复合函数，x 为自变量，y 为因变量，u 被称为中间变量.

（3）初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成，并且用一个解析式子表达的函数，称为初等函数.

在初等函数有定义的区间内，初等函数的图象是不间断的.

例4 求 $y=u^2$，$u=\arctan v$，$v=3x+1$，构成的复合函数.

解：$y=u^2=(\arctan v)^2=[\arctan(3x+1)]^2$

例5 设 $y=f(u)=\sin u$，$u=\varphi(x)=x^2+1$，求 $y=f[\varphi(x)]$

解：$y=f[\varphi(x)]=\sin u=\sin(x^2+1)$

例6 指出下列复合函数的结构：

(1) $y=(2x+1)^8$　　(2) $y=\sqrt{\log_a(\sin x+3^x)}$

(3) $y=e^{\cos\frac{1}{x}}$　　(4) $y=\arctan\sqrt{1+x^2}$

解：

(1) $y=u^8$，$u=2x+1$　　(2) $y=\sqrt{u}$，$u=\log_a v$，$v=\sin x+3^x$

(3) $y=e^u$，$u=\cos v$，$v=\dfrac{1}{x}$　　(4) $y=\arctan u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1+x^2$

习题 1.1

1. 函数关系有几个要素？两函数相同指什么？下列各对函数是否相同？

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$与 $g(x)=x+1$　　(2) $f(x)=\sqrt{x^2}$与 $g(x)=x$

(3) $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$　　(4) $f(x)=2^{\log_2 x}$与 $g(x)=x$

2. $f(x^2)$与$[f(x)]^2$ 是一回事吗？试举例说明.

3. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$　　(2) $f(x)=\lg\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$

(3) $f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$　　(4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2-x}}{x}$

4. 设函数 $y=f(x)$的定义域是 $[0,1]$，求

(1) $f(x^2)$的定义域；　　(2) $f(x+a)$的定义域；

(3) $f(\ln x)$的定义域；　　(4) $f\left(x+\dfrac{1}{4}\right)+f\left(x-\dfrac{1}{4}\right)$的定义域.

5. 求下列函数值：

(1) $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$,求$f(2)$,$f(0)$,$f(a)$.

（2）$y=3\cos x+1$，求 $y|_{x=0}, y|_{x=\pi/2}, y|_{x=\pi/3}$.

（3）$f(x)=\frac{1}{1-x}$,求$f[f(2)], f[f(x)]$.

（4）$f(x)=\begin{cases}|\sin x| & |x|<1\\ 0 & |x|\geqslant 1\end{cases}$ 求$f(1), f\left(-\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

6. $f(x)=\frac{1}{1+x}$，$g(x)=1+x^2$ 求$f[g(1)]$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

7. 判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=\tan x-\sec x+1$　　（2）$f(x)=a^x-a^{-x}$

（3）$f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$　　（4）$f(x)=x(x-1)(x+1)$

8. 下列函数可以看成由哪些简单函数复合而成？

（1）$y=\sqrt{1-\sin x}$　　（2）$y=\sin\sqrt{1-x^2}$

（3）$y=\cos\sqrt{ax+b}$　　（4）$y=4\arcsin(1-x)^3$

（5）$y=\lg^2(\lg x^2)$　　（6）$y=2^{\sin\frac{1}{x}}$

1.2　函数的极限

1. 自变量趋向无穷大（$x\to\infty$）时函数的极限

定义 1　如果 $x>0$ 且无限增大时，函数$f(x)$趋于一个确定的常数 A，则称 $x\to+\infty$ 时函数$f(x)$以 A 为极限. 记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或$f(x)\to A(x\to+\infty)$.

如果 $x<0$ 且 x 的绝对值无限增大时，函数$f(x)$趋于一个确定的常数 A，则称 $x\to-\infty$ 时函数$f(x)$以 A 为极限. 记作 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 或$f(x)\to A(x\to-\infty)$.

定义 2　如果 x 的绝对值无限增大时，函数$f(x)$趋于一个确定的常数 A，则称 $x\to\infty$ 时函数$f(x)$以 A 为极限. 记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或$f(x)\to A(x\to\infty)$

定理 1　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$

例 1　求极限（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$　（3）$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x$

解：（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$　（3）$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

2. 自变量趋向有限值（$x\to x_0$）时函数的极限

首先考察函数$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$，当 $x\to2$ 时的变化趋势

由图 1－2－1 不难看出，在 $x\neq2$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}=x+2$，当 $x\to2$ 时，$f(x)\to4$.

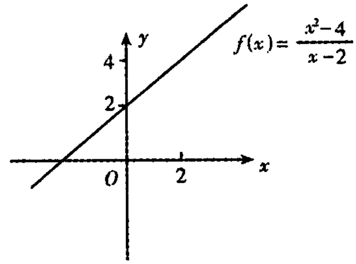


图 1－2－1

定义 3 如果函数 $f(x)$ 在 x_o 点附近有定义，当自变量 x 在 x_o 点附近无限接近于 x_o 时，相应的函数值无限接近于确定的常数 A，则称 $x\to x_o$ 时函数 $f(x)$ 以 A 为极限. 记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_o).$$

注：函数极限与 $f(x)$ 在点 x_o 处是否有定义无关.

能够证明 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_o$，$\lim\limits_{x\to x_o}C=C$，这两个结论可以直接使用.

定义 4 如果自变量 x 从 x_o 的左侧（或右侧）趋于 x_o 时，函数 $f(x)$ 趋于常数 A，则称常数 A 为 $f(x)$ 在点 x_o 处的左极限（或右极限），记为 $\lim\limits_{x\to x_o^-}f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to x_o^+}f(x)=A$

有时也记为 $\lim\limits_{x\to x_o-0}f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to x_o+0}f(x)=A$ 与 $f(x_o+0)=A$ 或 $f(x_o-0)=A$

定理 2 $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_o^-}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_o^+}f(x)=A$

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}x+4, & x\geq1\\ 5x, & x<1\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$

解：因为，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}5x=5$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x+4)=5$

即 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=5$，所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在且 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=5$

例 3 设 $f(x)=\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$，求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$

解：$f(x)$ 在 $x=0$ 处没有定义，

而 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{e^{-\frac{1}{x}}+1}=-1$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

习题 1.2

1. 观察并写出下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}$　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}3^{-x}$　（3）$\lim\limits_{x\to1}\ln x$　（4）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x$