普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学基础

线性代数与解析几何

（第二版）

魏战线　李继成　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

高等数学基础

线性代数与解析几何

Xianxing Daishu yu Jiexi Jihe

（第二版）

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

高等数学基础. 线性代数与解析几何/魏战线,李继成编. —2版. —北京:高等教育出版社,2010.7

ISBN 978-7-04-029666-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①魏…②李… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材②线性代数-高等学校-教材③解析几何-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13②O151.2③O182

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第096259号

策划编辑 王 强 **责任编辑** 于丽娜 **封面设计** 张 志 **责任绘图** 宗小梅
版式设计 张 岚 **责任校对** 杨凤玲 **责任印制** 尤 静

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京京科印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
		版　　次	2004年7月第1版
开　　本	787×960　1/16		2010年7月第2版
印　　张	22.25	**印　　次**	2010年7月第1次印刷
字　　数	410 000	**定　　价**	28.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　29666-00

内容提要

由西安交通大学编写的普通高等教育“十一五”国家级规划教材——《高等数学基础》(第二版)共分三册,本书是其中的一册,内容包括行列式、矩阵、几何向量及其应用、n 维向量与线性方程组、线性空间与欧氏空间、特征值与特征向量、二次曲面与二次型、线性变换、MATLAB 软件简介及其应用举例等 9 章。

本书第二版精简了一些次要内容,删去了一些较难的证明,同时对部分内容进行了重新处理和改写,以使本书的思路更加清晰简明、更加符合认识规律、更易于读者接受。此外还增加了 MATLAB 软件简介及其在线性代数中的应用举例;增加了一些应用例子,例如在编码与信息传送、人口迁移与马尔可夫过程、插值多项式等方面的例子;适当增加了矩阵分解及其应用的一些内容。本书结构严谨,层次清晰,例题与习题丰富,部分题目选自近年来国内外优秀教材和全国硕士研究生入学考试试题。

本书可作为高等理工科院校非数学类专业本科生的教材,也可供有关教师、科技人员和其他社会读者阅读与参考。

第二版前言

本套教材(《高等数学基础》,包括《一元函数微积分与无穷级数》、《多元函数微积分与线性常微分方程》,《线性代数与解析几何》三个分册)第一版自2004年7月出版以来,被不少兄弟院校作为相关课程的教材,第二版又被列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材。为了进一步提高教材的质量,我们在听取同行专家、使用过该套教材的教师和读者意见的基础上,总结了近几年来的教学经验,对第一版进行了认真的修改。在保持第一版的基础框架结构和主要特色的基础上,本次修改主要集中在以下几个方面:

1. 精简了次要内容,删去了某些较难的理论,适当降低了难度。例如,删去了二重积分一般换元公式的证明及三重积分的一般换元法,仅保留了二重积分的一般换元公式;删去了空间曲线的曲率、挠率与Frenet标架,将平面曲线的曲率以及与此密切相关的平面曲线的弧长、弧微分的内容移到《一元函数微积分与无穷级数》分册中;对二元函数的极限和连续性定义进行了改写,将第一版中要求(x_0,y_0)是函数定义域的聚点改为仅要求函数定义在(x_0,y_0)的邻域中,用与一元函数类似的方法来定义,然后对定义域的边界点等情况再将定义作适当的拓展;将有界闭集上连续函数的性质改为在有界区域上讨论;二元函数在点(x_0,y_0)处可微的充分条件中删去了该函数“在(x_0,y_0)的邻域内可偏导”的要求。

2. 为了进一步培养学生应用数学知识分析解决实际问题的能力,在《线性代数与解析几何》分册中,新增了“MATLAB软件简介及其应用举例”一章,供各校选用,既可作为数学实验课的内容,也可穿插在有关内容中讲解。鉴于加强几何直观和应用的重要性,在新版中增加了多元函数的等值线与等值面及其在函数的几何表示、梯度和Lagrange乘数法中的应用方面的内容。另外,新版中还增加了一些饶有趣味的应用方面的例题和习题。

3. 考虑到当前我国中学数学教学的实际情况,新版中还适当增加了一些内容或附录。例如,在一元函数中增加了函数的参数表示与极坐标表示;在《一元函数微积分与无穷级数》分册后面编写了“几种常用的曲线”、“几类常用的初等

数学公式”和“复数简介”三个附录；在《多元函数微积分与线性常微分方程》分册后面增加了“部分曲面与空间立体的图形”（共25幅）一个附录。这些内容可供读者选学或查阅。

4. 对某些内容的讲述方法和全书的文字表述作了进一步加工，使得本套教材更富于可读性和启发性，同时也改正了少数不确切甚至错误之处（例如，误将无穷小量阶的高低看作是无穷小量趋于零的“速度”）。

5. 删去了习题（特别是每章后的习题）中的一些难题，增加了一些基本训练题和应用题。

参加第二版微积分两个分册修订工作的有马知恩、王绵森、魏战线、武忠祥、常争鸣；参加《线性代数与解析几何》分册修订工作的有魏战线、李继成。

多年来，许多同行专家及使用过本套教材的兄弟院校和西安交通大学的老师和学生通过多种方式对本套教材第一版提出了很多非常宝贵的意见和建议，这些意见和建议对提高本书的质量起到了重要的作用。在此，编者向他们表示诚挚的感谢，并恳请他们对第二版继续提出批评和进一步修改的意见。

编　者

2010年3月于西安交通大学

第一版前言

本套教材是普通高等教育“十五”国家级规划教材。全套教材共分三册，即《一元函数微积分与无穷级数》、《线性代数与解析几何》、《多元函数微积分与线性常微分方程》，其中的微积分部分是作者编写的《工科数学分析基础》的简化本。《工科数学分析基础》是由高等教育出版社出版的面向21世纪课程教材之一，也是“九五”国家级重点教材，并于2001年获“中国高等学校科学技术一等奖”，2002年获“国家优秀教材一等奖”，适用于高等理工科院校对数学要求较高的非数学类专业的本科生。本套教材兼顾科技发展的需要和当前我国高等院校的实际情况，对《工科数学分析基础》内容的深广度作了较大幅度的调整，使其适用于多数院校的教学需求。本套教材在编写的指导思想和内容体系方面继承了《工科数学分析基础》的一些主要特色：

1. 适当拓宽必要的数学基础。与《工科数学分析基础》相比，本套教材虽然删去了实数完备性、确界定理、一致连续、含参变量积分、微分方程稳定性与无限维分析等内容，削减了极限理论以及某些定理的证明，并在级数的一致收敛、微分方程组前冠以“*”号，不作为教学基本要求，但是，本套教材保留了在集合与映射的基础上讲解函数和极限的基本理论、向量值函数的微分，以及通过向量值函数的微分来研究曲线与曲面的性质等内容。对于没有给出分析证明的重要定理，也努力通过几何直观或其他方法分析并揭示定理的正确性或定理证明的基本思路，以便使学生在掌握必要的数学知识的同时，在数学的抽象性、逻辑性和严谨性方面受到必要的基本训练，培养他们的理性思维方法，提高数学素养和能力。

2. 注意分析、代数与几何相关内容的有机结合和相互渗透。本套教材从多元函数微分学开始，就注意逐步加强向量和矩阵的运用，利用向量、矩阵和线性代数中的知识来表述微积分中的有关内容，并采用从2维、3维逐步过渡到n维的讲解方法。例如，利用Jacobi矩阵来表示向量值函数的导数和微分；用向量值函数的微分来研究曲线和曲面的性质；将第二型线面积分与向量场的研究结合起来等。另一方面，在线性代数中，又列举了一些分析方面的例题，说明线性代

数的某些概念。例如,在讲解内积时,介绍了用两个函数乘积的定积分定义函数空间中内积的例子;在矩阵特征值理论中讲解了它在求解线性微分方程组方面的应用等。这样做,既有利于培养学生综合运用数学知识的能力,又能更好地满足现代科技的发展对数学的需求。

3. 强化学生数学应用能力的培养。在讲解数学内容的同时,着力于揭示数学概念的本质和在实际问题中有重要应用的数学思想方法是本套教材的另一个鲜明特色。例如,编者反复强调了微积分基本思想方法、局部线性化方法、逼近的思想、最优化方法、微元法以及变量代换的思想和方法等。为了培养学生应用数学解决实际问题的意识、兴趣和能力,书中精选了一批工程、生态、人口、经济、医学,甚至日常生活方面饶有趣味的应用性例题和习题,并配备了一些综合练习题,供读者选作。

4. 削减次要内容,淡化运算技巧的训练。与某些传统教材相比,本套教材精简了一些次要内容。例如,以链式法则为主线讲解一元函数求导法;以换元和分部两种基本方法为主线讲解积分法,将一些简单的有理函数、三角有理函数和无理函数的积分作为两种基本积分法的应用例题;将某些近似计算方法移至数学实验等后继课中;每节配备的习题均分为 A,B 两类,微积分部分每章后还配备了一些综合性习题。A 类为基本要求题,致力于基本概念、基本理论、基本运算和应用的训练;B 类题以及每章后配备的习题,可供学有余力的同学选作。

5. 适当采用了一些近代数学的思想、术语和符号,为学生学习近代数学开设一些“窗口”和“接口”。与《工科数学分析基础》相比,本套教材删去了不少要求较高的内容,但仍保留了某些近代数学的思想和观点。例如,将多元函数分为数量值函数与向量值函数,定义为从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的映射;将定积分、重积分、第一型线(面)积分统一为几何形体上的数量值函数的积分;以参数方程为主线讲解曲线与曲面的有关内容等。但在讲解这些内容时,我们更加注意可接受性,采用由直观到抽象,由特殊到一般的方法循序渐进,逐步深入。

本套教材中的《线性代数与解析几何》分册介绍了线性代数和解析几何的基本内容,共分八章。该分册采用模块式结构,可根据不同专业的教学要求和学时对内容进行取舍。讲完基本内容(除打“*”的部分)约需 42~48 学时,讲完全部内容约需 56~60 学时。该分册力求将线性代数与解析几何相互结合,相互渗透,并为学习多元微积分和线性常微分方程提供必要的准备,因此,它既可与微积分课程配套使用,又可单独作为线性代数课程的教材。

由于学习本套教材的《多元函数微积分与线性常微分方程》分册需要少量线性代数与解析几何知识,因此使用本套教材可采用两种不同的方法:一种是将线性代数与解析几何单独设课,与一元函数微积分双轨并进,在学习多元函数微积分与线性常微分方程前完成;另一种是用单轨串连式,即先讲一元微积分,再

讲线性代数与解析几何，最后讲多元微积分。本套教材在《多元函数微积分与线性常微分方程》后编写了一个附录，简要介绍了使用该分册时所必须具备的线性代数和解析几何的基本知识。这样，即便对于某些将线性代数在二年级单独设课，而将解析几何放在高等数学课程中讲解的院校，也可用本套教材作为教材。

另外，为了便于在高等数学课程中进行双语教学，编者与美国著名数学家 Fred Brauer 合作，编写了书名为《Fundamentals of Advanced Mathematics》的英文教材，由高等教育出版社正式出版。该书在体系和内容方面与本套教材基本相同，是两本相互配套的教材。因此，一方面，本套教材可作为使用该英文教材进行双语教学师生配套的参考书；另一方面，使用本套教材的读者也可将该英文教材作为一本英文参考书。

参加本套教材编写的有马知恩、王绵森、魏战线、武忠祥、常争鸣和徐文雄。全套教材分三册，其中《一元函数微积分与无穷级数》由王绵森、马知恩主编，《多元函数微积分与线性常微分方程》由马知恩、王绵森主编，《线性代数与解析几何》由魏战线编。本套教材已在西安交通大学电气工程学院等多个教学大班试用过 2～3 届，任课教师提出的许多宝贵意见对书稿的修改完善起了重要作用，借此机会对参加试用的所有教师表示衷心的感谢。同时，感谢高等教育出版社的有关编辑同志，他们为本套教材的出版和质量的提高起了十分重要的作用。

本套教材得到了高等教育出版社和西安交通大学教务处的资助，在此，我们向有关方面一并表示感谢！

本套教材虽几经试用和修改，但由于编者水平所限，加之时间较紧，不妥之处在所难免。恳请专家、同行以及广大读者不吝指正，使本套教材在今后的教学实践中日臻完善！

编　者

2004 年 4 月于西安交通大学

目　录

第 1 章　行列式 ………… 1

第一节　行列式的定义与性质 ………… 1

1.1.1　2 阶行列式与一类 2 元线性方程组的解 ………… 1

1.1.2　n 阶行列式的定义 ………… 3

1.1.3　行列式的基本性质 ………… 7

习题 1.1 ………… 11

第二节　行列式的计算 ………… 12

习题 1.2 ………… 19

第三节　Cramer 法则 ………… 22

习题 1.3 ………… 26

第 1 章习题 ………… 27

第 2 章　矩阵 ………… 29

第一节　矩阵及其运算 ………… 29

2.1.1　矩阵的概念 ………… 29

2.1.2　矩阵的代数运算 ………… 33

2.1.3　矩阵的转置 ………… 41

2.1.4　方阵的行列式 ………… 43

习题 2.1 ………… 45

第二节　逆矩阵 ………… 46

习题 2.2 ………… 53

第三节　分块矩阵及其运算 ………… 55

2.3.1　子矩阵 ………… 55

2.3.2　分块矩阵 ………… 55

习题 2.3 ………… 61

第四节　初等变换与初等矩阵 ………… 62

2.4.1 初等变换与初等矩阵 …… 62
2.4.2 阶梯形矩阵 …… 65
2.4.3 再论可逆矩阵 …… 67
习题 2.4 …… 70
第五节 矩阵的秩 …… 72
习题 2.5 …… 77
第 2 章习题 …… 78

第 3 章 几何向量及其应用 …… 80
第一节 向量及其线性运算 …… 80
3.1.1 向量的基本概念 …… 80
3.1.2 向量的线性运算 …… 81
3.1.3 向量共线、共面的充要条件 …… 85
3.1.4 空间坐标系与向量的坐标 …… 87
习题 3.1 …… 94
第二节 数量积 向量积 混合积 …… 95
3.2.1 两个向量的数量积（内积、点积） …… 95
3.2.2 两个向量的向量积（外积、叉积） …… 99
3.2.3 混合积 …… 101
习题 3.2 …… 103
第三节 平面和空间直线 …… 104
3.3.1 平面的方程 …… 104
3.3.2 两个平面的位置关系 …… 107
3.3.3 空间直线的方程 …… 108
3.3.4 两条直线的位置关系 …… 111
3.3.5 直线与平面的位置关系 …… 112
3.3.6 距离 …… 113
习题 3.3 …… 115
第 3 章习题 …… 117

第 4 章 n 维向量与线性方程组 …… 119
第一节 消元法 …… 119
4.1.1 n 元线性方程组 …… 120
4.1.2 消元法 …… 121
4.1.3 线性方程组的解 …… 125

4.1.4　数域 …………………………………………………… 131
习题 4.1 …………………………………………………………… 131
第二节　向量组的线性相关性 ……………………………………… 132
4.2.1　n 维向量及其线性运算 ………………………………… 132
4.2.2　线性表示与等价向量组 ………………………………… 135
4.2.3　线性相关与线性无关 …………………………………… 138
习题 4.2 …………………………………………………………… 143
第三节　向量组的秩 ………………………………………………… 145
4.3.1　向量组的极大无关组与向量组的秩 ………………… 145
4.3.2　向量组的秩与矩阵的秩的关系 ……………………… 147
习题 4.3 …………………………………………………………… 151
第四节　线性方程组的解的结构 …………………………………… 152
4.4.1　齐次线性方程组 ………………………………………… 152
4.4.2　非齐次线性方程组 ……………………………………… 158
习题 4.4 …………………………………………………………… 163
第 4 章习题 ………………………………………………………… 166

第 5 章　线性空间与欧氏空间 …………………………………… 169
第一节　线性空间的基本概念 ……………………………………… 169
5.1.1　线性空间的定义 ………………………………………… 169
5.1.2　线性空间的基本性质 …………………………………… 171
5.1.3　线性子空间的定义 ……………………………………… 172
5.1.4　基、维数和向量的坐标 ………………………………… 173
*5.1.5　基变换与坐标变换 ……………………………………… 176
*5.1.6　线性空间的同构 ………………………………………… 178
*5.1.7　子空间的交与和 ………………………………………… 180
习题 5.1 …………………………………………………………… 183
第二节　欧氏空间的基本概念 ……………………………………… 185
5.2.1　内积及其基本性质 ……………………………………… 185
5.2.2　范数和夹角 ……………………………………………… 188
5.2.3　标准正交基及其基本性质 ……………………………… 189
5.2.4　Gram-Schmidt(格拉姆-施密特)正交化方法 ………… 191
5.2.5　正交矩阵 ………………………………………………… 194
*5.2.6　矩阵的 $\boldsymbol{QR}$ 分解 …………………………………………… 195
*5.2.7　正交分解和最小二乘法 ………………………………… 196

习题 5.2 …… 202
第 5 章习题 …… 205

第 6 章 特征值与特征向量 …… 207
第一节 矩阵的特征值与特征向量 …… 207
习题 6.1 …… 214
第二节 相似矩阵与矩阵的相似对角化 …… 215
6.2.1 相似矩阵 …… 215
6.2.2 矩阵可对角化的条件 …… 216
6.2.3 实对称矩阵的对角化 …… 221
习题 6.2 …… 228
*第三节 应用举例 …… 230
6.3.1 一类常系数线性微分方程组的求解 …… 230
6.3.2 Fibonacci 数列与递推关系式的矩阵解法 …… 232
习题 6.3 …… 234
第 6 章习题 …… 235

第 7 章 二次曲面与二次型 …… 238
第一节 曲面与空间曲线 …… 238
7.1.1 曲面与空间曲线的方程 …… 238
7.1.2 柱面 锥面 旋转面 …… 242
7.1.3 5 种典型的二次曲面 …… 248
7.1.4 曲线在坐标面上的投影 …… 252
7.1.5 空间区域的简图 …… 253
习题 7.1 …… 254
第二节 实二次型 …… 256
7.2.1 二次型及其矩阵表示 …… 256
7.2.2 二次型的标准形 …… 258
7.2.3 合同变换与惯性定理 …… 262
7.2.4 正定二次型 …… 263
*7.2.5 二次曲面的标准方程 …… 267
习题 7.2 …… 273
第 7 章习题 …… 276

*第 8 章　线性变换 …… 278
第一节　线性变换及其运算 …… 278
8.1.1　线性变换的定义及其基本性质 …… 278
8.1.2　核与值域 …… 280
8.1.3　线性变换的运算 …… 283
习题 8.1 …… 285
第二节　线性变换的矩阵表示 …… 287
8.2.1　线性变换的矩阵 …… 287
8.2.2　线性算子在不同基下的矩阵之间的关系 …… 290
习题 8.2 …… 291
第 8 章习题 …… 293

第 9 章　MATLAB 软件简介及其应用举例 …… 294
第一节　MATLAB 软件的简介 …… 294
9.1.1　变量命名规则 …… 295
9.1.2　MATLAB 软件基本运算符 …… 295
习题 9.1 …… 295
第二节　MATLAB 软件在线性代数中的应用举例 …… 295
9.2.1　行列式的计算 …… 295
9.2.2　矩阵的基本运算 …… 297
9.2.3　向量的基本运算 …… 302
9.2.4　线性方程组求解 …… 303
9.2.5　矩阵特征值与特征向量的计算 …… 306
9.2.6　向量组的正交化 …… 307
习题 9.2 …… 307

附录 A　习题参考答案与提示 …… 309

附录 B　本书常用符号说明 …… 336

参考文献 …… 338

第1章 行列式

行列式是线性代数的一个基本工具,在很多问题的研究中都要用到行列式.为了求解2元及3元线性方程组(即关于未知量的1次方程组),引入了2阶和3阶行列式,并用2阶(3阶)行列式简明地表达了一类2元(3元)线性方程组的解.类似的讨论及求解方法可以推广到n元线性方程组,为此,先要引入n阶行列式的概念.本章首先采用简明的递归法引入n阶行列式的定义;进而讨论n阶行列式的基本性质及常用的计算方法;最后介绍求解n元线性方程组的Cramer法则.Cramer法则只是行列式的一个应用,在本书后面关于逆矩阵、矩阵的秩、方阵的特征值等问题的讨论中,行列式都是必不可少的研究工具.

第一节 行列式的定义与性质

1.1.1 2阶行列式与一类2元线性方程组的解

行列式的概念首先是在求解方程个数与未知量个数相同的线性方程组时提出的.例如,对于由2个方程2个未知量组成的线性方程组(其中x_1,x_2为未知量)

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\cdots\cdots① \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2,\cdots\cdots②\end{cases} \tag{1.1.1}$$

我们用消元法来求它的解.注意x_1的系数a_{11},a_{21}不全为零,不妨设$a_{11}\neq 0$,于是可利用方程①消去方程②中的未知量x_1,这只要方程②加上方程①的$\left(-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right)$倍,便可把方程组(1.1.1)化成为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ \left(a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 = b_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & \cdots\cdots③ \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，由方程④解出 x_2，再把解出的 x_2 代入方程③解出 x_1，便得方程组(1.1.1)有惟一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

为了简明地表达这个解，人们引入了 2 阶行列式. 2 阶行列式是由 4 个数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 排成 2(横)行、2(竖)列的算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{1.1.3}$$

并用它来表示数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即 **2 阶行列式的定义为**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{def}} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.1.4}$$

其中，a_{ij} 称为行列式的**元素**. a_{ij} 的两个下标用来表示该元素在行列式中的位置，其第 1 个下标(称为行标)为 i，表明该元素位于行列式的第 i 行；第 2 个下标(称为列标)为 j，表明该元素位于行列式(左起)的第 j 列. 通常称位于行列式的第 i 行、第 j 列处的元素 a_{ij} 为行列式的 (i,j) 元素.

(1.1.4)式的右端也称为 2 阶行列式(1.1.3)的展开式，它可用下述的对角线计算法则来记忆：如图 1.1.1，用实联线(称为行列式的主对角线)上两个元素的乘积，减去虚联线(称为行列式的副对角线)上两个元素的乘积，所得的差就是 2 阶行列式(1.1.3)的展开式.

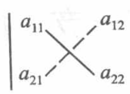

图 1.1.1

利用 2 阶行列式，(1.1.2)式可以表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \tag{1.1.5}$$

其中，分母是由方程组(1.1.1)的系数按它们原来在方程组中的次序所排成的 2 阶行列式，称为方程组(1.1.1)的**系数行列式**. 于是，可把方程组(1.1.1)的上述解法总结为：如果方程组(1.1.1)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则方程组(1.1.1)有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D},\tag{1.1.6}$$

其中，D_j 是将系数行列式 D 的第 j 列元素依次用方程组右端的常数项替换后所得的 2 阶行列式($j=1,2$)，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

例 1.1.1 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=5, \\ x_1-4x_2=-14. \end{cases}$$

解 由于方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=2\times(-4)-3\times 1=-11\neq 0,$$

所以方程组有惟一解. 又由

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -14 & -4 \end{vmatrix}=5\times(-4)-3\times(-14)=22,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -14 \end{vmatrix}=2\times(-14)-5\times 1=-33,$$

代入(1.1.6)式，得方程组的惟一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-2,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=3. \blacksquare$$

利用行列式对方程组(1.1.1)的上述讨论，其结果是优美的，而且是很有用的. 那么，能否将这一结果推广到由 n 个方程、n 个未知量组成的线性方程组上去呢？答案是肯定的，其结果就是我们在第三节将要介绍的 Cramer 法则. 但要导出求解 n 元线性方程组的 Cramer 法则，先要将 2 阶行列式的定义加以推广，引入 n 阶行列式的定义并建立 n 阶行列式的理论.

1.1.2 n 阶行列式的定义

为了将 2 阶行列式推广到 n 阶行列式，我们先来分析 2 阶行列式定义式的结构规律. 如果定义 1 阶行列式 $|a|=a$，则不难看出 2 阶行列式可以用 1 阶行列式来表示，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$