高考导航

独家推出“图书+网络视频课程+答疑服务”的辅导丛书

名牌大学自主招生高效备考

数学

范端喜◎编著

购正版图书　获超值“三重”大礼

一重大礼：价值50元的vip视频课程

二重大礼：“高仿真”模拟试卷一套

三重大礼：考前网上答疑服务

华东师范大学出版社

高考导航

名牌大学
自主招生
高效备考

数学

范端喜◎编著

华东师范大学出版社

目录

近年来自主招生数学试卷解读及应试策略

自从2006年复旦、上海交大等全国重点院校高考改革试“破冰”以来，各学校“深化自主选拔录取改革试验”招生方案不断出台，全国自主招生学校不断增加，而且各学校自主招生比例也在增加. 2010年自主招生中一些名牌高校首次实行联合统一考试，如清华大学、上海交通大学、中国科学技术大学、西安交通大学、南京大学五所高校实行“五校联考”，这些都引起了教育界人士和家长们等的高度关注，更引起了广大中学教师对自主招生命题的研究兴趣.

1. **试卷特点分析**

1.1　基础知识和基本技能仍是考查的重点

没有扎实的“双基”，能力培养就成了无源之水，无本之木；基础知识、基本技能是数学教学的重要任务之一，是培养学生能力的前提.

纵观复旦、上海交大、北大、浙大、清华等高校近几年自主招生笔试题目，我们会发现，大部分的题目仍是比较基础的问题. 复旦30道左右的选择题中也多半是学生们平时训练过的一些比较熟悉的题型和知识点.

1.2　考查知识点的覆盖面广，但侧重点有所不同

复旦、上海交大等高校近几年自主招生的试题，知识点的覆盖面还是很广的，基本上涉及高中数学大纲的所有内容，如函数、集合、数列、复数、三角、排列组合、概率统计、向量、立体几何、解析几何等.

但高校自主招生考试命题是由大学教授完成的，考虑到高等数学与初等数学的衔接，以下几个问题在近几年复旦自主招生考试中出现的频率较高：函数和方程问题、排列组合和概率统计、不等式、导数等.

此外，矩阵和行列式虽然是高等数学中非常重要的内容，上海高考略有涉及，但目前还未纳入全国高考范围，而在复旦自主招生试题中，近几年每年都有相关试题，望能引起广大师生的注意.

还有一点要提醒上海考生注意的是，导数这部分内容目前不在上海高考范围内，但五校联考面向全国，2010年五校自主招生考试中有相关题目出现.

1.3　注重数学知识和其他科目知识的整合，考查学生应用知识解决问题的能力

如2010年五校联考有这样一个问题：

已知基因型为AA、Aa、aa的比例为 $u:2v:w$，且 $u+2v+w=1$.

(1) 求子一代AA、Aa、aa的比例；

(2) 子二代与子一代比例是否相同?

这是一道与生物学知识有密切联系的数学问题,若考生缺乏有关生物方面的知识,则肯定不能解决此问题.这道题目在考生中引起了强烈的反响,它考查了学生应用数学解决问题的能力(详细解答见本书第十讲).

1.4　突出对思维能力和解题技巧的考查

近几年的自主招生试卷中对数学思想方法和思维策略的考查达到了相当高的层次,难度上有时与全国高中数学联赛一试试题相当.

例如,2007 年上海交大冬令营自主招生试题中有这样一个问题:

设 $f(x)=(1+a)x^4+x^3-(3a+2)x^2-4a$,试证明对任意实数 a:

(1) 方程 $f(x)=0$ 总有相同实根;

(2) 存在 x_0,恒有 $f(x_0)\neq 0$.

这两问解决的策略和方法是:换一个角度,将函数看成一个关于 a 的一次函数.

又如,对解决学习型问题的能力的考查一直是中学数学教学大纲中提到的对学生能力要求较高的问题.学习型问题要求对过去没有学习过的概念、定理、公式或方法,在当前情境下通过阅读理解,即时学习,并运用其解决与之相关的问题.

学习型问题对培养学生的阅读理解能力、独立获取知识的能力以及创新精神和实践能力都是大有裨益的,在平时的学习中应适当加以训练.

2007 年清华大学自主招生考试中有这样一个问题:对于集合 $M\subseteq \mathbf{R}^2$,称 M 为开集,当且仅当 $\forall P_0\in M$, $\exists r>0$,使得 $\{P\in \mathbf{R}^2 \mid |PP_0|<r\}\subseteq M$. 判断集合 $\{(x,y)\mid 4x+2y-5>0\}$ 与 $\{(x,y)\mid x\geqslant 0,\ y>0\}$ 是否为开集,并证明你的结论.

2010 年复旦大学自主招生考试 32 道试题中有六七道题涉及此方面的问题,例如,设集合 X 是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集,如果点 $x_0\in \mathbf{R}$ 满足:对任意 $a>0$,都存在 $x\in X$,使得 $0<|x-x_0|<a$,那么称 x_0 为集合 X 的聚点.用 $\mathbf{Z}$ 表示整数集,则在下列集合:

① $\left\{\dfrac{n}{n+1} \mid n\in \mathbf{Z},\ n\geqslant 0\right\}$,　② $\mathbf{R}\backslash\{0\}$,　③ $\left\{\dfrac{1}{n} \mid n\in \mathbf{Z},\ n\neq 0\right\}$,　④ 整数集 $\mathbf{Z}$

中,以 0 为聚点的集合有(　　).

(A) ②③　　(B) ①④　　(C) ①③　　(D) ①②④

“开集”、“聚点”等是高等数学中非常重要的概念,同学们以后会在泛函分析、拓扑学等课程中学习到它(详细解答见第一讲).

2. 应试和准备策略

针对自主招生试题的上述特点,大家在复习时应注意以下几点:

2.1　注意知识点的全面

数学题目被猜中的可能性很小,知识点一般都是靠平时积累,剩下的就是个人的

现场发挥.数学需要靠平时扎扎实实的学习才能考出好成绩.

另外,对有些平时不太注意的问题或高考不一定考的问题,如矩阵、行列式等也不可忽视.

2.2 适当做近几年的自主招生考试的真题

俗话说,知己知彼,百战百胜.同学们可适当地训练近几年自己报考的高校自主招生考试的试题,熟悉一下题型是有益的.

本书精选了北京大学、清华大学、复旦大学、上海交通大学(简称"交大")、浙江大学、南京大学(简称"南大")、中国科学技术大学(简称"科大")、南开大学数学特色班(简称"南开")、武汉大学(简称"武大")、同济大学等名牌大学的自主招生数学真题,详细分析解题思路和题型特点,相信能有效指导广大考生备考.

2.3 注重知识的延伸

复旦、交大、清华等全国重点院校自主招生考试试题比高考试题稍难,比数学竞赛试题又稍简单.有些问题有一定的深度,这就要求考生平时注意知识点的延伸.例如2008年复旦自主招生考试的第77题:

40个学生参加数学奥林匹克竞赛.他们必须解决一个代数学问题、一个几何学问题以及一个三角学问题.具体情况如下表所述:

问　题	解决问题的学生数
代数学问题	20
几何学问题	18
三角学问题	18
代数学问题和几何学问题	7
代数学问题和三角学问题	8
几何学问题和三角学问题	9

其中有三位学生一个问题都没有解决,则三个问题都解决的学生数是(　　).

(A) 5　　(B) 6　　(C) 7　　(D) 8

此题用文氏图虽能解决,但花的时间较多;若是知道三个集合的容斥原理,$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)+|A\cap B\cap C|$,只要代入公式,马上就可解决(详细解答见第一讲).

又如2008年复旦第88题:

设 x_1、x_2、x_3 是方程 $x^3+x+2=0$ 的三个根，则行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=($　　$)$.

(A) -4　　(B) -1　　(C) 0　　(D) 2

此题要用到两个课本之外的知识点，三次方程的韦达定理和公式 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$. 三次方程的韦达定理虽然不难推导，但平时同学们对三次方程比较陌生.

而公式 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$ 对参加过数学竞赛的同学并不陌生(详细解答见第十五讲).

再比如 2010 年五校联考中有这样一个问题：在$\triangle ABC$ 中，H 为垂心，O 为外心，中线 AD 交 OH 于 G，求$\dfrac{S_{\triangle AGH}}{S_{\triangle OGD}}$.

参加过数学竞赛的同学清楚，这实际上是一道与欧拉线有关的问题，若平时接触或了解欧拉线知识，则做这道题目就不费吹灰之力(见第十二讲).

总之，同学们若是注意一些知识点的延伸，考试时必定会有一种居高临下的感觉.

最后还有一点需要提醒上海考生注意的是有关平时计算器使用的问题，现在上海中学生人手一台计算器. 首先我要说的是使用计算器并不是坏事，但确实有不少学生过分依赖计算器. 而自主招生考试中是禁止使用计算器的，所以习惯使用计算器的不少上海考生，在自主招生考试中会手忙脚乱，不知所措.

(注：本文根据本书作者的文章《自主招生之我见》增删而成，原文发表于 2008 年 11 月 10 日《新民晚报·教育周刊》(A22 版))

第一讲 ○ 集合与命题

知识拓展

集合与命题这一章的相关知识，在自主招生考试中一般是以小题形式出现，但偶尔也会综合其他知识点而出现在大题中.

1. 命题的否定是四种命题中最麻烦的细节问题. 下面是一些常见词语的否定：

“至少有一个”的否定是“一个也没有”，“都是”的否定是“不都是”，“所有”的否定是“某些”，“存在”的否定是“任意”，“或”的否定是“且”.

2. 容斥原理：令 $|A|$ 表示集合 A 中元素的个数，则 $|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m|=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m}|A_i|-\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m}|A_i\cap A_j|+\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{m-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|$.

3. 德摩根定理：U 是全集，$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$，$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

真题讲解

【例 1】 (2009 交大)珠宝店丢失了一件珍贵珠宝. 以下四人只有一人说真话，只有一人偷了珠宝. 甲：我没有偷. 乙：丙是小偷. 丙：丁是小偷. 丁：我没有偷. 则说真话的人是________，偷珠宝的人是________.

❑ **分析与解**：四人中有且只有一人说真话. 先设甲说的是真话，即甲没有偷. 由于丙说的是假话，故丁不是小偷；另一方面，由于丁说的也是假话，故丁是小偷. 矛盾！

设乙说的是真话，即丙是小偷. 但由于丁说的是假话，故丁也是小偷. 矛盾！

设丙说的是真话，即丁是小偷，但由于甲说的是假话，故甲也是小偷. 矛盾！

故只有丁说的是真话，且由于甲说的是假话，故甲是小偷.

【例 2】 (2006 复旦)若非空集合 $X=\{x\mid a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$，$Y=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 16\}$，则使得 $X\subseteq X\cap Y$ 成立的所有 a 的集合是(　　).

(A) $\{a\mid 0\leqslant a\leqslant 7\}$　　(B) $\{a\mid 3\leqslant a\leqslant 7\}$

(C) $\{a\mid a\leqslant 7\}$　　(D) 空集

❑ **分析与解**：一方面，$X\subseteq X\cap Y$；另一方面，$X\cap Y\subseteq X$，故 $X=X\cap Y$，而这又

等价于 $X \subseteq Y$. 再注意到集合 X 非空，故有 $\begin{cases}3a-5 \geqslant a+1, \\ a+1 \geqslant 1, \\ 3a-5 \leqslant 16\end{cases} \Rightarrow 3 \leqslant a \leqslant 7$，应选 B.

注：提醒同学们审题要小心，注意本题中的“非空”二字.

【例 3】 (2008 武大)有 50 名学生参加跳远和铅球两项测试，跳远和铅球测验成绩分别及格的有 40 人和 31 人，两项测验成绩均不及格的有 4 人，两项测验成绩都及格的有多少人？

❑ **分析与解**：这是一道涉及容斥原理的试题. 记 $A=\{$跳远测验成绩及格的学生$\}$，$B=\{$铅球测验成绩及格的学生$\}$. 依题意，$|A|=40$，$|B|=31$，两项测验成绩都及格的即为 $A \cap B$. 又 $|A \cup B|=50-4=46$，由容斥原理，$|A \cup B|=|A|+|B|-|A \cap B|$，故 $|A \cap B|=|A|+|B|-|A \cup B|=40+31-46=25$，即两项测验成绩都及格的有 25 人.

注：本题也可结合文氏图，设两项测验成绩都及格的有 x 人，有方程 $x+(31-x)+(40-x)+4=50$，解得 $x=25$(如图 1-1).

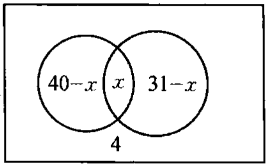

图 1-1

【例 4】 (2010 复旦)设集合 X 是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集，如果点 $x_0 \in \mathbf{R}$ 满足：对任意 $a>0$，都存在 $x \in X$，使得 $0<|x-x_0|<a$，那么称 x_0 为集合 X 的聚点. 用 $\mathbf{Z}$ 表示整数集，则在下列集合：① $\left\{\frac{n}{n+1} \middle| n \in \mathbf{Z}, n \geqslant 0\right\}$，② $\mathbf{R} \backslash \{0\}$，③ $\left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\right\}$，④整数集 $\mathbf{Z}$ 中，以 0 为聚点的集合有(　　).

(A) ②③　　(B) ①④　　(C) ①③　　(D) ①②④

❑ **分析与解**：这是一道学习型问题. 根据定义，“聚点”这个概念应理解为以任意无穷小为半径，以 x_0 为圆心的圆内都至少有 X 的一个元素(不包括 x_0).

对集合① $\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\right\}$，若取 $a=\frac{1}{3}$，则不存在 $x \in \left\{\frac{n}{n+1} \middle| n \in \mathbf{Z}, n \geqslant 0\right\}$，满足 $0<|x-0|<\frac{1}{3}$. 显然②③是以 0 为聚点. 对集合④，若令 $a=\frac{1}{2}$ $\left(\text{不是唯一的取法，也可取} \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots \text{，只要 } a<1 \text{ 均可}\right)$，则也不存在 $x \in X$，使得 $0<|x-0|<a$.

综上，应选 A.

注：“聚点”是高等数学中的一个重要概念，像这类高等数学的概念下放到中学考试中的现象，在自主招生考试中屡见不鲜.

【例 5】 (2010 浙大)设集合 $M=\{x \mid f(x)=x\}$, $N=\{x \mid f(f(x))=x\}$.

(1) 求证: $M \subseteq N$;

(2) 若 $f(x)$是一个在 **R** 上单调递增的函数,是否有 $M=N$? 若是,请证明.

❑ 分析与解:(1) 若 $M=\varnothing$,显然 $M \subseteq N$ 成立;若 $M \neq \varnothing$,任取 $x_0 \in M$,即有 $f(x_0)=x_0$,则 $f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$,即 $x_0 \in N$,故 $M \subseteq N$.

(2) 结论是 $M=N$. 下证 $N \subseteq M$.

若 $N=\varnothing$,显然结论成立;若 $N \neq \varnothing$,任取 $x_0 \in N$,即有 $f(f(x_0))=x_0$,下证 $f(x_0)=x_0$. 若 $f(x_0) \neq x_0$,不妨先设 $f(x_0)>x_0$,由于 $f(x)$ 是一个在 **R** 上单调递增的函数,故 $f(f(x_0))>f(x_0)>x_0$,与 $f(f(x_0))=x_0$ 矛盾!同理,$f(x_0)<x_0$ 也将导致矛盾!故 $f(x_0)=x_0$,即 $x_0 \in M$,从而有 $N \subseteq M$.

结合(1),证得 $N=M$.

注:本题的第(2)问中用的是反证法,值得细细体会.

实战演练

一、选择题

1. (2006 复旦)条件甲: $\sqrt{1+\sin\theta}=a$,条件乙:$\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=a$, 则(　　).

(A) 甲是乙的充分必要条件　　(B) 甲是乙的必要条件

(C) 甲是乙的充分条件　　(D) 甲不是乙的必要条件,也不是充分条件

2. (2007 复旦)“$a=\frac{1}{2}$”是“直线$(a+2)x+3ay+1=0$与直线$(a-2)x+(a+2)y-3=0$相互垂直”的(　　).

(A) 充分必要条件　　(B) 充分不必要条件

(C) 必要不充分条件　　(D) 既不充分也不必要条件

3. (2008 复旦)40 个学生参加数学奥林匹克竞赛. 他们必须解决一个代数学问题、一个几何学问题以及一个三角学问题. 具体情况如下表所述:

问　题	解决问题的学生数
代数学问题	20
几何学问题	18
三角学问题	18
代数学问题和几何学问题	7

续　表

问　题	解决问题的学生数
代数学问题和三角学问题	8
几何学问题和三角学问题	9

其中有三位学生一个问题都没有解决，则三个问题都解决的学生数是(　　).

(A) 5　　(B) 6　　(C) 7　　(D) 8

4. (2009 复旦)"要使函数 $f(x)\geqslant 0$ 成立，只要 x 不在区间 $[a, b]$ 内就可以了"的意思是(　　).

(A) 如果 $f(x)\geqslant 0$，则 $x\notin[a, b]$　　(B) 如果 $x\in[a, b]$，则 $f(x)<0$

(C) 如果 $x\notin[a, b]$，则 $f(x)\geqslant 0$　　(D) 前面三个解释都不准确

5. (2009 复旦)实轴 **R** 中的集合 X 如果满足：任意非空开区间都含有 X 中的点，则称 X 在 **R** 中稠密，那么，"**R** 中的集合 X 在 **R** 中不稠密"的充分必要条件是(　　).

(A) 任意非空开区间都不含有 X 中的点

(B) 存在非空开区间不含有 X 中的点

(C) 任意非空开区间都含有 X 的补集中的点

(D) 存在非空开区间含有 X 的补集中的点

6. (2009 复旦)设 X 是含 $n(n>2)$ 个元素的集合，A、B 是 X 中的两个互不相交的子集，分别含有 m、$k(m, k\geqslant 1, m+k\leqslant n)$ 个元素，则 X 中既不包含 A 也不包含 B 的子集的个数是(　　).

(A) $2^{n-m}+2^{n-k}-2^{n-m-k}$　　(B) 2^{n-m-k}

(C) $2^{n}-2^{n-m}-2^{n-k}+2^{n-m-k}$　　(D) $2^{n+1}-2^{n-m}-2^{n-k}+2^{n-m-k}$

7. (2010 复旦)设集合 A、B、C、D 是全集 X 的子集，$A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C\neq\varnothing$，则下列选项中正确的是(　　).

(A) 如果 $D\subsetneqq B$ 或 $D\subsetneqq C$，则 $D\cap A\neq\varnothing$

(B) 如果 $D\subsetneqq A$，则 $\complement_X D\cap B\neq\varnothing$，$\complement_X D\cap C\neq\varnothing$

(C) 如果 $D\supsetneqq A$，则 $\complement_X D\cap B=\varnothing$，$\complement_X D\cap C=\varnothing$

(D) 上述各项都不正确

8. (2010 复旦)设 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的函数，如果对任意满足 $a\leqslant x<y\leqslant b$ 的 x、y 都有 $f(x)\leqslant f(y)$，则称 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的递增函数，那么，$f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的非递增函数应满足(　　).

(A) 存在满足 $x<y$ 的 x，$y\in[a, b]$，使得 $f(x)>f(y)$

(B) 不存在 x，$y\in[a, b]$ 满足 $x<y$ 且 $f(x)\leqslant f(y)$

(C) 对任意满足 $x < y$ 的 $x, y \in [a, b]$，都有 $f(x) > f(y)$

(D) 存在满足 $x < y$ 的 $x, y \in [a, b]$，使得 $f(x) \leqslant f(y)$

9. (2010 复旦)对于原命题"单调函数不是周期函数"，下列陈述正确的是(　　).

(A) 逆命题为"周期函数不是单调函数"

(B) 否命题为"单调函数是周期函数"

(C) 逆否命题为"周期函数是单调函数"

(D) 以上三者都不正确

10. (2010 复旦)设集合 $A = \{(x, y) \mid \log_a x + \log_a y > 0\}$，$B = \{(x, y) \mid y + x < a\}$. 若 $A \cap B = \varnothing$，则 a 的取值范围是(　　).

(A) $\varnothing$　　　　(B) $a > 0$, $a \neq 1$

(C) $0 < a \leqslant 2$, $a \neq 1$　　　　(D) $1 < a \leqslant 2$

11. (2007 武大)某珠宝店失窃，甲、乙、丙、丁四人涉嫌被拘审，四人的口供如下：

甲：作案的是丙；

乙：丁是作案者；

丙：如果我作案，那么丁是主犯；

丁：作案的不是我.

如果四人口供中只有一个是假的，那么以下判断正确的是(　　).

(A) 说假话的是甲，作案的是乙

(B) 说假话的是丁，作案的是丙和丁

(C) 说假话的是乙，作案的是丙

(D) 说假话的是丙，作案的是丙

二、填空题

12. (2009 交大)集合 A 满足：若 $a \in A$，则 $\dfrac{1}{1-a} \in A$. 若 $2 \in A$，则满足条件的元素个数最少的集合 A 为________.

13. (2009 科大)命题"若 $x^2 + y^2 > 2$，则 $|x| > 1$ 或 $|y| > 1$"的否命题是________.

14. (2008 科大) $A = \left\{(x, y) \,\middle|\, (x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant \dfrac{4}{5}\right\}$，$B = \{(x, y) \mid |x-1| + 2|y-2| \leqslant a\}$，$A \subseteq B$，则 a 的取值范围是________.

15. (2007 武大)运动会上，甲、乙、丙三名同学各获得一枚奖牌，其中 1 人得金牌、1 人得银牌、1 人得铜牌. 王老师曾猜测"甲得金牌、乙不得金牌、丙不得铜牌"，结果王老师只猜对了一人，那么甲、乙、丙分别获得________、________、________牌.

16. (2007 武大)来自英、法、日、德的甲、乙、丙、丁四位客人同时参加一个国际会

议. 他们除了懂本国语言外，每人还会说其他三国语言中的一种. 有一种语言是三个人都会说的，但没有一种语言人人都懂. 现知道：①甲是日本人，丁不会说日语，但他俩能自由交谈；②四个人中，没有一个人既能用日语交谈，又能用法语交谈；③乙不会说英语，当甲与丙交谈时，他都能做翻译；④乙、丙、丁交谈时，找不到共同语言沟通. 由上述可知，丁会说的两种语言是________、________.

三、解答题

17. (2003 复旦)定义闭集合 S，若 $a, b \in S$，则 $a+b \in S$，$a-b \in S$.

(1) 举一例，真包含于 $\mathbf{R}$ 的无限闭集合；

(2) 求证：对任意两个闭集合 $S_1, S_2 \subsetneqq \mathbf{R}$，存在 $c \in \mathbf{R}$，但 $c \notin S_1 \cup S_2$.

18. (2009 浙大)给出 1、2、3、4、5 五个数字，排列这五个数字，要求第一个到第 i 个位置($1 \leqslant i \leqslant 4$)不能由 $1, 2, \cdots, i$ 的数字组成. 如 21534 不可，因为第一位到第二位由 1、2 组成，同理 32145 也不可. 求满足要求的所有可能的组合数.

19. (2007 清华)对于集合 $M \subseteq \mathbf{R}^2$(表示二维点集)，称 M 为开集，当且仅当 $\forall P_0 \in M$，$\exists r > 0$，使得 $\{P \in \mathbf{R}^2 \mid |PP_0| < r\} \subseteq M$. 判断集合 $\{(x, y) \mid 4x+2y-5>0\}$ 与 $\{(x, y) \mid x \geqslant 0, y > 0\}$ 是否为开集，并证明你的结论. (注："$\forall$"表示"任意"，"$\exists$"表示"存在")

第二讲 ○ 柯西不等式、均值不等式

知识拓展

1. 均值不等式：设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个正实数，记 $Q_n=\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$，$A_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，$G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，$H_n=\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$，则

$$Q_n\geqslant A_n\geqslant G_n\geqslant H_n,$$

其中等号成立的条件是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

Q_n、A_n、G_n、H_n 分别称为平方平均、算术平均、几何平均、调和平均.

2. 柯西不等式：设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$；$b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是 $2n$ 组实数，则有 $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$，也可简写为 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2\right)\geqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2$，其中等号成立的条件是 $a_i=\lambda b_i (i=1, 2, \cdots, n)$，$\lambda$ 是一个常数. 该不等式的证明见例 1.

3. 柯西不等式的几个推论.

(1) 当 $b_1=b_2=\cdots=b_n=1$ 时，柯西不等式即为 $n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$. 若 $a_i\in\mathbf{R}^+ (i=1, 2, \cdots, n)$，则 $\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}\geqslant\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，此即上面提到的平方平均≥算术平均.

(2) 当 $b_i=\dfrac{1}{a_i} (i=1, 2, \cdots, n)$ 时，有 $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\left(\dfrac{1}{a_1^2}+\dfrac{1}{a_2^2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n^2}\right)\geqslant n^2$.

(3) 若 $a_i, b_i\in\mathbf{R}^+ (i=1, 2, \cdots, n)$，则 $\left(\dfrac{a_1}{b_1}+\dfrac{a_2}{b_2}+\cdots+\dfrac{a_n}{b_n}\right)(b_1+b_2+\cdots+b_n)\geqslant(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n})^2$.

真题讲解

【例 1】 证明柯西不等式.

❑ **证法一：** 若 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，则柯西不等式 $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\cdot$

$(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$ 显然成立.

若 a_i 不全为零 $(i=1,2,\cdots,n)$，令 $f(x)=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2+2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$.

一方面，因 $f(x)=(a_1^2x^2+2a_1b_1x+b_1^2)+(a_2^2x^2+2a_2b_2x+b_2^2)+\cdots+(a_n^2x^2+2a_nb_nx+b_n^2)=(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+\cdots+(a_nx+b_n)^2\geqslant0.$ $(*)$

另一方面，由 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2>0$，$f(x)\geqslant0$ 恒成立 $\Leftrightarrow\Delta=[2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)]^2-4(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\leqslant0\Leftrightarrow(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$，此即柯西不等式. 由 $(*)$ 式知等号成立的条件为 $a_i=\lambda b_i(i=1,2,\cdots,n)$.

❑ 证法二：我们将平面向量、空间向量推广到 n 维向量. 令 $\vec{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$，由于 $|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle|\leqslant1$，故

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

$$\Leftrightarrow|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$$

$$\Leftrightarrow(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2),$$

等号成立的条件是 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 共线，即 $a_i=\lambda b_i(\lambda\in\mathbf{R})$.

注：柯西不等式的证明方法很多，有十几种，以上两种方法是中学生比较容易接受的.

【例 2】 (2004 复旦)比较 $\log_{24}25$ 与 $\log_{25}26$ 的大小.

❑ 分析与解：先作差并化为同底，

$$\log_{24}25-\log_{25}26=\frac{\lg25}{\lg24}-\frac{\lg26}{\lg25}=\frac{\lg^225-\lg24\cdot\lg26}{\lg24\cdot\lg25},$$

下面比较 $\lg^225$ 与 $\lg24\cdot\lg26$ 的大小.

由均值不等式，

$$\sqrt{\lg24\cdot\lg26}<\frac{\lg24+\lg26}{2}$$

$$=\frac{\lg(24\cdot26)}{2}=\frac{\lg(25-1)(25+1)}{2}$$

$$=\frac{\lg(25^2-1)}{2}<\frac{\lg25^2}{2}=\lg25,$$

故 $\lg24\cdot\lg26<\lg^225$. 从而 $\log_{24}25>\log_{25}26$.

注：此题的结论可推广为 $\log_x(x+1)>\log_{(x+1)}(x+2)(x>1)$.

【例 3】 (2009 南大)P 为 $\triangle ABC$ 内一点，它到三边 BC、CA、AB 的距离分别为

d_1、d_2、d_3，S 为$\triangle ABC$ 的面积.

求证：$\dfrac{a}{d_1}+\dfrac{b}{d_2}+\dfrac{c}{d_3}\geqslant\dfrac{(a+b+c)^2}{2S}$（这里 a、b、c 分别表示 BC、CA、AB 的长）.

❑ **分析与解**：如图 3 - 1，易见 $S=\dfrac{1}{2}ad_1+\dfrac{1}{2}bd_2+\dfrac{1}{2}cd_3$.

由柯西不等式，$(ad_1+bd_2+cd_3)\left(\dfrac{a}{d_1}+\dfrac{b}{d_2}+\dfrac{c}{d_3}\right)\geqslant(a+b+c)^2$

$$\Rightarrow 2S\left(\frac{a}{d_1}+\frac{b}{d_2}+\frac{c}{d_3}\right)\geqslant(a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a}{d_1}+\frac{b}{d_2}+\frac{c}{d_3}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{2S}.$$

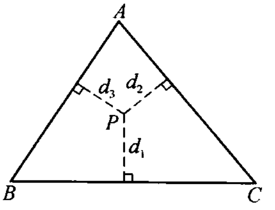

图 3 - 1

【例 4】 (2010 浙大)有小于 1 的正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$. 求证：$\dfrac{1}{x_1-x_1^3}+\dfrac{1}{x_2-x_2^3}+\cdots+\dfrac{1}{x_n-x_n^3}>4$.

❑ **分析与解**：

法一：由柯西不等式，$[(x_1-x_1^3)+(x_2-x_2^3)+\cdots+(x_n-x_n^3)]\left[\dfrac{1}{x_1-x_1^3}+\dfrac{1}{x_2-x_2^3}+\cdots+\dfrac{1}{x_n-x_n^3}\right]\geqslant n^2$.

注意到 $(x_1-x_1^3)+(x_2-x_2^3)+\cdots+(x_n-x_n^3)=(x_1+x_2+\cdots+x_n)-(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3)=1-(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3)$，而 $0<x_i<1$，$x_i^3<x_i(i=1,2,\cdots,n)$，

$$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3<x_1+x_2+\cdots+x_n=1,$$

故 $1-(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3)\in(0,1)$.

从而 $\dfrac{1}{x_1-x_1^3}+\dfrac{1}{x_2-x_2^3}+\cdots+\dfrac{1}{x_n-x_n^3}>n^2$，显然 $n\geqslant 2$，故 $\dfrac{1}{x_1-x_1^3}+\dfrac{1}{x_2-x_2^3}+\cdots+\dfrac{1}{x_n-x_n^3}>4$.

法二：先证明一个局部不等式：

$$\frac{1}{x_i-x_i^3}\geqslant 4x_i(i=1,2,\cdots,n).\qquad (*)$$

事实上，$(*)\Leftrightarrow 1\geqslant 4x_i^2-4x_i^4\Leftrightarrow 4x_i^4-4x_i^2+1\geqslant 0\Leftrightarrow(2x_i^2-1)^2\geqslant 0$，显然成立.

所以，$\dfrac{1}{x_1-x_1^3}+\dfrac{1}{x_2-x_2^3}+\cdots+\dfrac{1}{x_n-x_n^3}\geqslant 4(x_1+x_2+\cdots+x_n)=4$，当且仅当 $x_i=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(i=1,2,\cdots,n)$ 时等号成立，这显然不可能.

【例 5】 (2009 北大)已知对 $\forall x\in\mathbf{R}$, $a\cos x+b\cos 2x\geqslant -1$ 恒成立,求$(a+b)_{\max}$.

❑ **分析与解**:原不等式即 $b(2\cos^2 x-1)+a\cos x+1\geqslant 0$,即 $2b\cos^2 x+a\cos x-b+1\geqslant 0$. 令 $f(t)=2bt^2+at-b+1$,其中 $t=\cos x\in[-1,1]$.

$$(1)\begin{cases}b\leqslant 0,\\ f(-1)=2b-a-b+1\geqslant 0,\\ f(1)=2b+a-b+1\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow a+b\leqslant 2b+1\leqslant 1<2;$$

$$(2)\begin{cases}b>0,\\ -\dfrac{a}{4b}\notin[-1,1],\\ b-a+1\geqslant 0,\\ b+a+1\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow a<-4b \text{ 或 } a>4b.$$

若 $a<-4b$,则 $a+b<-3b<0<2$;若 $a>4b$,则由 $b-a+1\geqslant 0$,得 $4b<a\leqslant 1+b$,即 $b\leqslant\dfrac{1}{3}$,故 $a+b\leqslant 1+2b\leqslant\dfrac{5}{3}<2$.

$$(3)\begin{cases}b>0,\\ -\dfrac{a}{4b}\in[-1,1],\\ a^2\leqslant 8b(1-b)\end{cases}\Rightarrow a^2+8b^2-8b\leqslant 0,\text{ 即 } a^2+8\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant 2.$$

由柯西不等式,

$$2\times\frac{9}{8}\geqslant\left[a^2+8\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\right]\left(1+\frac{1}{8}\right)\geqslant\left(a+b-\frac{1}{2}\right)^2,$$

故 $a+b-\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{3}{2}$,即 $a+b\leqslant 2$. 当且仅当 $a=\dfrac{4}{3}$, $b=\dfrac{2}{3}$ 时等号成立,此时满足 $-\dfrac{a}{4b}=-\dfrac{1}{2}\in[-1,1]$.

综上,$(a+b)_{\max}=2$.

实战演练

一、选择题

1. (2009 复旦)设 $x, y, z>0$ 满足 $xyz+y+z=12$,则 $\log_4 x+\log_2 y+\log_2 z$ 的最大值是(　　).

(A) 3　　(B) 4　　(C) 5　　(D) 6

2. (2009 复旦)设实数 $a, b, c\neq 0$, $\dfrac{bc}{a}$、$\dfrac{ca}{b}$、$\dfrac{ab}{c}$成等差数列,则下列一定成立的是