普通高等教育『十一五』国家级规划教材

SHUXUE
SIWEI
FANGFA

数学思维方法

第二版

主编 / 王宪昌

- 数学思维方法研究扩展了数学方法论的研究与教学内容，突出了数学思维在数学学习和研究中的重要地位
- 数学思维方法研究既注重数学的解题问题，又关注解题者的思维方式
- 数学思维方法是研究数学思维的特征、规律及其方法的学科

人民教育出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

数学思维方法

第二版

人民教育出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

数学思维方法 / 王宪昌主编. —2 版. —北京：人民教育出版社，2010

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

ISBN 978 - 7 - 107 - 22343 - 3

Ⅰ. ①数…

Ⅱ. ①王…

Ⅲ. ①数学-思维方法-高等学校-教材

Ⅳ. ①01 - 0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 043654 号

人民教育出版社 出版发行

网址：http://www.pep.com.cn

北京四季青印刷厂印装　全国新华书店经销

2010 年 3 月第 2 版　2010 年 4 月第 1 次印刷

开本：787 毫米×1 092 毫米　1/16　印张：27

字数：401 千字　印数：0 001～3 000 册

ISBN 978-7-107-22343-3　定价：32.30 元

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与本社出版科联系调换。

（联系地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

编者说明

数学方法论是数学教育中一个重要的教学与研究的课题，早在20世纪80年代初，徐利治教授开创的数学方法论的研究与教学，已经成为数学教育的一个热点问题。目前高师院校的数学教育课程中，大都开设有数学方法论的选修课程。

数学思维方法研究扩展了数学方法论的研究与教学内容，突出了数学思维在数学学习和研究中的重要地位。数学思维方法研究既注重数学的解题问题，又关注解题者的思维方式。在目前的数学教育中，人们越来越注意到数学思维与数学知识、数学方法的同等重要性。更为重要的是，现代中外数学教育的改革与发展都极为关注有关数学思维方法的问题。由此，数学方法论之后的数学思维方法的研究与教学，既是数学方法论自身发展的需要，也是现代数学教育发展的需要。

目前我国正在进行数学教育的改革，高师院校作为中小学数学教师的培养基地，担负着面向未来数学教育的历史重任。为了更好地满足高师院校数学思维方法教学的需要，我们总结多年来从事数学思维方法研究与教学的体会，并结合国内同行们有关数学方法论、数学思维方法的研究成果，编写了这本《数学思维方法》。本书是供高师院校数学教育专业、小学教育专业使用的数学教育的教材，同时也可作为中小学数学教师的教学参考书。

本书分为三个部分。第一部分包括第一章、第二章，是对数学思维方法的概述和对数学中几种重要思维方式的介绍。这部分的内容会使学习者对数学思维、数学思维方法与数学、数学教育的发展有一个比较全面的理解。第二部分包括第三章至第十章，是目前国内比较有代表性的数学方法论与数学思维方法研究的主要内容。这部分内容的学习，可以使学习者掌握数学思维的具体方法及要求，并由此形成对数学方法与数学思维方式的深入理解和运用。第三部分包括第十一章、第十二章，主要是从中西数学文化差异、思维模式的角度，梳理数学思维方法的作用，使学习者认识到我们目前的数学教育是中西文化交流融合的重要内容，同时使学习者对数学美学、数学思维方法的未来发展及研究方向有一个比较清晰的认识。

本书有如下三个重要特点。

1. 突出了数学思维在数学知识、理论和方法之中的地位。本书从数学思维与数学的关系，从数学思维方式在数学方法中的作用，强调了数学思维的培养应成为与数学知识、理论和方法同样重要的数学教育内容。同时，还从中西文化传统中思维方式差异的层面，说明基础教育中数学思维教学的重要性。一方面，数学思维作为一种数学理论研究及数学解题的深层研究，对解题应有理论指导意义；另一方面，作为数学教育的基本要求，数学思维应超越数学解题的技法要求，使学习者对数学在思维层面上有新的理解。

2. 突出了数学史、数学哲学与数学文化研究的相互结合。从重大的数学思维方法到具体的一个解题的数学思维方式，本书都尽量与数学的发展史相结合，并且从数学自身的特征和社会教育目标的要求层面，说明数学思维、数学思维方法教学的作用。数学史实的选编和对某些数学哲学观点的论述，使学习者可以从数学发展的整体来理解数学思维、数学思维

方法。从数学文化层面对数学思维的论述，可以使我们认识到中国传统思维方式与现代数学思维方式的差异，从而在中西文化差异的层面理解数学思维在数学教育中的地位。

3. 突出了数学思维方法的研究与数学教育的相互结合。本书吸收了国内有关数学思维方法的一些研究成果，同时又结合我们自己多年的教学实践，在编写中突出了学术研究和课堂教学的结合性，作为一本教材我们力争使其既有学术的研究性又具有教学的实用性。本书选入的研究成果都可以在注释和参考文献中查到，有些例题我们也注明了原著。那些在数学方法论、数学思维方法研究中作出不懈努力的学者们的研究成果，也为本书的构成奠定了重要的基础。

本书各章的执笔人为：第一章、第二章，王宪昌、刘鹏飞；第三章、第四章，陈慧君、朱宏；第五章、第六章，朱宏、陈慧君；第七章、第八章，曲元海、徐建国；第九章、第十章，徐建国、徐乃楠；第十一章、第十二章，徐乃楠、刘鹏飞。

作为主编，在本书付梓之际我要感谢二十多年前推动、督促我进入数学教育领域的王秋海教授。王秋海教授是当时我校最早开展数学思维方法研究与教学的青年学者，本书的一些内容构思选编还保留了当年王秋海教授的许多理念。我还要感谢二十多年前就支持我们开展数学思维方法研究与教学的官子吉教授，正是由于他的帮助才使数学思维方法在当时我校的数学教育中，成为重要的研究与教学内容，使得我们当时的年轻人能够著书立说，跟上了数学方法论研究与教学的历史进程。

张奠宙教授对数学方法论中重大数学方法的论述，郑毓信教授对数学思维与数学方法关系的论述，以及郭思乐教授关于数学思维教育的论述，都已成为本书的重要构成部分。作为主编，我要对这三位学术研究的先行者表示感谢。

本书的编写过程中，副主编陈慧君、朱宏都协助我做了大量的具体工作，各位编写人员都付出了他们辛勤的努力，徐乃楠为全书选编了例题，并为此进行了认真的讨论和修改。本书的编写过程中，我们参考和引用了国内外大量的文献，这些重要的文献也应视作进行数学思维方法研究与教学的重要参考内容。在此，我谨对这些文献的作者表示衷心的感谢。同时，作为主编我也十分感谢人民教育出版社魏运华、吕达、田载今、刘立德编审及韩华球编辑对本书的大力支持，正是由于他们的帮助，才使本书能提早问世。

数学思维方法的研究与教学，在我国的历史还很短，加之我的学识有限，本书的内容难免有些缺憾。希望本书在教学使用中得到同行们的批评和指正。

王宪昌

2010年1月于吉林师范大学

目 录

第一章　数学思维方法概述

【内容提要】

本章介绍了思维、数学思维的特征与分类，同时对数学思维方法的几种分类形式进行了说明。结合数学思维方法的历史发展过程，阐述了数学思维方法与数学教育的关系，为数学思维方法的课程提供了一个简要的框架。

【学习目标】

1. 明确数学思维的特征。
2. 掌握数学思维方法的分类及表现形式。
3. 结合数学教育与数学史认识数学思维方法在数学教育、数学学习中的作用。

【关键词】

思维；数学思维；数学思维方法；数学教育

第一节　数学思维方法研究的对象和内容

数学思维方法研究人们从事数学活动时思维发生、发展的规律，以及这些思维规律所具有的方法论意义上的特征。由于数学思维方法的研究具有思维活动的心理学特征和思维科学的特征，因此它必将涉及和运用一些心理学、思维科学中的概念。具体地说，数学思维方法将把思维、数学思维、数学发展中的发现、发明与创新的思维过程作为自己的研究对象。

一、思维与数学思维

（一）思维

数学思维是从属于一般思维的，要讨论研究数学思维，就必然涉及心理学与思维科学的研究成果。

心理学给思维的定义是：思维是人脑借助于语言对客观事物的本质及其规律的间接与概括的反映。①

从思维科学研究的角度分析，思维是作为人的个体理性认识事物的表现，它通常可以分为抽象（逻辑）思维、形象（直感）思维和特异思维（包括灵感思维、特异感知思维等）。② 目前，有关思维科学的研究正在积极进行中。

思维是一个复杂的心理过程，当客观事物作用于人脑时，人脑会对各种信息有一个分析、综合、比较、抽象、概括、系统化、具体化的过程。作为一种认识过程，思维是在感性认识基础上进行的理性认识，它属于认识过程的高级阶段。例如，在对三角形的认识中，感知只能认识到三角形的形状、颜色和大小，而思维则舍弃三角形的这些表象特征，概括出任何三角形都具有三个角、三条边和三角形内角和等于180°等共同的本质特征。

1. 思维的特征

思维具有方向性、概括性和间接性特征。

（1）思维的方向性。

思维的方向性特征又称为目的性、探索性或问题性特征。所谓思维的方向性，是指思维在对事物的本质及其规律的寻找过程中，总是以解决问题作为方向，也就是说思维总是沿着解决问题的方向发展自己。问题在思维中起到一种激励作用，它是思维探索活动的动力，同时也是思维活动的路标和灯塔。

（2）思维的概括性。

思维的概括性特征是指思维不仅仅依赖当前的刺激和直接的感知（和知觉不同），它还具有舍弃某些事物的表象而直接进行抽象概括的特征。即把同一类事物的共同的、本质的特性或事物间的规律性的联系，抽取出来加以概括。例如，人们通过对大小不同圆的圆周与其半径的推算，舍弃了圆的大小及半径的长短，抽象概括出一切圆的周长与半径之比都是一个常数。思维的概括性包含两层意思：第一，能把一类事物中的共性加以抽象概括；第二，

---

① 朱智贤、林崇德：《思惟发展心理学》，北京师范大学出版社1986年版，第7页。

② 任樟辉：《数学思维论》，广西教育出版社1998年版，第8页。

能从部分事物的相互关系中抽象出普遍的或必然的联系，并把它推广到同类的现象中去。

(3) 思维的间接性。

思维的间接性是指人们凭借已有的知识经验或以其他事物为媒介，间接地推知事物过去的变化，认识事物现实的本质，预见事物未来的发展。在数学研究中，思维的间接性十分明显。因为数学本身就是一种非现实存在的理性构造，人们就是运用了间接性的思维特征，才从已有的数学成果中获得了新的理论。

2. 思维的分类

根据不同的分类形式，思维有不同的表现形态。

(1) 根据思维的形态不同，可以将思维分为动作思维、形象思维和抽象思维。

动作思维是指以实际的动作为支柱的思维，也称为操作思维或实践思维。它的特点是直观的、在实际操作活动中产生和进行的。3 岁前的儿童思维就以动作思维为主。

形象思维是指用表象进行分析、综合、抽象、概括的过程。形象思维中的基本单位是表象，幼儿在 3～6 岁的思维多属于形象思维。成人的思维中也有形象思维的发生，特别是艺术家、作家、导演等更多地运用形象思维。数学家有时也借助形象思维来表述某些抽象的概念，当然，成人的形象思维与儿童的形象思维有本质的差异。

抽象思维是运用概念、判断和推理的形式来反映事物本质的思维。这种思维是以概念为支柱进行的思维，人们把它看作是人类思维的核心形态，又称为理性思维。抽象思维的形式又有形式逻辑与辩证逻辑之分，两者既有区别又有联系。形式逻辑的概念具有抽象性和确定性，辩证逻辑的概念具有具体性和灵活性。数学作为一种形式逻辑思维的表述过程和构造形式，它在发生发展的过程中也具有辩证逻辑的形式。如微积分中极限概念的产生、发展和最后定义，就明显地表现出辩证逻辑思维的形式。

(2) 根据思维过程的指向不同，可以将思维分为集中思维和发散思维。

集中思维又称求同思维、聚合思维或纵向思维。集中思维是指把问题的

各种信息集中到一起求出一个共同的、单一的、确定的答案。如果某个问题只有一个正确的答案，思维的过程就是要找出这个正确的答案。

发散思维又称求异思维、分散思维或横向思维。发散思维是指思考问题时，从一个目标出发，沿着各种不同途径去思考、寻找各种可能的正确答案。这种思维无一定的方向和范围、不墨守成规，具有更大的主动性和创造性。科学家的发明创造、艺术家的艺术作品、理论家的新观点和新创见，多得益于发散思维的成果。

（3）根据思维的智力品质不同，可以将思维分为习惯性思维和创造性思维。

习惯性思维是指用惯常的方式、固定的模式解决问题的思维。这种思维较为普遍，人们总愿意用旧有的、习惯的方式去解决问题，可以不费太大的努力就得出答案。这种思维缺乏主动性，有时会产生错误的认识。

创造性思维是指有主动性和创新性的思维，它没有固定的模式和方法，也不遵循已有的思路。创造性思维利用已有的信息独立思考，根据问题和情境创造性地探索答案。创造性思维往往是逻辑思维与非逻辑思维的有机结合。

（二）数学思维的概念与特征

数学思维是人类思维的一种形式，具有思维的一般规律与特征。

1. 数学思维的概念

一般地说，数学思维就是数学活动中的思维。更确切地说，数学思维是人脑在和数学对象交互作用的过程中，运用特殊的数学符号语言以抽象和概括为特点，对客观事物按照数学自身的形式或规律做出的间接概括的反映。

数学思维是由数学对象，并且主要是由数学问题推动发展的。可以认为，数学问题是推动数学发展的动力和方向，当然解决问题也正是数学思维要达到的目的。从本质上说，数学思维的过程就是不断提出问题和解决问题的过程，数学思维的能力也就是提出数学问题、解决数学问题的能力。

数学问题解决的差异代表了不同的数学思维表现形式，解决不同的数学问题就形成了不同的数学思维规律。可以认为，数学问题对数学思维的启动、导向、展开都起着决定性的作用。注重数学问题在教学中的作用，有着十分重要的意义。

有学者把数学问题的解决与数学思维联系起来，认为在数学问题解决中数学思维的表现形式、过程其实就是数学问题的解决形式。① 从数学问题解决的角度分析，数学思维总是指向问题的分析、问题的变换和问题的最后解决。在这一点上可以认为数学思维与数学问题解决是密不可分的。

我们还可以把数学思维简单地分为具体实践问题的数学化思维和具体数学问题的解题思维。前者是应用数学中数学家们要进行的数学思维，后者则是数学教育尤其是初等数学教育中常见的数学思维。

下面是高中数学中具体数学问题解决的数学思维的一个例子，它表明了数学思维在数学问题解决中的变化。

例 1　已知 a，b，$m\in\mathbf{R}^{+}$，且 $a>b$，求证：

$$\frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b}。$$

解题思路（1）：由于待证式中的字母均为正数，容易看出，它等价于更简单的下述问题：

问题 2　已知 a，b，$m\in\mathbf{R}^{+}$，且 $a>b$，求证：

$$(a+m)b<(b+m)a。$$

解题思路（2）：待证式还等价于$\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}<0$，因此它相当于更开放的下述问题：

问题 3　已知 $a>b>0$，且 $m>0$，比较$\frac{a+m}{b+m}$与$\frac{a}{b}$的大小。

解题思路（3）：由待证式$\frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b}$的两边取倒数，则有$\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}$。故原问题又等价于下述问题：

问题 4　已知 $a>b>0$，且 $m>0$，求证：

$$\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}。$$

解题思路（4）：待证式可以看成$\frac{(a+m)/2}{(b+m)/2}<\frac{a}{b}$，若设两个点 $A(b,a)$ 及

① 郭思乐：《数学思维教育论》，上海教育出版社 1998 年版，第 22 页。

$M(m, m)$，则 AM 的中点 N 的坐标为 $\left(\frac{b+m}{2}, \frac{a+m}{2}\right)$，原问题就转化为证明斜率 $k_{ON}<k_{OA}$。因此原问题可变换为下述问题：

问题 5　已知 a，b，$m\in\mathbf{R}^+$，及坐标平面上的点 $A(b, a)$，$N\left(\frac{b+m}{2}, \frac{a+m}{2}\right)$，求证：$k_{ON}<k_{OA}$。

它的证明揭示了原问题中不等式的几何本质（如图 1-1），由于点 $M(m, m)$ 在直线 $y=x$ 上，又 $a>b>0$，故点 $A(b, a)$ 在直线 OM 的上方，从而 AM 的中点 N 落在直线 OA 的下方，所以必有 $k_{ON}<k_{OA}$。

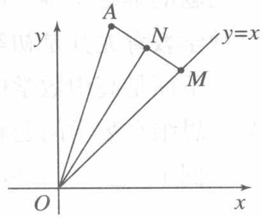

图 1-1

解题思路（5）：若把待证式看成 $\frac{a+m}{b+m}<\frac{a+0}{b+0}$，更一般化地看成 $\frac{a+x_2}{b+x_2}<\frac{a+x_1}{b+x_1}$，其中 $a>b>0$，$x_2>x_1\geqslant 0$，则原问题的较强命题就是下述问题：

问题 6　已知 $a>b>0$，证明函数 $f(x)=\frac{a+x}{b+x}$ 在 $[0, +\infty)$ 内是严格单调的减函数。

它的证明较简单，只需在 $x_2>x_1\geqslant 0$ 的情况下，验算

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{a+x_2}{b+x_2}-\frac{a+x_1}{b+x_1}=-\frac{(a-b)(x_2-x_1)}{(b+x_2)(b+x_1)}<0$$

即可。

从数学思维方法方面分析还可以把上述问题作进一步的应用与推广。①

2. 数学思维的特征

数学思维的特征主要表现在它的高度抽象性、形式化的严谨性和表现方式的多样性。

数学思维的高度抽象性，是指在数学思维的过程中把思维对象的某些现实的属性舍弃，把思维的对象抽象化为一定的数量关系、空间形式或逻辑关系，然后再把这些特定的数学关系表示成为一般的符号形式。数学思维的抽

① 任樟辉：《数学思维论》，广西教育出版社 1998 年版，第 18～20 页。

象性，还指它不仅仅停留在一次抽象的基础上，通常的数学符号形式可能经过多次的抽象。有时由于数学问题本身就已经抽象化了，因此这种思维过程更属于高度抽象化的形式。与人类的所有思维形式相比，这种完全人为创造的符号化的数学语言，是数学思维高度抽象化的基础。

数学思维形式化的严谨性，是指数学思维发生、发展和表述的过程，是一种形式化的严密过程。这种过程的逻辑性、严密性、准确性不容许有一丝差错，不允许有对与错之间的状态。正是数学思维的这种形式化的严谨性，使数学成为人类所有科学形式的最终表达手段。

数学思维表现的多样性，是指在数学思维的过程中，尤其在解决具体数学问题时数学思维并不都是严格的逻辑演绎，并不都是三段论式的证明形式，这些只是数学思维最后的表现形式。隐藏在这些抽象、严谨形式之下的是在数学思维中出现的猜测、试错、想象、直觉、审美等思维形式。这种数学思维的多样性特征，不仅表现在数学家处理、解决数学问题的思维特征上，而且表现在普通人的数学思维活动中。现代数学教育理论的研究表明，数学思维的非逻辑演绎的多样化思维在中小学的数学活动中也是十分重要的。数学作为一种自由创新的学科，它的猜测、试错、想象、直觉、审美等思维形式有时比逻辑演绎和公理化数学思维更重要。

在数学的发展史中，考察概率论的创立和发展，我们会对数学思维的特征有进一步的理解。

数学家费马、帕斯卡和惠更斯在讨论关于赌博中的“赌金分配问题”时，形成了概率论最早的文献。其后在盛产数学家的伯努利家族中，曾出现一位雅各布·伯努利（Jacob Bernoulli，1654—1705），他的主要著作《猜测术》被称为概率论的第一本专著。

数学家们由最初的随机出现的某些等可能的假设，经数学家伯努利发展表述并证明为一种对大量经验观测中呈现的稳定性的规律的描述，即“大数定律”。数学家拉普拉斯的著作《分析概率论》是当时概率论理论的一部继往开来的著作，他的这部著作不仅给出概率论的基本概念、定理和理论框架，而且把数学分析的方法应用其中。现在的概率论理论已经成为每一个数学专业学生的大学必修课程。