农林院校大学数学系列教材

总主编 邹庭荣

大学数学

——微积分

主　编 韩汉鹏　马少军　徐光辉

副主编 刘长文　何逊峰　张胜祥　张海燕　谢厚桂

高等教育出版社

农林院校大学数学系列教材

总主编 邹庭荣

大学数学——

微 积 分

Weijifen

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是教育部“高等理工教育数学基础课程教学改革与实践项目(教高司函〔2007〕143号)”之“农林院校大学数学教学规范的研究与实践”项目研究成果。教材根据“农林院校大学数学——微积分教学基本要求”，结合作者多年教学经验，根据农科专业的特点，按照继承、发展与改革的精神编写而成，是集体智慧的结晶。

本书共分9章，包括函数、极限与连续；导数与微分；中值定理与导数的应用；不定积分；定积分及其应用；多元函数微分学；二重积分；无穷级数；微分方程与差分方程。

本书的特点是：突出应用背景，侧重微积分在农林科技中的应用，并从实际例子出发，引出微积分的一些基本概念、基本理论和方法；内容由简到难逐步展开，结构严谨，例题丰富，通俗易懂，难点分散；注重数学思想与数学文化的渗透。

本书的编写参考了近年来全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲，内容上有所兼顾。本书可供农林类高等院校农科专业学生使用，并可作为相关专业师生的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学. 微积分/韩汉鹏，马少军，徐光辉主编.
—北京：高等教育出版社，2010.6
ISBN 978-7-04-028621-2

Ⅰ.①大… Ⅱ.①韩…②马…③徐… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材②微积分-高等学校-教材
Ⅳ.①O13②O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第074622号

策划编辑 李 蕊 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 张申申
责任绘图 尹文军 **版式设计** 张 岚 **责任校对** 胡晓琪
责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京市鑫霸印务有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960 1/16	**版　　次**	2010年6月第1版
印　　张	30.5	**印　　次**	2010年6月第1次印刷
字　　数	570 000	**定　　价**	41.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。
版权所有 侵权必究
物料号 28621-00

农林院校大学数学系列教材编委会

主　任： 邹庭荣

副主任　**（以姓氏笔画为序）：**

马少军　李仁所　房少梅　曹殿立

韩汉鹏　程述汉

委　员　**（以姓氏笔画为序）：**

马少军　文凤春　石　峰　李仁所

吴自库　邹庭荣　陈华锋　房少梅

徐光辉　曹殿立　韩汉鹏　程述汉

大学数学——微积分编委会

主　编： 韩汉鹏　马少军　徐光辉

副主编　**（以姓氏笔画为序）：**

刘长文　何逊峰　张胜祥　张海燕

谢厚桂

编　委　**（以姓氏笔画为序）：**

马少军　王希超　刘长文　何文峰

何逊峰　张胜祥　张勇军　张海燕

徐光辉　徐利艳　徐胜荣　韩汉鹏

谢厚桂

序

本套教材是教育部“农林院校大学数学教学规范的研究与实践”项目的研究成果。

从20世纪90年代以来，我国高等学校持续扩招，高等教育已由精英教育快速地进入了大众化教育阶段。作为高等教育的一个重要组成部分的高等农林院校也不例外。在大众化教育阶段，如何保证和提高农林院校大学数学教学质量以及如何进行农林院校创新型人才培养，成为当前我国农林院校最重要的研究课题之一。尤其是当前我国没有专门的高等农林院校大学数学课程教学规范，通常是照搬理工科相应的教学基本要求，难以体现农林院校的特色和培养目标。鉴于此，作为农林院校重要基础课的“大学数学教学规范”的制定提上了日程，“农林院校大学数学教学规范的研究与实践”项目正是在此背景下出台的，它是一项富有创新意义的研究工作，并被列入教育部“高等理工教育数学基础课程教学改革与实践”项目。

由全国近20所农林院校的专家、学者组成的课题组承担了这一项目的研究任务。该课题组通过对全国几十所农林院校大学数学教学的现状进行深入细致的调查，分析了各层次农林院校大学数学课程体系建设现状和本科生在创新能力、开拓精神等方面存在的问题；并结合多年在农林院校进行大学数学教学内容、教学方法改革的经验，研究制定了“农林院校大学数学教学规范”。通过召开“全国高等农林院校大学数学教学规范高级研讨会”，对上述方案进行讨论修改，达成共识。“教学规范”包括“微积分教学基本要求”、“线性代数教学基本要求”、“概率论与数理统计教学基本要求”、“大学数学实验教学基本要求”，构建出适合时代特点和农林类专业特点的本科生数学基础课课程体系。并在此基础上编写了本套农林院校大学数学系列教材。

本套教材具有下列特色：

1. 教材突出了农林院校特色，尤其是大学数学在农林科学中的应用；

2. 教材贯穿了大学数学中渗透数学文化的理念，注重学生数学素质的培养；

3. 教材将数学实验独立成书，避免了大学数学每一册教材都列出数学实

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

验内容，内容重复而杂乱；

4. 教材内容丰富而精炼，重点突出而层次分明。

本套教材是编委会全体编委通力合作的结晶，其出版得到教育部数学基础课程教学指导分委员会徐宗本主任和彭济根秘书长以及高等教育出版社数学分社李艳馥社长、李蕊编辑和宋瑞才编辑的关心和大力支持，在此深表感谢！

邹庭荣

2009 年 5 月 10 日　于华中农业大学

前　言

本教材是编者根据“农林院校大学数学微积分教学基本要求”及多年的教学经验为高等农林院校本科学生编写的教材，也可供其他相关专业的师生选用和参考。

本教材内容共分9章，包括函数、极限与连续；导数与微分；中值定理与导数的应用；不定积分；定积分及其应用；多元函数微分学；二重积分；无穷级数；微分方程与差分方程。具有以下特点：

1. 以“三用”为原则：

(1) 够用　删去了传统教材中实用性不强和难度较深的一些内容，保留农林院校各专业必须作为基础的内容，达到满足其需要的最大限度。

(2) 管用　增添必需的、以往传统教材中没有的知识内容，尤其注重大学数学在农林科学中的应用。

(3) 会用　淡化传统教材偏重理论的思想，强调数学知识的应用，力求学以致用，学后会用，增强学生学习数学的信心与兴趣。

2. 以“两凸显”为特色

(1) 凸显数学文化思想　将数学文化贯穿到教材的全过程，在每章结束时，都以阅读与思考的形式介绍一些有趣的数学故事及有影响力的数学家轶事，让学生在寓教于乐中学习数学知识。

(2) 凸显数学的应用　教材体现了不仅教会学生学数学的知识，更注重教会学生用数学的能力。既注重基本概念的实际背景，又注重理论知识的实际应用，向学生灌输数学建模思想；除了重点考虑数学在农林科技中的应用外，同时考虑部分涉农的少学时工科专业的扩展应用。

在内容叙述上，注重与中学知识的衔接，力求概念的自然导入，循序渐进、由浅入深、结构严谨、例题丰富、通俗易懂、难点分散；选学内容以 * 号标注。考虑到农林院校学生的基础，为了方便读者阅读，教材最后还给出了若干附录，使之自成体系，这也是本书的一个特色。

虽然各位编者十分努力，但由于水平所限、成书时间又较仓促，书中的错误与不妥之处在所难免，恳请广大师生和读者批评指正。

编　者

2010 年 2 月

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第1章

函数、极限与连续

微积分是研究变量的一门学科，它的主要研究对象是函数．极限方法是微积分的基础，它从方法论上突出地表现了微积分不同于初等数学的特点．简言之，初等数学是微积分的基础，而微积分是初等数学及其思想的进一步延伸，为思考和解决很多现实问题提供有力的工具．本章主要介绍函数、极限、连续等基本概念以及它们的有关性质，为以后章节的学习打下理论基础．

1.1 函　　数

1.1.1 区间与邻域

1.1.1.1 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念，它在现代数学中起着非常重要的作用．

定义1 把具有特定性质的有限多个或无限多个对象所组成的总体称为一个集合．组成这个集合的对象称为该集合的元素．

由有限多个元素组成的集合称为**有限集**；由无限多个元素组成的集合称为**无限集**．如果这个集合不含有任何元素，则称该集合为**空集**．通常用大写字母表示集合，用小写字母表示元素．特别地，把空集记作$\varnothing$，由全体自然数组成的集合记作$\mathbf{N}$，由全体整数组成的集合记作$\mathbf{Z}$，由全体有理数组成的集合记作$\mathbf{Q}$，由全体实数组成的集合记作$\mathbf{R}$．

1.1.1.2 集合的表示

在数学中，表示集合的方法通常有两种，一种是**列举法**，即按任意顺序列出集合中的所有元素，并用花括号$\{\}$括起来．例如，由方程$x^2-5x+6=0$的根组成的集合可以表示为

$$A=\{2,3\}.$$

另一种为**描述法**，设$P(x)$为某个与x有关的条件或法则，A为满足$P(x)$的一

切 x 所构成的集合，记为 $A=\{x \mid P(x)\}$. 例如，由方程 $x^2-5x+6=0$ 的根组成的集合可以表示为

$$A=\{x \mid x^2-5x+6=0\}.$$

本书用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合. 如果没有特别声明，以后提到的数都是实数. 同时，由于实数与数轴上的点具有一一对应的关系，因此，为了突出几何的直观性，就把数 x 称为点 x，指数轴上与数 x 对应的那个点，相应地，数集也可以称为点集.

1.1.1.3 区间与邻域

区间是用得最多的一类点集.

定义 2 设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，定义：

(1) **开区间** $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$；

(2) **闭区间** $[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

(3) **半开区间** $[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$.

以上三类区间都为**有限区间**. 数 $b-a$ 称为这些**区间的长度**. 从数轴上看，这些有限区间的长度是有限的线段，如图 1.1.

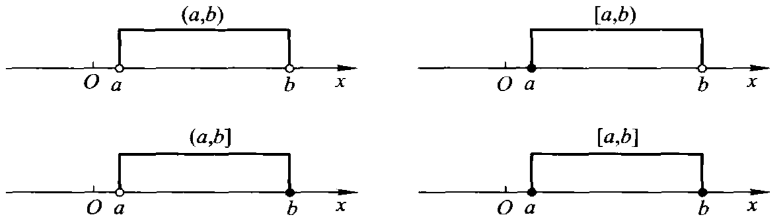

图 1.1

此外还有几类**无限区间**，用类似的形式表示如下：

$$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}; \qquad [a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\};$$

$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}; \qquad (-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\}.$$

这些区间在数轴上表现为无限长的射线，如图 1.2. 要注意的是，记号 ∞，$+\infty$，$-\infty$ 都是表示无限性的一种记号，而不是数，因此不能像数一样对其进行运算. 此外全体实数 $\mathbf{R}$ 也记为 $(-\infty,+\infty)$，它也是无限的开集.

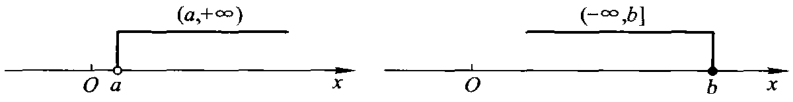

图 1.2

在微积分各章节内容中，“邻域”也是经常用到的一个关于数集的概念.

定义 3　设 a 和 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集

$$\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

称为以点 a 为中心 δ 为半径的邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

由此看出，$U(a,\delta)$是开区间$(a-\delta,a+\delta)$，这个区间以 a 为中心，长度为 2δ，如图 1.3.

在微积分中还常用到数集

$$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\},$$

这是在点 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 中去掉点 a，由其余的点所组成的数集，称为 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$（如图 1.4），即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-x,a)\cup(a,a+x).$$

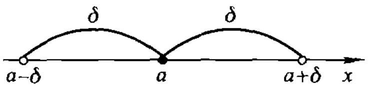

图 1.3

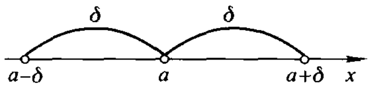

图 1.4

此外，还常用到下面几种邻域，设 $\delta>0$，记

$$U_+(a,\delta)=\{x \mid 0\leqslant x-a<\delta\}=[a,a+\delta);$$

$$\mathring{U}_+(a,\delta)=\{x \mid 0<x-a<\delta\}=(a,a+\delta);$$

$$U_-(a,\delta)=\{x \mid -\delta<x-a\leqslant 0\}=(x-a,a];$$

$$\mathring{U}_-(a,\delta)=\{x \mid -\delta<x-a<0\}=(a-\delta,a),$$

依次称为点 a 的 δ **右邻域**，点 a 的 δ **右去心邻域**，点 a 的 δ **左邻域**以及点 a 的 δ **左空心邻域**.

1.1.2　映射与函数

1.1.2.1　映射

定义 4　设 X，Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f 在 Y 中都有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作

$$f:X\rightarrow Y.$$

其中 y 称为元素 x（在映射 f 下）的像，并记作 $f(x)$，即

$$y=f(x);$$

而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下）的原像；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作

D_f，即 $D_f=X$；X 中所有元素的像组成的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f 或 $f(X)$，即

$$R_f=f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}.$$

在上述映射的定义中，需要注意的是：

（1）构成一个映射必须具备以下三要素：集合 X，即定义域 $D_f=X$；集合 Y，即值域的范围：$R_f\subset Y$；对应法则 f，使得对每个 $x\in X$，都有唯一确定的 $y=f(x)$ 与之对应.

（2）对每个 $x\in X$，元素 x 的像 y 是唯一的；而对于每个 $y\in R_f$，元素 y 的原像不一定唯一；映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集，即 $R_f\subset Y$，不一定 $R_f=Y$.

例 1 设 $f:\mathbf{R}\to(0,+\infty)$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)=x^2$. 显然，f 不是一个映射，因为当 $x=0$ 时，$f(0)\notin(0,+\infty)$，即不存在唯一的 y 值与 $x=0$ 相对应.

例 2 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)=x^2$. f 是一个映射，f 的定义域 $D_f=\mathbf{R}$，值域 $R_f=\{y\mid y\geqslant 0\}\subset\mathbf{R}$，它是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集. 对于 R_f 中的元素 y，除了 $y=0$ 外，它的原像都不是唯一的. 如 $y=4$ 的原像就有 $x=2$ 和 $x=-2$.

例 3 设 $f:\mathbf{R}\to[0,+\infty)$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)=x^2$. 显然 f 是一个映射，同时，每个 y 都有原像存在，即 $R_f=[0,+\infty)$，但原像不一定唯一.

例 4 设 $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$，对每个 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$f(x)=\sin x$. 这里 f 是一个映射，其中 $D_f=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$R_f=[-1,1]$，且每个 y 所对应的 x 唯一.

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 $R_f=Y$，则称 f 是从 X 到 Y 的**满射**. 比如，例 3，例 4 都是满射，但例 2 不是满射.

若在 X 中任取两个不同元素 $x_1\neq x_2$，他们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 是从 X 到 Y 的**单射**. 比如，例 4 是单射，但例 3 就不是单射. 若映射 f 既是单射也是满射，就称 f 为**一一映射**（或**双射**）. 比如，例 4 就是双射.

1.1.2.2 逆映射与复合映射

定义 5 **设 f 是 X 到 Y 的单射，即对于每个 $y\in R_f$，有唯一的 $x\in X$ 与 y 相对应，并且 $f(x)=y$，于是可以定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g，即**

$$g:R_f\to X,$$

对每个 $y\in R_f$，规定 $g(y)=x$，且 x 满足 $f(x)=y$，则这个映射 g 称为 f 的逆映射，记作 f^{-1}，其定义域 $D_f^{-1}=R_f$，值域 $R_f^{-1}=X$.

按上述定义，只有单射才有逆映射. 比如，在例 1～例 4 中，只有例 4 中的映射 f 才存在逆映射 f^{-1}，这个 f^{-1} 就是反正弦函数的主值

$$f^{-1}(x)=\arcsin x,\quad x\in[-1,1],$$

其定义域 $D_{f^{-1}}=[-1,1]$，值域 $R_{f^{-1}}=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

定义 6　设有两个映射

$$g:X\to Y_1,\ f:Y_2\to Z$$

其中 $Y_1\subset Y_2$，则由映射 g 和 f 可以定义出一个从 X 到 Z 的对应法则，它将每个 $x\in X$ 映射成 $f[g(x)]\in Z$. 显然，这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射，这个映射称为映射 g 和 f 构成的复合映射，记作 $f\circ g:X\to Z$，即

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)],\ x\in X.$$

由复合映射的定义可知，映射 g 和 f 构成复合映射的条件是：g 的值域 R_g 与 f 的定义域 D_f 满足 $R_g\subset D_f$，否则，不能构成复合映射.

例 5　设有映射 $g:\mathbf{R}\to[-1,1]$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，有 $g(x)=\sin x$，以及映射 $f:[-1,1]\to[0,1]$，对每个 $u\in[-1,1]$，有 $f(u)=\sqrt{1-u^2}$. 由于 $R_g=D_f=[-1,1]$，则 g 和 f 构成复合映射 $f\circ g:\mathbf{R}\to[0,1]$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，有 $f[g(x)]=\sqrt{1-\sin^2x}$.

1.1.2.3　函数概念

定义 7　设数集 $D\subset\mathbf{R}$，则称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，记为

$$y=f(x),\ x\in D,$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$，$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 f 的值域.

在函数定义中，对每个 $x\in D$，通过对应法则 f 总有唯一确定的值 y 与之对应，这个值称为函数 f 在 x 处的函数值，记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$. 函数值的全体构成的数集称为函数 f 的值域，记作 R_f（或 $f(D)$），即

$$R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

在学习中学数学时，已经知道函数表示的三种方法：**表格法，图形法，解析法**（算式表示法），有时还可以用语言来描述.

例 6　常数函数 $y=1$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{1\}$，它的图像是一条平行于 x 轴的直线，如图 1.5 所示.

例 7　函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

称为**绝对值函数**，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，它的图像如图 1.6 所示.

例 8　函数

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com