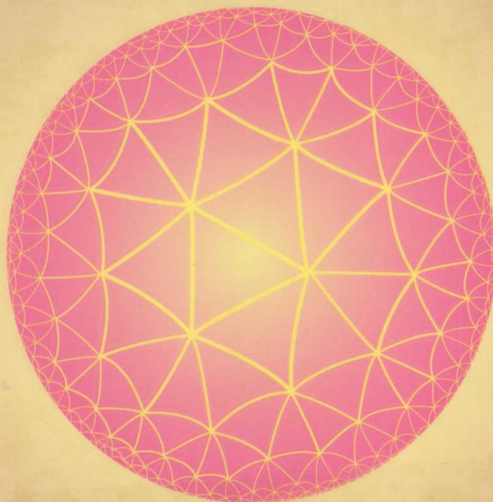
TURING 图灵数学·统计学丛书 47

WILEY



Functional Analysis

泛函分析

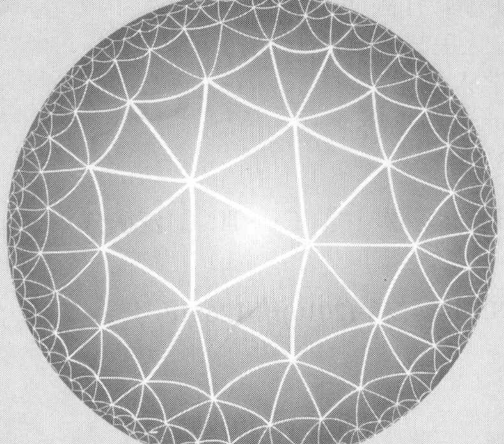
[美] Peter D. Lax 著

侯成军 王利广 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵数学·统计学丛书 47

WILEY



Functional Analysis

泛函分析

[美] Peter D. Lax 著

侯成军 王利广 译

人民邮电出版社

北京

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析/(美)拉克斯(Lax, P. D.)著;侯成军,王利广译. —北京:人民邮电出版社,2010.8
(图灵数学·统计学丛书)
书名原文:Functional Analysis
ISBN 978-7-115-23174-1

Ⅰ.①泛… Ⅱ.①拉…②侯…③王… Ⅲ.①泛函分析 Ⅳ.①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 126516 号

内容提要

本书根据作者多年来在纽约大学柯朗数学研究所教授二年级研究生泛函分析课程的讲义撰写而成,给出了泛函分析的基本内容以及数学中一些不可缺少的深刻论题,包括自伴算子的谱分解和谱表示、紧算子理论、Krein-Milman 定理、Gelfand 的交换 Banach 代数理论、不变子空间、强连续单参数半群等. 书中各章短小精辟,并配有习题,易于读者充分理解所学内容.

本书适合理工科专业、数学专业的本科生、研究生阅读.

图灵数学·统计学丛书

泛函分析

◆ 著 [美]Peter D. Lax
译 侯成军 王利广
责任编辑 明永玲

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn
网址:http://www.ptpress.com.cn
大厂聚鑫印刷有限责任公司印刷

◆ 开本:700×1000 1/16
印张:30.75
字数:603 千字
印数:1–2 500 册

著作权合同登记号 图字: 01-2006-3669 号

ISBN 978-7-115-23174-1

定价:79.00 元

读者服务热线:(010) 51095186 印装质量热线:(010) 67129223

反盗版热线:(010) 67171154

版权声明

前 言

本书根据我多年来在纽约大学柯朗数学研究所教授二年级研究生泛函分析课程的讲义撰写而成. 它不是论文集也不是专论, 而是一本研究生教材. 书中大多数章节都短小精辟, 为的是易于读者消化所学内容. 当然并非所有内容都可以用简短的语言描述出来, 因此有些章节相对较长. 在每章中, 定理、引理和方程都是按照顺序连续标号的.

前 23 章的内容对读者的要求不是很高, 是很好的研究生阶段泛函分析入门课程的教材. 余下的内容可以用于研究生泛函分析或者 Hilbert 空间理论高级课程的教学.

当我还是个学生的时候, 当时仅有的泛函分析教材就是 Banach 在 1932 年所写的那本最早的经典教材; Hille 所著的书直到我毕业的时候才面世, 像是给我的毕业礼物. 有关 Hilbert 空间理论的教材, 有 Stone 于 1932 年出版的 Colloquium 和 Sz.-Nagy 的 Ergebnisse. 从那以后, 泛函分析的书籍越来越多, 先是出现了 Riesz 和 Sz.-Nagy、Dunford 和 Schwartz 以及 Yosida 所著的书; 后来又出现了 Reed 和 Simon 以及 Rudin 的书. 对于 Hilbert 空间理论, 出现了 Halmos 的优美而又简明的著作以及 Achiezer 和 Glazman 的教材, 我十分欣赏这些书, 它们让我受益匪浅. 此后又出现了许许多多好的教材. 但是我相信, 本书还是给出了一些新东西: 在内容编排顺序上, 理论内容之后紧跟具体的应用, 这使得抽象的内容变得有血有肉; 同时, 书中还包含了可以用泛函分析的观点澄清和解决的非常丰富的数学问题.

在选择论题时, 我听从了我的老师 Friedrichs 的警告: "如果你想把所知道的有关某论题的全部内容都放进去, 那么写一本书是很容易的." 本书给出了泛函分析的基本内容以及数学中一些不可缺少的深刻论题, 比如自伴算子的谱分解和谱表示、紧算子理论、Krein-Milman 定理、Gelfand 的交换 Banach 代数理论、不变子空间、强连续单参数半群. 本书还涉及对于计算拓扑不变量十分重要的算子的指标, 强有力的分析工具 Lidskii 迹公式, 沉睡近百年的 Fredholm 行列式及其推广, 还有源自物理的散射理论. 与此同时, 本书还包括了一些 (但不是全部) 与我的研究很接近的特殊论题.

那么, 哪些内容被省略了呢? 非线性泛函分析, 为此我推荐 Zeidler 的四卷本专著. 除 Gelfand 的交换 Banach 代数理论以外的算子代数理论, 还有 Banach 空间几何理论, 让人高兴的是, 由 Bill Johnson 和 Joram Lindenstrauss 编著的有关此论题的一本手册已经由 North Holland 出版社出版.

阅读本书需要哪些预备知识呢？每位二年级研究生以及许多本科生都应该了解如下知识.

- *朴素集合论*. 可数集, 连续统假设, Zorn 引理.
- *线性代数*. 线性映射, 矩阵的迹和行列式, 矩阵和对称矩阵的谱理论, 矩阵函数.
- *点集拓扑*. 完备度量空间, Baire 纲原理, Hausdorff 空间, 紧集, Tychonov 定理.
- *单复变函数的一般理论*.
- *实分析*. Arzela-Ascoli 定理, $\mathbb{R}$ 上测度的 Lebesgue 分解, 紧集上的 Borel 测度.

历史上, 测度论比泛函分析出现得早. 测度论中的通常表述没有用到泛函分析的概念和构造. 在关于 Riesz-Kakutani 表示定理的附录中, 本书说明了如何在测度论中应用泛函分析的工具. 另一个附录总结了 Laurent Schwartz 的广义函数理论的基本内容.

本书中的许多应用都是关于偏微分方程问题的. 在这里, 熟悉一点 Laplace 方程和波动方程理论将会有所帮助, 对这些内容了解不多的读者也能够从这些应用中学到一些基本知识.

像大多数数学家一样, 我也不是历史学家. 然而在某些章中, 我还是给出了一些历史注记, 主要是在我有第一手资料时, 或者涉及 1930~1940 年欧洲恐怖时期许多泛函分析鼻祖的悲惨命运的地方.

我要感谢许许多多的人. 从我的老师 Friedrichs 那里, 我学习了泛函分析的基础以及如何应用它们. 后来, 我的观点受到 Tosio Kato 工作的影响, 他应用泛函分析这一有力的工具解决了许多问题. 还有与 Ralph Phillips 的长期而又愉快的合作给出了泛函分析中一些不寻常的应用. 从 Israel Gohberg 那里, 我学到了许多东西, 特别是 Toeplitz 算子的指标理论; 从 Bill Johnson 和 Bob Phelps 那里又分别学到了 Banach 空间的几何知识和 Choquet 定理. 感谢 Reuben Hersh 和 Louise Raphael, 他们对涉及广义函数的附录提出了意见; 感谢 Jerry Goldstein 对半群和散射理论的内容提出的中肯建议. 我对上述所有人士以及 Gabor Francsics 表示衷心的感谢.

Jerry Berkowitz 和我在柯朗数学研究所轮流讲授泛函分析课程. 如果他还活着并能批阅本书的手稿, 这本书将会更加完善.

感谢 Jeff Rosenbluth 和 Paul Chernoff 仔细阅读了本书前面的一些章节; 感谢 Keisha Grady 用 TEX 打印了手稿并做出了最后的修改和订正.

泛函分析课程讲义在柯朗所的研究生中非常受欢迎. 我希望本书保留了原讲义的精髓.

Peter D. Lax

2001 年 11 月于纽约

目　录

第1章　线性空间

设 F 是一个数域, X 是一个非空集合. 称 X 是数域 F 上的线性空间, 是指在 X 中定义了两种运算: 加法和标量乘法.

其中, 加法运算用 $+$ 表示: 任给 X 中的元素 x 与 y, 在 X 中存在唯一的元素

$$x+y \tag{1}$$

与之对应. 加法满足交换律

$$x+y=y+x, \tag{2}$$

和结合律

$$x+(y+z)=(x+y)+z, \tag{3}$$

并且 X 按照加法构成一个群, 其零元用 0 表示:

$$x+0=x. \tag{4}$$

加法的逆运算记为 $-$:

$$x+(-x)\equiv x-x=0. \tag{5}$$

第二种运算是数域 F 中的元素 k 与 X 中的元素 x 的标量乘法:

$$kx.$$

kx 仍是 X 中的元素. 标量乘法满足结合律

$$k(ax)=(ka)x, \tag{6}$$

和分配律

$$k(x+y)=kx+ky, \tag{7}$$

$$(a+b)x=ax+bx. \tag{8}$$

而且数域 F 中的单位元 1 与 X 中元素的标量乘法是恒等作用:

$$1x=x. \tag{9}$$

以上规则是线性代数中的公理. 由此我们可以推导出一些结论.

若在 (8) 式中取 $b=0$, 则对 X 中所有的 x,

$$0x=0. \tag{10}$$

在 (8) 式中取 $a=1, b=-1$. 利用 (9) 式和 (10) 式, 我们得到, 对所有的 x,

$$(-1)x=-x. \tag{11}$$

线性代数课程中处理的空间都是有限维线性空间. 在本书中, 我们重点研究无限维线性空间, 即不是有限维的线性空间. 数域 F 是实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$. 下面我们给出一些线性空间的例子.

例 1 单个变量 s 的实系数多项式的全体 X 是数域 $\boldsymbol{F}=\mathbb{R}$ 上的一个线性空间.

例 2 n 个变量 $s_1,\cdots,s_n$ 的实系数多项式的全体 X 是 $\boldsymbol{F}=\mathbb{R}$ 上的一个线性空间.

例 3 设 G 是复平面上的一个区域, 则 G 内的复解析函数的全体 X 是 $\boldsymbol{F}=\mathbb{C}$ 上的一个线性空间.

例 4 带有无限多个实分量的向量 $\boldsymbol{x}=(a_1,a_2,\cdots)$ 构成的集合

$$X=\{\boldsymbol{x}=(a_1,a_2,\cdots):a_i\in\mathbb{R}\}$$

是 $\boldsymbol{F}=\mathbb{R}$ 上的一个线性空间.

例 5 设 Q 是一个 Hausdorff 空间, 则 Q 上的实值连续函数的全体 X 是 $\boldsymbol{F}=\mathbb{R}$ 上的一个线性空间.

例 6 设 M 是一个 C^∞ 微分流形, 则 M 上可微函数的全体 $X=C^\infty(M)$ 是一个线性空间.

例 7 设 Q 是一个测度空间, m 是 Q 上的测度, 则 $X=L^1(Q,m)$ 是一个线性空间.

例 8 设 Q 是一个测度空间, m 是 Q 上的测度, 则 $X=L^p(Q,m)$ 是一个线性空间.

例 9 上半平面内的调和函数的全体 X 是一个线性空间.

例 10 一个线性偏微分方程在给定区域内的解的全体 X 是一个线性空间.

例 11 给定 Riemann 曲面上的亚纯函数的全体是 $\boldsymbol{F}=\mathbb{C}$ 上的一个线性空间.

我们从最基本的构造和概念开始发展线性空间的理论. 给定线性空间 X 的两个子集 S 和 T, 我们称集合 $\{x=y+z:y\in S,z\in T\}$ 为 S 和 T 的和, 记为 $S+T$. 称集合 $\{x=-y:y\in S\}$ 为 S 的负集, 记为 $-S$.

给定同一数域上的两个线性空间 Z 和 U, 它们的直和是由所有有序对(z,u), $z\in Z$, $u\in U$ 构成的线性空间, 记为 $Z\oplus U$; 其加法和标量乘法分别按分量进行相加和标量相乘.

定义 设 Y 是线性空间 X 的一个子集. 若 Y 中元素的加法和标量乘法仍属于 Y, 则称 Y 是 X 的一个线性子空间.

定理 1

(i) 集合 $\{0\}$ 和 X 都是 X 的线性子空间.

(ii) 任意一族子空间的和仍是线性子空间.

(iii) 任意一族子空间的交仍是线性子空间.

(iv) 若线性空间 X 的一族子空间按照由集合的包含关系定义的偏序是一个全序子集, 则它们的并仍是 X 的线性子空间.

习题 1　证明定理 1.

设 S 是线性空间 X 的一个子集. $\{Y_\sigma\}$ 是由 X 的所有包含 S 的线性子空间构成的集族. 由于 X 属于此集族, 因此它是非空的.

定义　称所有包含集合 S 的线性子空间 Y_σ 的交 $\cap Y_\sigma$ 为 S 的线性张.

定理 2

(i) 集合 S 的线性张是包含 S 的最小线性子空间.

(ii) S 的线性张由所有形如

$$x = \sum_1^n a_i x_i, \quad x_i \in S, \quad a_i \in \boldsymbol{F}, \quad n\text{是任意的自然数} \tag{12}$$

的元素 x 构成.

证明　(i) 只是线性张定义的重新描述. 为了证明 (ii), 一方面, 我们注意到形如 (12) 的元素构成了一个线性空间; 另一方面, 形如 (12) 的元素 x 包含于任一包含 S 的子空间 Y 中. □

注 1　形如 (12) 的元素 x 称为点 $x_1, \cdots, x_n$ 的线性组合. 因此定理 2 可以重新叙述为:

子集 S 的线性张是由 S 中元素的所有线性组合构成的线性空间.

定义　设 X 是一个线性空间, Y 是 X 的线性子空间. 若 X 中的两个点 x_1 和 x_2 满足 $x_1 - x_2 \in Y$, 则称 x_1 和 x_2 是模 Y 等价的, 记为 $x_1 \equiv x_2 \pmod Y$.

由加法的性质可知, mod Y 等价是一个等价关系, 即它是对称的、自反的和传递的. 在这种情况下, 我们可以把 X 分解为 mod Y 的不同的等价类. 我们用 X/Y 表示所有等价类的集合, 在其上有一个自然的线性结构. 两个等价类的和定义为从每个等价类中任取一个元素相加的和所在的等价类. 容易证明, 等价类的和与代表元的选取无关, 即若 $x_1 \equiv z_1$, $x_2 \equiv z_2$, 则 $x_1 + x_2 \equiv z_1 + z_2 \mod Y$. 类似地, 我们把数与等价类中任意元素的标量乘法所在的等价类定义为等价类的标量乘法. 由于 $x_1 \equiv z_1$, 故 $kx_1 \equiv kz_1 \mod Y$, 因此标量乘法也与代表元的选取无关. 当商集合 X/Y 赋以这个自然的线性结构时, 我们称 X/Y 为 X 模 Y 的商空间. 我们定义 $\operatorname{codim} Y = \dim X/Y$.

习题 2　验证上述结论.

和所有代数结构一样, 对线性空间我们有同构的概念.

定义　设 X 和 Y 是同一数域上的两个线性空间. 如果存在从 X 到 Y 上的一对一的映射 T 把元素的和映为象的和, 把元素的标量乘法映为象的标量乘法, 即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(x_1 + x_2) &= \boldsymbol{T}(x_1) + \boldsymbol{T}(x_2), \\ \boldsymbol{T}(kx) &= k\boldsymbol{T}(x), \end{aligned} \tag{13}$$

则称 X 和 Y 是同构的.

类似地, 我们可以定义同态的概念. 在本书中我们称同态为线性映射.

定义 设 X 和 U 是同一数域上的线性空间. 若映射 $\boldsymbol{M}: X \longrightarrow U$ 把元素的和映为象的和, 元素的标量乘法映为象的标量乘法; 即对 X 中所有的 x, y, $\boldsymbol{F}$ 中所有的 k, 都有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}(x + y) &= \boldsymbol{M}(x) + \boldsymbol{M}(y), \\ \boldsymbol{M}(kx) &= k\boldsymbol{M}(x), \end{aligned} \tag{14}$$

则称 $\boldsymbol{M}$ 是一个线性映射, X 为 $\boldsymbol{M}$ 的定义域, U 为 $\boldsymbol{M}$ 的终点.

注 2 线性空间的同构是一个一对一的映到上的线性映射.

定理 3

(i) 若 $\boldsymbol{M}: X \to U$ 是一个线性映射, 则 X 的线性子空间 Y 在 $\boldsymbol{M}$ 下的象是 U 的一个线性子空间.

(ii) U 的线性子空间 V 在 $\boldsymbol{M}$ 下的原象是 X 的一个线性子空间.

习题 3 证明定理 3.

凸性是实线性空间中一个非常重要的概念.

定义 设 X 是一个实线性空间, K 是 X 的一个子集. 如果对 K 中任意的元素 x 和 y, 以 x 和 y 为端点的线段

$$ax + (1 - a)y, \quad 0 \leqslant a \leqslant 1 \tag{15}$$

上的点都属于 K, 则称 K 是一个凸集.

平面上凸集的例子有圆盘、三角形和半圆盘. 凸集的下列性质是其定义的直接推论.

定理 4 设 K 是实线性空间 X 的一个凸子集. 若 $x_1, \cdots, x_n$ 属于 K, 则形如

$$x = \sum_1^n a_j x_j, \quad a_j \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^n a_j = 1, \tag{16}$$

的每个 x 都属于 K.

习题 4 证明定理 4.

形如 (16) 的 x 称为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个凸组合.

定理 5 设 X 是一个实线性空间, 则

(i) 空集为凸集.

(ii) 单点集为凸集.

(iii) X 的每个线性子空间都是凸集.

(iv) 两个凸子集的和为凸集.

(v) 若 K 是凸集, 则 $-K$ 也是凸集.

(vi) 任意一族凸集的交仍是凸集.

(vii) 若 $\{K_j\}$ 按照由集合的包含关系定义的偏序是一个全序子集, 则它们的并集 $\cup K_j$ 是凸集.

(viii) 凸集在线性映射下的象是凸集.

(ix) 凸集在线性映射下的逆象是凸集.

习题 5　证明定理 5.

定义　设 S 是实线性空间 X 的一个子集. 称包含 S 的所有凸集的交为 S 的凸包. S 的凸包记为 $\widehat{S}$.

定理 6

(i) S 的凸包是包含 S 的最小凸集.

(ii) S 的凸包由 S 中的点的形如 (16) 的凸组合构成.

习题 6　证明定理 6.

定义　如果凸集 K 的子集 E 满足:

(i) E 是非空凸集;

(ii) 当 E 中的点 x 可以表示为 $x=\frac{y+z}{2}$ $(y,z\in K)$ 时, y 和 z 都属于 E, 则称 E 是 K 的一个**极子集**.

只包含一个点的极子集称为 K 的**极值点**.

例 1　设 K 是区间 $\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}$. 区间的两个端点是 E 的极值点.

例 2　设 K 是闭圆盘

$$\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}.$$

圆周 $\{(x,y):x^2+y^2=1\}$ 上的每一个点都是 K 的极值点.

例 3　开圆盘

$$\{(x,y):x^2+y^2<1\}$$

没有极值点.

例 4　设 K 是多面体 (包含所有的面). K 的面、边、顶点和 K 自身都是 K 的极子集.

定理 7　设 K 是一个凸集, E 是 K 的极子集且 F 是 E 的极子集, 则 F 是 K 的极子集.

习题 7　证明定理 7.

定理 8 设 M 是从线性空间 X 到线性空间 U 的一个线性映射. 若 K 是 U 的一个凸子集, E 是 K 的极子集, 则 E 的逆象是空集或是 K 的逆象的一个极子集.

习题 8 证明定理 8.

习题 9 举例说明极子集在线性映射下的象未必是象的极子集.

当线性空间 U 是一维的时候, 我们得到如下推论.

推论 8′ 设 H 是线性空间 X 的一个凸子集, ℓ 是从 X 到 $\mathbb{R}$ 的一个线性映射, $H_{\min}$ 和 $H_{\max}$ 分别表示 H 中使得 ℓ 达到最小值和最大值的点构成的集合.

断言 当 $H_{\min}$ 和 $H_{\max}$ 非空时, 它们都是 H 的极子集.

第 2 章 线性映射

2.1 线性映射生成的代数

由第 1 章我们知道, 如果从线性空间 X 到同一个数域上的另一个线性空间 U 的映射 $\boldsymbol{M}: X \to U$ 是一个代数同态, 即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}(x+y) &= \boldsymbol{M}(x) + \boldsymbol{M}(y), \\ \boldsymbol{M}(kx) &= k\boldsymbol{M}(x), \end{aligned} \tag{1}$$

则称 $\boldsymbol{M}$ 是从 X 到 U 内的**线性映射**. 本节只考虑由纯代数结构 (1) 所决定的线性映射的性质, 而对线性空间 X 和 U 不加任何拓扑上的限制.

从 X 到 U 内的两个线性映射 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 的**和**与**标量乘法**分别定义为

$$(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N})(x) = \boldsymbol{M}(x) + \boldsymbol{N}(x), \tag{2}$$

$$(k\boldsymbol{M})(x) = k\boldsymbol{M}(x). \tag{3}$$

这使得从 X 到 U 内的所有线性映射构成了一个**线性空间**. 我们把这个空间记为 $\mathcal{L}(X,U)$. 给定两个线性映射 $\boldsymbol{M}: X \to U$ 和 $\boldsymbol{N}: U \to W$, 我们定义这两个映射的**复合**

$$(\boldsymbol{NM})(x) = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{M}(x)) \tag{4}$$

为它们的**乘积**. 由于映射的复合满足**结合律**, 线性映射的复合也满足结合律. 我们将会看到, 映射的复合不满足交换律.

从现在开始, 我们省略括号而把线性映射 $\boldsymbol{M}$ 在 x 上的作用表示为

$$\boldsymbol{M}(x) = \boldsymbol{M}x.$$

这个符号表明映射 M 在 x 上的作用是一种乘法. 事实上, (1) 和 (2) 说明这种乘法满足分配律.

习题 1 验证两个线性映射的复合仍是线性映射而且满足分配律:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{N}+\boldsymbol{K}) &= \boldsymbol{MN} + \boldsymbol{MK}, \\ (\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K})\boldsymbol{N} &= \boldsymbol{MN} + \boldsymbol{KN}. \end{aligned}$$

定义 若从 X 到 U 的映射 $\boldsymbol{M}$ 把 X 一对一地映到 U 上, 则称 $\boldsymbol{M}$ 是**可逆的**.

若 $\boldsymbol{M}$ 可逆, 则它的逆 $\boldsymbol{M}^{-1}$ 满足

$$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}_X, \quad \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{-1} = \boldsymbol{I}_U,$$

这里 $\boldsymbol{I}_X$ 和 $\boldsymbol{I}_U$ 分别表示 X 和 U 上的**恒等映射**. 若 $\boldsymbol{M}$ 是线性映射, 则 $\boldsymbol{M}^{-1}$ 也是线性映射.