面向21世纪全国高职高专数学规划教材

——教育部国家级精品课程配套教材

大学数学应用教程（上册）

DAXUE SHUXUE YINGYONG JIAOCHENG

仉志余 编著

$\mathrm{d}y|_{x=x_0} = A\Delta x$

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

$[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$

北京大学出版社

PEKING UNIVERSITY PRESS

面向21世纪全国高职高专数学规划教材
* 教育部国家级精品课程配套教材

大学数学应用教程

（上 册）

仉志余 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是教育部国家级精品课程配套教材，是根据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，深入总结多年来教学改革和国家级精品课程建设与研究的经验，并充分考虑到高职高专学制转换的要求而编写的。

全书内容包括函数、极限与连续，导数与微分，不定积分与定积分，导数与微分的应用，定积分的应用，常微分方程，无穷级数，数值计算方法等内容，其中打“*”者为选学内容。

本书既适合高职高专或少学时本科专业使用，也适合同层次的成人教育以及工程技术人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学应用教程(上册)/仉志余编著. —北京:北京大学出版社,2005.7
(面向21世纪全国高职高专数学规划教材)
ISBN 7-301-09194-X

Ⅰ.大… Ⅱ.仉… Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第069417号

书　　名：大学数学应用教程(上册)
著作责任者：仉志余　编著
责 任 编 辑：黄庆生　桂　春
标 准 书 号：ISBN 7-301-09194-X/O・0652
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
电　　话：邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62765013
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn
电 子 信 箱：xxjs@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：北京中科印刷有限公司
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787毫米×1092毫米　16开本　17.75印张　388千字
2005年7月第1版　2005年9月第2次印刷
定　　价：29.00元

前　　言

本书是根据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，深入总结多年来参与高职高专教学改革和国家级精品课程建设与研究的经验，并充分考虑到高职高专学制转换的要求而编写的.

自从1993年原国家教委在高等工程专科教育中实施专业教学改革试点工作以来，我校高分子材料加工专业被确定为第一批国家级试点专业. 随之，我们对数学课程的改革按照"以应用为目的"、"以必需够用为度"的原则设计改革方案，将原属《高等数学》和《工程数学》的多门课程有机地构成了工科数学课群. 1997年我们又展开了由原中国兵器工业总公司批准立项的课题"高等工科数学课程体系、教学内容与教学模式的研究"的教改研究与实践工作. 1998年我校化工工艺专业被教育部批准为全国第四批产学结合的试点专业，我们又积极投入了高职高专教育数学课程教改实践. 经过十年的不懈努力，我们取得了阶段性成果，形成了符合高职高专人才培养目标，特色明显的数学课程体系、教学内容和教学模式，2002年获得了省级教学成果一等奖. 其中"线性代数"课程于2003年被教育部确定为首届国家级精品课程之一.

根据高职高专教育人才培养目标及规格的要求，我们认为，高职高专教育必须既"性"高，又"性"职，而数学课程是满足这一要求的必修课之一. 因此定名为《大学数学应用教程》的这套教材，力图充分体现以下特色.

(1)精选内容，构架新的课程体系，使受教育者学会运用数学方法与工具分析问题、解决问题，达到"性"高的人才培养目标. 同时，又要考虑到"性"职和以"必需够用"为度，因而必须对数学的"系统性"和"严密性"赋予新的认识. 本书中对数学结论的严密性和论证的简明化处理就是一种较好的处理方法. 例如，极限方法可以跳出"ε-δ"语言体系，微分学中值定理可以用几何方法证明等.

(2)新的课程体系充分体现"以应用为目的"的要求. 众所周知，数学的产生和发展就是从实践中来再到实践中去的，我们理应取其精髓，还其本来面目，使受教育者明其应用背景，知其应用方法. 因此本书的目的就是使学生学会如何应用数学方法解决实际问题. 于是，本书大量的篇幅是数学应用，而不是公式的推导或定理的证明.

(3)在第二篇一元微积分的应用部分，本书选择典型问题介绍了数学建模方法，这是数学应用的重要方法之一. 而第四篇线性代数构建的体系就是按照建立数学模型—寻找解模工具—解模答问这条主线进行的.

(4)考虑到文科学生的需要，本书特意在第二篇中引入了数学在经济学中的应用问题. 当然理工科学生了解一些数学在经济学中的应用基础也是很有必要的.

(5)考虑到高职高专教育学制和学生基础的实际情况，本书在内容安排上尽力做到重点

突出,难点分散;在问题的阐述上,尽力做到开门见山、简明扼要、循序渐进和深入浅出;并注重几何解释、抽象概括与逻辑推理有机结合,以培养学生数学应用的意识、兴趣和综合能力.

本书既适合高等专科和高等职业技术教育院校或少学时本科专业使用,也适合同层次的成人教育以及工程技术人员使用.为了便于教师更好地使用本教材,我们充分考虑到高等教育大众化对教学设计多样性和学生发展个性化的要求,并根据多年的教学经验,提出如下几套教学方案,以供参考.

(1)对于数学要求较高的专业,可以安排160～180学时,分两个学期,全部讲完第一至第五篇;也可安排150学时左右,分两学期,在对带"＊"的内容作适当取舍后,讲完第一至第五篇.

(2)对于只安排120学时左右的专业,可以完成第一篇、第二篇(其中第十二章除外)和第三篇的讲授;或者可以选择第一篇,第二篇(其中第十二章除外),第四篇的第一、二、三章,以及第五篇的第一、二、三章讲授.

(3)对于仅给80学时左右的专业,可以完成第一篇、第二篇(其中第十一、第十二章除外)和第四篇第一、二、三章的讲授.而第四篇完全可以放在其他各篇之前讲授.

本书的出版得到了山西省教育厅有关领导和高职高专人才培养委员会各领导及专家的大力支持和帮助.此外,十多年来,在实施教改过程中,也得到了校内外专家和同仁的大力支持,特别是精品课程组成员的积极参与等,在此一并致谢.

由于本人水平所限,书中不妥甚至错误之处在所难免,敬请各位同仁与读者批评指正.

编　者

2005年2月

目　录

第一篇　一元微积分

第二篇　一元微积分的应用

第一篇　一元微积分

微积分学是大学数学的主体内容.本篇主要学习一元函数的极限与连续;导数与微分以及不定积分与定积分的基本知识.它们是中学数学中微积分知识的扩展和深化,又是大学数学的基础和入门,因此是各科大学生必须掌握的基本内容.

第一章　函数、极限与连续

微积分学是大学数学的主体内容,它以变量为主要研究对象.函数关系是变量之间的依赖关系,极限方法是微积分学的基本方法,连续性是函数的重要内容.本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念和性质.

第一节　函　　数

一、函数的概念

先考察几个实际例子.

例 1　自由落体物体下落的距离 S 与所用的时间 t 有下述关系:

$$S=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中常数 g 是重力加速度.假定物体着地的时刻为 $t=T$,那么当 t 在 $[0,T]$ 上任意取定一个数值时,由上式就可以确定下落距离 S 的相应数值.

例 2　三角形一边长固定为 a,那么三角形面积 S 与该边上高 x 有如下关系:

$$S=\frac{1}{2}ax,$$

当 x 在 $(0,+\infty)$ 内任意取定一值 x_1 时,相应地可得三角形面积为 $\frac{1}{2}ax_1$.

从上述例子可以看到,所讨论的问题中都有两个变量,且两变量之间存在着确定的依赖关系.我们把这样的两个变量之间的关系抽象为函数.

定义　假设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y,如果当变量 x 在其变化范围内任取一个数值时,变量 y 按照一定法则总有确定的数值与之对应,则称 y 是 x 的一元**函数**(简称为**函数**),记作 $y=f(x)$.其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**.

自变量 x 的变化范围 D 称为函数的**定义域**,因变量 y 的取值范围 W 称为函数的**值域**,

f 称为**对应关系**或**函数关系**.

函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点的值常用 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$ 表示.

函数定义包括**两个要素**:定义域和对应法则.当定义域和对应法则确定之后,函数就惟一确定了.而且只有定义域与对应法则都相同的两个函数才是相同的函数.

例如,$f(x)=\dfrac{x^2}{x}$ 和 $g(x)=x$ 是两个不同的函数,再如 $y=2\log_a x$ 与 $y=\log_a x^2$ 也是两个不同的函数.

例 3 求函数 $y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域.

解 函数的定义域就是使得上式有意义的实数 x 的全体之集.当 $3x-2>0$ 且 $3x-2\neq 1$ 时,上式才有意义,即有

$$x>\frac{2}{3} \qquad 且 \qquad x\neq 1$$

所以定义域为 $(\frac{2}{3},1)\cup(1,+\infty)$.

如果自变量在定义域内任取一个数值时,对应的函数值总是只有一个,这种函数称为**单值函数**,否则称为**多值函数**.

例如,例 1~3 的函数均为单值函数.但是满足关系 $x^2+y^2=R^2$ 的函数 $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$,对于定义域 $[-R,R]$ 中的每一个 x,对应的函数 y 有两个值,因此 y 是 x 的多值函数.

今后,若无特别说明,所指函数均为单值函数.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,则对任意取定的 $x\in D$,总有 $y=f(x)$ 与之对应.这样,以 x 为横坐标、y 为纵坐标就在 xoy 平面上确定一点 (x,y).集合

$$C=\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**图形**.

函数的表示法通常有三种:

公式法,即用数学式子表示自变量与因变量之间的关系的方法.如例 1~3.公式法的优点是简明准确,便于理解与理论分析,常用但不够直观.

表格法,即将一系列自变量与对应的函数值列成表格的方法.如对数表、三角函数表等.表格法的优点是便于计算函数值,但表中所列数据一般不完全,也不便于作理论分析.

图示法,即用坐标系中曲线表示函数的方法.例如用温度自动记录仪描出 24 小时的温度变化曲线,就表示温度 T 与时间 t 的函数关系.

今后,常用公式法与图示法结合,表示函数.

例 4 函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $[0,+\infty)$,图形如图 1-1 所示.该函数称为绝对值函数.

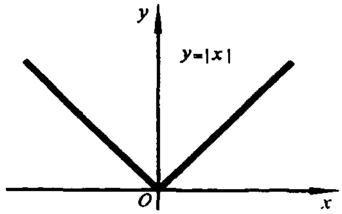


图 1-1

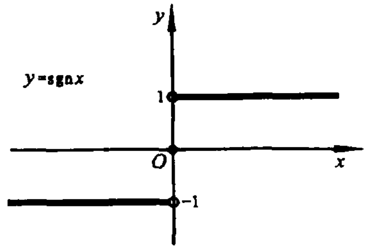


图 1-2

例 5　函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**，它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为集合$\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1-2 所示. 对于任何实数x，有$|x|=x\cdot \operatorname{sgn}x$.

从例 4、例 5 看到，有时一个函数要用几个式子表示. 这种在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同式子表示的函数，称为**分段函数**.

注意，例 4 和例 5 中的分段函数表示的都是一个函数，而不是几个函数.

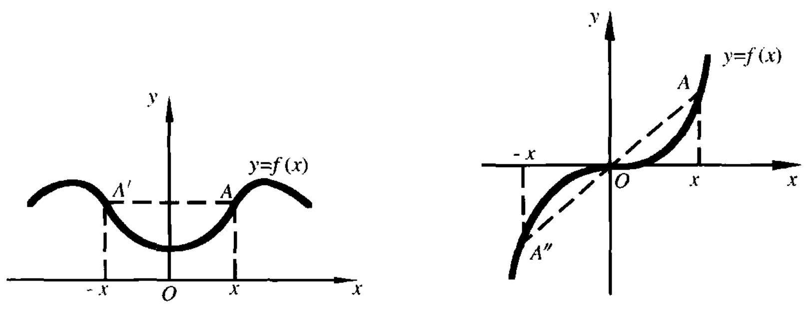
二、函数的基本性态

1. 奇偶性

设函数$f(x)$的定义域D是以原点为中心的对称区间（即若$x\in D$，则必有$-x\in D$），如果对于任意$x\in D$，总有$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为**奇函数**；如果总有$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为**偶函数**.

偶函数的图形关于y轴对称，如图1-3(a)所示. 奇函数的图形关于原点对称，如图1-3(b)所示.

函数$y=x^2$是偶函数，$y=x^3$是奇函数，$y=x^2+x^3$为非奇非偶函数.



(a)　(b)

图 1-3

2. **有界性**

设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，如果存在正数 M，使得对于 X 内的任何 x 值，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**. 如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**.

易见，$y=\sin x$ 在定义域 $D=(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为对任意 $x\in D$，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上无界，因为在 $(0,1]$ 上，分母 x 取值可以与零无限接近，所以 $\left|\dfrac{1}{x}\right|$ 可以无限增大. 但函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上有界，因为对任意 $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，恒有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 2$.

3. **单调性**

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (\text{或} \quad f(x_1)>f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增**(或**单调减**)的. 单调增和单调减函数统称为**单调函数**.

单调增函数，其图形是随着 x 增加而上升的曲线；单调减函数，其图形是随着 x 增加而下降的曲线，如图 1-4 和图 1-5 所示.

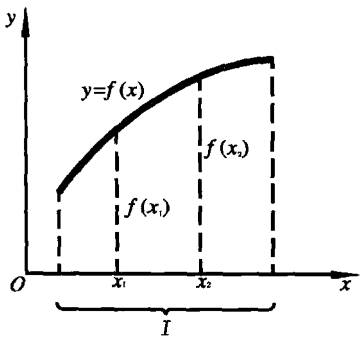


图 1-4

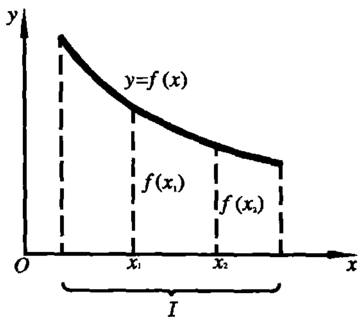


图 1-5

函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调增的，在区间 $[-\infty,0]$ 上是单调减的，但在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调函数. 函数 $f(x)=x^3$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增的.

4. **周期性**

对于函数 $y=f(x)$，如果存在不为零的常数 l，使关系式 $f(x+l)=f(x)$ 对于定义域内任何 x 都成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**. 通常满足这个等式的最小正数 l 称为该函数的**周期**.

函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数. 函数 $y=\tan x$，$y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

三、反函数

定义 设函数 $y=f(x)$ 的值域为 W. 如果对于任意 $y\in W$，至少可以确定一个数值 x，使 $f(x)=y$. 这样得到的函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=\varphi(y)$. 相对于反函数 $x=\varphi(y)$ 来说，原来的函数称为**直接函数**.

习惯上，常常用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此将反函数 $x=\varphi(y)$ 改写成 $y=\varphi(x)$.

这时称 $y=f(x)$ 和 $y=\varphi(x)$ **互为反函数**.

注意,在同一个坐标平面上,函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称(如图 1-6 所示);但 $y=f(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 的图形是同一条曲线.

此外,容易知道,虽然直接函数 $y=f(x)$ 是单值函数,但其反函数 $y=\varphi(x)$ 却不一定是单值的.但如果 $y=f(x)$ 单值且单调时,其反函数 $y=\varphi(x)$ 也是单值单调的.

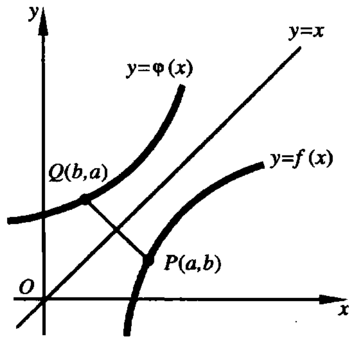


图 1-6

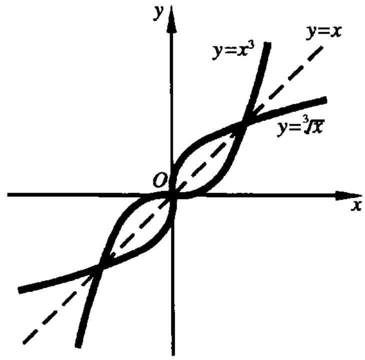


图 1-7

例 6　求 $y=x^3$ 的反函数并作图.

解　从 $y=x^3$ 中解得 $x=\sqrt[3]{y}$,交换 x 与 y,得 $y=\sqrt[3]{x}$,即为 $y=x^3$ 的反函数.作出它们的图形(如图 1-7 所示),易见它们关于直线 $y=x$ 对称.

四、初等函数

1. 基本初等函数

幂函数　$y=x^\mu$(μ 为任意实数);

指数函数　$y=a^x$($a>0$,且 $a\neq1$);

对数函数　$y=\log_a x$($a>0$,且 $a\neq1$);

三角函数　$y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$ 等;

反三角函数　$y=\arcsin x$,$y=\arccos x$ 等.

以上五类函数统称为**基本初等函数**.为了便于今后应用,我们再作简单复述如下.

(1) 幂函数

幂函数 $y=x^\mu$ 的定义域 D 随 μ 值而定,但无论 μ 为何值,总有 $D\supset(0,+\infty)$,图形都经过点(1,1).

$y=x^\mu$ 中,$\mu=1,2,3,\frac{1}{2},-1$ 时最常见,它们的图形如图 1-8 所示.

(2) 指数函数

指数函数 $y=a^x$($a>0$,且 $a\neq1$)的定义域为$(-\infty,+\infty)$,图形都在 x 轴上方且过点(0,1).

若 $a>1$,则指数函数 $y=a^x$ 是单调增的.