经济数学基础

JING JI SHU XUE JI CHU

陈光潮 ◎ 编著

全国成人高等教育系列教材

QUAN GUO CHENG REN GAO DENG JIAO YU XI LIE JIAO CAI

FE

中国财政经济出版社

全国成人高等教育系列教材

经济数学基础

陈光潮　编著

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济数学基础/陈光潮编著.—北京：中国财政经济出版社，2003.4
（全国成人高等教育系列教材）
ISBN 7-5005-6490-2

Ⅰ.经…　Ⅱ.陈…　Ⅲ.经济数学-成人教育：高等教育-教材
Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第027367号

中国财政经济出版社出版
URL：http：//www.cfeph.com.cn
E-mail：cfeph@dic.gov.cn

社址：北京海淀区阜成路甲28号　邮政编码：100036
发行电话：88190616　88190655（传真）
北京财经印刷厂印刷　各地新华书店经销
787×960毫米　16开　13.25印张　219000字
2003年7月第1版　2003年7月北京第1次印刷
定价：13.00元
ISBN 7-5005-6490-2/F·5662
（图书出现印装问题，本社负责调换）

出 版 说 明

全国成人高等教育规划教材（经济学科类）自 1999 年出版以来，深受读者欢迎，被许多财经类成人高等学校采用。根据形势的变化和读者的意见及建议，我们对原财经版全国成人高等教育规划教材（教育部高等教育司组编）进行了修订再版；同时，又组织编写了经济学科类其他相关课程的教材，作为全国成人高等教育系列教材出版，以满足全国成人高等学校的教学需要。

该系列教材的作者分别来自中国人民大学、武汉大学、中央财经大学、首都经贸大学等高等院校，他们不仅是各学科领域的权威或学科带头人，具有丰富的教材编写经验，而且长期在成人高等学校承担本课程的教学工作，能较好地根据学生的实际水平设置教材内容，所编写的教材针对性、适宜性强。在教材的编写过程中，作者以教育部制定的《全国成人高等教育经济学主要课程教学基本要求》为依据，并注意吸取了我国新近颁布的各项法规、制度，包括经济法规、会计准则和会计制度、统计核算方法等内容；在编写的体例上也做了新的尝试，在章前有该章的内容提要，章后有本章小结、复习思考题，对于实务类课程，附有案例和练习题，以帮助学生进一步消化、理解、掌握教材的基本概念、基本原理、基本方法，提高学生分析问题和解决问题的能力。在此，我们真诚地希望各类成人高等学校在教材的使用过程中，能够总结经验，及时提出修改意见和建议，使之不断完善和提高。

中国财政经济出版社

2003 年 5 月

前　言

本教材根据教育部及中国财政经济出版社的有关精神和要求编写而成，其基本思想和基本原则基于以下几点：

1. 体现社会经济发展对经济数学的现实需求；
2. 反映经济、管理类各学科发展对经济数学的要求；
3. 对现有经济数学教材和使用效果的基本估计；
4. 以基本够用为度控制篇幅、内容；
5. 以易教、易学、通俗易懂为准绳选择语言的表述方式；
6. 以线条简单、清晰为标准安排体系、结构；
7. 充分考虑到学生的特点和可能的使用效果。

真正做到以上几点并不容易，部分原因可能是，编写人员多"出生"于数学专业，思维程式数学化，教材中难以摆脱数学专业学生培养模式的烙印。例如，对相当一部人而言，定义、定理的表述如果不用数学语言，就会认为不够严格；定理、公式应用之前不加以证明，就会感到不踏实而难以接受。这些心理因素，不同程度的存在并发挥作用，影响着他们对教材的处理方式。另外，经济与数学两分离的现象仍然存在，数学在经济管理方面应用的典型案例有待进一步研究开发。本教材作者在编写中尽其所能在这些方面有所改进。

本教材力求突出以下特点：

1. 合理地控制篇幅。
2. 表述尽可能通俗。例如：全书有关极限均以用通俗语言代替

$\varepsilon-\delta$语言；抽象的概念尽可能从实例开始；公式、定理的证明适度取舍或以表述证明思路代替严格证明等。这样处理可能会被认为有损于数学的严密性，对此，需要转变观念，权衡利弊，辩证取舍，以利于基本目标的实现。

3. 结构简单。第一章至第四章为微积分的基本内容，第五章为线性代数的基本内容，第六章为概率论的基本内容。

4. 突出数学的基础性、工具性和应用性。

本书在编写过程中参考了一些相关的教材并从中选用了部分例题和习题，在此对这些教材的作者一并表示感谢（这些参考教材附列于后）。

本教材由暨南大学陈光潮教授独立编写完成。由于作者的水平有限，错误在所难免，敬请读者批评指正。

作　者

2003年3月

目　　录

第一章　函数的极限与连续

[内容提示] 函数是反映变量间对应关系的一种方式. 这种方式的表达可以从两个层面理解，第一层面理解，有一般函数、复合函数、反函数、隐函数等；第二层面理解，有文字方式、图形方式、表格方式、公式方式. 函数不论采用什么方式，都必须由三要素组成(某些要素可能是隐性的). 常见、常用到的函数是基本初等函数和初等函数. 函数常见、常用的基本特征有周期性、有界性、对称性、奇偶性、单调性等. 函数极限是自变量某一变动过程中对应函数值变动的终极值，该值必须是确定的有限的实数. 无穷大量与无穷小量是极限研究中的两种典型. 两个重要极限是计算某些函数极限的基础. 有三个定理可以用于函数极限存在性的判别. 函数连续以极限为基础，函数在区间上连续以其在一点上连续为基础，极限有左右极限之分，连续有左右连续之别. 极限与连续在一定条件下可以进行有限次的四则复合运算. 闭区间上连续函数具有介值性、最值性、有界性.

微积分，是经济数学基础的重要内容，以变量间关系为研究对象，研究变量间关系的特征、性质、规律及其相关的应用. 变量间关系通过函数的方式表达，所以学习微积分必须从函数开始.

第一节　函　　数

1.1.1　函数的概念

这里，函数的概念与中学介绍的函数概念是一致的，只是在表述方式上有

所不同.

定义1.1.1　设 D 是一个非空的实数集，对 $\forall x\in D$($\forall$ 表示任意，$\in$ 表示属于，$\forall x\in D$ 表示对 D 中任意的一点 x)，按照某种对应法则 f(或对应关系)，都有惟一的一个实数 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量，法则 f 称为函数关系，D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域.

例如，

$$y=x \qquad x\in D=(-\infty,\ +\infty)$$

$$y=|x| \qquad x\in D=(-\infty,\ +\infty)$$

$$y=\frac{1}{x} \qquad x\in D=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots n\cdots\}$$

都符合函数的定义，故都是函数.

由上可知，数列是特殊的一类函数.

关于函数的概念需说明以下几点：

1. $y=f(x)$ 的定义域 D 必须是非空的实数集(这个集合中必须有元素). 如果 D 是空集，说明 $y=f(x)$ 在 D 上的函数关系不成立，或称 $y=f(x)$ 在 D 上没有定义. 例如，对于函数 $y=\ln(-x^2)$ 而言，没有实数点 x，使得函数有对应值存在，即函数的定义域是一个空集，函数关系不成立.

2. 定义域 D 中变量 x 的值，通过函数关系 $y=f(x)$ 得到变量 y 的值，y 所有值组成的集合称之为函数的值域.

3. 在确定函数的定义域时，应注意函数所处的具体背景。例如，圆的周长 L 是其半径 r 的函数，即

$$L=2\pi r$$

在这种背景下，函数的定义域是 $[0,\ +\infty)$，因为半径不可能为负值.

如果 L 与 r 没有指明是周长与半径的关系，也没有其他任何的限定，也即没有任何背景要求，则函数 $L=2\pi r$ 的定义域是 $(-\infty,\ +\infty)$. 这种只是通过函数的自然存在形式确定的定义域称之为自然定义域.

4. 注意函数对应关系的惟一性. 即对 $\forall x\in D$，有惟一的一个实数 y 与之对应. 例如，由 $x^2+y^2=1$ 解得 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$，显然，对于 $\forall x\in(-1,1)$，都有两个 y 与之对应，这不符合以上函数的定义，故不能称其为函数. 但有时为了方便或其他目的，称此例所确定的变量关系为多值函数，满足本定义的变量关系为单值函数. 本书所涉及的函数若无特别申明，都是单值函数.

5. 函数由定义域、函数关系、值域三要素组成，确定某一个函数就是要确定相应的三要素.

1.1.2　复合函数

复合函数与多个函数、多个变量有关，最简单的是两个函数、三个变量的情景. 例如，$y=f(u)=\frac{1}{u}$，$u=g(x)=\sqrt{1-x^2}$，这里涉及两个函数，三个变量. y 与 x 的关系通过中间变量 u"搭桥"复合而成，现求这种复合关系的函数形式和定义域. 显然 y 与 x 的关系形式为：

$$y=h(x)=f(u)=f(g(x))=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

这种形式对于 $\forall x\in(-1,1)$ 都是有意义的，故是一种函数关系. 这种复合之所以能够构成一个函数，关键之点是 $f(u)$ 的定义域和 $g(x)$ 的值域这两个域的交集(两个域的公共部分)非空. 如果这个交集是空集，就不能复合成一个函数.

定义1.1.2　设有两个函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$，如果 $y=f(u)$ 的定义域与 $u=g(x)$ 的值域的交集非空，则称 $y=f(g(x))$ 为复合函数.

关于定义 1.1.2，说明以下两点：

1. 定义仅说明两个函数的复合，对于多个函数的复合可以类推；

2. 引进复合函数的概念后，可以将较为复杂的函数视为一系列简单函数的复合.

1.1.3　反函数

函数的定义告诉我们，自变量在定义域中的任意一点通过函数关系在其值域中可以找到因变量惟一的对应点. 反过来，对于因变量在值域中的任意一点，通过与该函数等价的关系，能否在其定义域中找到自变量惟一的对应点. 如果能够，就可以确定一个反函数关系；如果不能够，则否之.

例如，通过函数 $y=f(x)=x+1$ 就可以确定一个反函数关系 $x=y-1$，而 $y=x^2+1$ 不能确定一个反函数关系.

定义1.1.3　对于函数 $y=f(x)$，如果其值域中的任意一点，通过其等价关系，在其定义域中都有惟一对应点，则称等价关系所确定的对应法则为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 f^{-1}，或称它们互为反函数.

在上例中，所确定的反函数为 $x=y-1$，此时，y 是自变量，x 是因变量，

按理反函数应记为 $x=f^{-1}(y)$. 但这种记法与前面所说，一般用 y 表示因变量，x 表示自变量不一致，为了自变量、因变量表示的明确性和一致性，我们仍将 $y=f(x)$的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$，以明确变量的因果身份.

1.1.4 函数的基本特征

函数的基本特征有的书称之为函数的基本性质，有的书称之为函数的几何特征，主要是有界性、周期性、奇偶性(对称性)、单调性. 应注意，这些特征是函数可能具有的特征，而不是函数必然具有的特征.

1. 有界性. 函数 $y=f(x)$，如果存在某个大于零的常数 M，在其有定义的某区域 D 中任意点 x，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $y=f(x)$在 D 上有界.

例如，$\sin x$，$\cos x$ 在其定义域内是有界的，$y=2x+1$ 在任何有限区间内是有界的.

函数 $y=f(x)$，如果存在某个常数 M，在其有定义的某区域 D 中任意点 x，都有 $f(x)\leqslant M$ 成立，则称函数 $y=f(x)$在 D 上有上界.

函数 $y=f(x)$，如果存在某个常数 M，在其有定义的某区域 D 中任意点 x，都有 $M\leqslant f(x)$成立，则称函数 $y=f(x)$在 D 上有下界.

2. 周期性. 函数 $y=f(x)$，如果存在某个正常数 T，在其有定义的某区域 D 中任意点 $x(x+T\in D)$，都有 $f(x+T)=f(x)$成立，则称 $y=f(x)$在 D 内是周期函数，满足以上关系式的最小正数 T 称之为函数的周期.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 在其定义域内,是周期为 2π 的周期函数.

3. 奇偶性. 函数 $y=f(x)$，如果在其有定义的某区域 D 中任意点 $x(-x\in D)$，都有 $f(-x)=f(x)$ $(f(-x)=-f(x))$

成立，则称函数 $y=f(x)$在 D 上是偶函数(奇函数).

偶函数关于 y 轴对称，奇函数关于原点对称. 图 1-1 是偶函数的示意图，图 1-2 是奇函数的示意图.

例如，$y=\sin x$ 在其定义域内是奇函数，$y=\cos x$ 在其定义域内是偶函数. $y=2x+1$ 在其定义域内是非奇非偶函数.

4. 单调性. 函数 $y=f(x)$，在其有定义的某区域 D 中任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$，有

①如果 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$在 D 中是单调递增的(如图 1.1.3)；

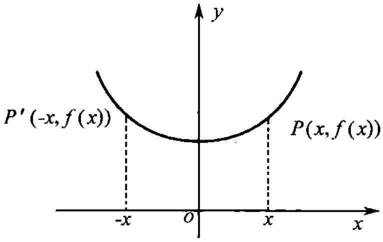

图 1.1.1　偶函数示意图

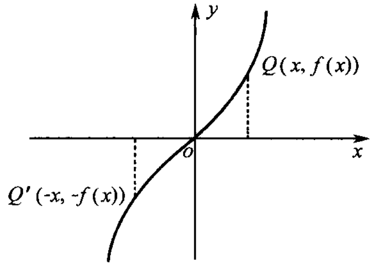

图 1.1.2　奇函数示意图

②如果 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$在 D 中是单调不降的；

③如果 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$在 D 中是单调递减的(如图1.1.4)；

④如果 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$在 D 中是单调不增的.

例如，函数 $y=x^2$，$y=\log_2 x$ 在其定义域内是单调递增的，函数$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$在其定义域内是递减的.

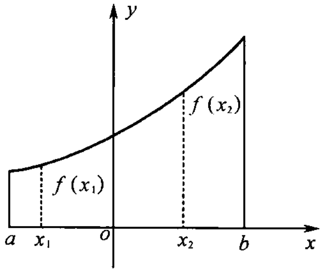

图 1.1.3　单调递增示意图

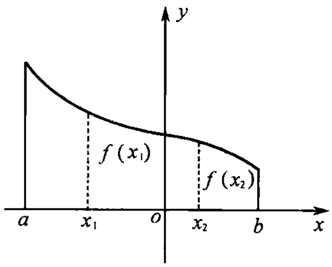

图 1.1.4　单调递减示意图

1.1.5　初等函数

初等函数以基本初等函数为基础，基本初等函数中学已经学习过，包括以下六类.

1. 常数函数：　$y=c$.
2. 幂函数：　$y=x^\alpha$，α 为任何实数.
3. 指数函数：　$y=a^x$，$(a>0,\ a\neq 1)$.
4. 对数函数：　$y=\log_a x$，$(a>0,\ a\neq 1)$
5. 三角函数：　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\mathrm{tg}x$
　　$y=\mathrm{ctg}x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$

6．反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\mathrm{arctg}x$

$y=\mathrm{arcctg}x$，$y=\mathrm{arcsec}\ x$，$y=\mathrm{arccsc}\ x$

对于每一种初等函数，都要讨论它的定义域、有界性、周期性、奇偶性、单调性、对称性、特殊点、渐近线、图象等．这些内容中学已经学习过，下面以幂函数为例予以说明．

在幂函数中以 $\alpha=-1$ 为例予以说明．

函数：$y=x^{-1}=\dfrac{1}{x}$

①定义域：$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$；

②有界性：函数在其定义域内是无界的，但在任何有限区间内是有界的；

③周期性：函数在其定义域内无周期；

④奇偶性(对称性)：函数在其定义域内任意一点 x，都有

$$f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x)$$

所以，函数是奇函数，而且关于原点对称；

⑤单调性：在区域$(-\infty,0)$，或区域$(0,+\infty)$内；对任意的两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$，都有

$$f(x_1)=\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}=f(x_2)$$

所以函数是单调递减的；

⑥特殊点：函数在原点无定义；

⑦渐近线：当自变量趋于无穷时，对应函数值趋于0；当自变量趋于0时，对应函数值趋于无穷．所以，x 轴与 y 轴均是函数的渐近线(注意，这里趋于都是双向趋于，趋于无穷是指趋于正无穷和负无穷，趋于0是指大于0趋于0和小于0趋于0)；

⑧图象：图象见图 1.1.5

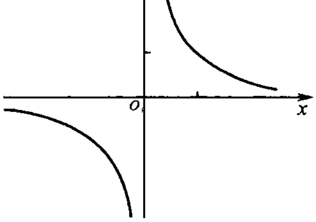

图 1.1.5　$y=x^{-1}$示意图

以上六类基本初等函数经过有限次的四则运算复合而成的函数称之为初等函数.

1.1.6　函数的表达方式

函数的表达方式主要有四种.

1. 文字表达方式

用文字表达变量间的函数关系. 例如，某种产品的利润 y 是其收入 x 的函数，已知二者成正比关系，比例系数为 0.2. 显然，这段文字符合函数的定义，决定了两个变量之间的函数对应关系.

2. 表格表达方式

用表格表达变量间的函数关系. 例如，某企业的某种产品在连续 5 年的销售量如表 1.1.1.

表1.1.1　　**某种产品的销售量**　　单位:万元

时间 t	1	2	3	4	5
销售量 y	105	120	130	150	180

显然，表 1.1.1 建立了时间与销售量之间的函数对应关系.

3. 图象表达方式

在坐标系中用图形表达变量间的函数关系. 例如，图 1.1.5 表达变量 y 与 x 的关系.

4. 公式表达方式

用公式表达变量间的函数关系. 例如，以上文字表达的利润与收入的关系可转化为用公式表达，即 $y=0.2x$. 在公式表达的方式中，有一种称之为分段函数的方式.

例如，

$$y=f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

该函数被称之为符号函数.

在公式表达方式中，如果含有绝对值的符号，若将绝对值的符号去掉，则转化为分段函数. 例如，

$$y=1+|x|=\begin{cases}1+x, & x\geqslant 0\\ 1-x, & x<0\end{cases}$$

分段函数在实际中有较多的应用，例如，个人所得税率与个人收入的关系可以用分段函数表达.

1.1.7 函数及其应用举例

例 1.1.1 (盈亏平衡分析)某企业生产某种产品(台)的固定成本为 300 万元，单位产品变动成本为 0.25 万元/台，最大生产能力为 15000 台，该产品的销售价格为 0.3 万元/台. 问该产品的生产量在什么范围内才有盈利?

解:设该产品的生产量为 x，总成本为 C，总收入为 R，总利润为 y，根据题意

总成本函数:C = 固定成本 + 总的变动成本

$=300+0.25x$

总收入函数:$R=0.3x$

总利润函数:y = 总收入 − 总成本

$=0.3x-(300+0.25x)$

$=0.05x-300$

以上三个函数的定义域均为[0, 15000].

根据题意，要求总利润为正的生产产量 x 的范围，即要求

$$y=0.05x-300>0$$

也即 $x>6000$(台)

这表明，产量在 6000 台以上，企业才有盈利，6000 台是企业的盈亏平衡点，产量低于 6000 台企业亏损.

例 1.1.2 (市场局部均衡分析)市场某种产品的需求量，在其他因素不变的条件下，与该种产品的市场价格成反比;而产品供给量，在其他因素不变条件下，与该产品的价格成正比. 已知该产品的需求函数与供给函数分别为，

需求函数:$D=a-bx$

供给函数:$S=-c+dx$

其中，a，b，c，d 均大于 0，x 为产品的市场价格. 求需求量与供给量相等时的产品价格(均衡价格).

解:根据题意，要求 $D=S$ 时的价格.

由 $-c+dx=a-bx$

可解得均衡价格：$x=\dfrac{a+c}{b+d}$

应注意到，当 a，b，c，d 都已知时，均衡价格是一个已知的定值. 均衡价格的经济意义是，当产品的市场价格低于均衡价格时，需求量会增加，供给量会减少，二者的综合变动导致产品的价格上升，趋于均衡价格；当产品价格高于均衡价格时，二者的反向运动，使价格下降，趋于均衡价格.

例 1.1.3　问 $y=x^2$，$y=\dfrac{x^3}{x}$是否为同一函数？

解：函数由定义域、值域、函数关系三要素组成，如果有一个要素不同，就可以判定二者不是同一函数.

$y=x^2$ 的定义域是整个数轴，而 $y=\dfrac{x^3}{x}$在 0 这一点没有定义，故二者的定义域不同，可以判定二者不是同一函数.

例1.1.4　判断 $y=x$，$y=\sqrt{x^2}$是否为同一函数.

解：$y=x$ 值域是$(-\infty，+\infty)$，$y=\sqrt{x^2}$的值域是$[0，+\infty)$，二者的值域不同，故不是同一函数.

例1.1.5　求 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$的定义域.

解：所给函数要有定义，必须有

$$\left|\frac{x-1}{2}\right|\leqslant 1$$

解不等式，可得　$-1\leqslant x\leqslant 3$，即为所求的定义域.

例 1.1.6　分段函数形式如下

$$y=\begin{cases}x+5 & x\leqslant 0\\ -x-9 & x>0\end{cases}$$

求 $x=0$，$x=1$ 时的函数值.

解：当 $x=0$ 时

$$y=x+5=0+5=5$$

当 $x=1$ 时

$$y=-x-9=-1-9=-10$$