高等数学习题课教程

王文蔚　张华富
史玉清　黄炳生　编

东南大学出版社

高等数学习题课教程

王文蔚　张华富
史玉清　黄炳生　编

东南大学出版社

内 容 提 要

本书是与原南京工学院数学教研组编写、高等教育出版社出版的《高等数学》(第二版)书相配套的习题课教材.全书按照教材的章节顺序编写了24讲,每讲分为目的要求、疑难解析与练习、课外思考与练习题三部分.另外,安排了8个阶段的自我测验题,并配备了课内练习题、课外思考与练习题,供读者实践.书末附有答案.

本书可作为高等工科院校师生的习题课教学参考书,也可供自学者作为参考书.

责任编辑 徐步政

高等数学习题课教程

王文蔚 等编

*

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼2号 邮编210018)

华东有色地质勘查局研究所印刷厂印刷

*

开本850×1168毫米 1/32 印张10 字数260千

1994年8月第1版 1999年9月第3次印刷

印数:11001－14000册

ISBN 7－81023－942－2/O·82

定价:10.00元

前　言

《高等数学习题课教程》是与我校编写的《高等数学》相配套的教材,是在我校多年来所用的讲义《高等数学习题课廿四讲》的基础上修订而编成的,其目的是帮助读者正确理解和掌握一些基本概念、总结解题方法、提高分析问题解决问题的能力,并为读者提供一份课外复习材料.

本书按照教材的章节顺序编写了廿四讲,每讲分为目的要求、疑难解析与练习、课外思考与练习题三部分,全书安排了八个阶段的自我测验题,每讲的内容不是面面俱到,而是着重围绕几个问题通过讨论、例题、提问等方式,帮助读者正确理解和应用一些基本概念,总结基本的解题方法和应注意的问题,并精选配备课内练习题和课外思考与练习题,供读者实践,由于习题课是一个实践性的教学环节,本教材中阐述的内容主要是起引导作用,适量的课内练习可帮助读者初步掌握这些内容,牢固的掌握尚需大量的训练,这要由读者在课外去完成.

本书一、二、三、十五、十六讲由王文蔚编写;四、五、六、七、二十一、二十二讲由张华富编写;八、九、十、十一、二十三、二十四讲由史玉清编写;十二、十三、十四、十七、十八、十九、二十讲由黄炳生编写;全书由王文蔚负责统稿.

罗庆来、吴学澄两位同志仔细审阅了书稿,提出许多宝贵的修改意见,高等数学教研室的其他同志对本书的编写也给予了大力支持与帮助,特表衷心的感谢.

由于我们水平所限,书中缺点和错误在所难免,敬请读者批评指正.

编　者

1994.5

目　录

第一讲　函　数

一、目的要求

函数是高等数学研究的主要对象，它是高等数学的重要基础，由于中学里已学过函数，所以本讲的目的是复习巩固函数的有关概念，着重于：

1. 深刻理解函数概念，领会定义域与对应规律是确定函数的两个要素，能熟练地求给定函数的定义域，能正确理解函数符号的意义；

2. 正确理解复合函数与分段函数；

3. 复习函数的有界性、奇偶性、周期性及其图形特征.

二、疑难解析与练习

问题 1　为什么说函数的定义域与对应规律是确定函数的两个要素？

函数定义中，只要定义域和对应规律确定了，函数的值域也就确定了，从而函数就完全确定，因而函数的定义域与对应规律是确定函数的两个主要因素.

请读者分别举出定义域不同；定义域相同、对应规律不同；定义域相同、值域也相同的不同函数的例子.

由于函数的定义域与对应规律是确定函数的两个要素，所以只有当两个函数的定义域与对应规律完全相同时，才能说它们是相同的(或相等).

问　下列各题中两函数是否相同？分别作出它们的图形.

(1) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=x$；

(2) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$；

(3) $y=\dfrac{x^2-9}{x-3}$　与　$y=x+3$；

(4) $y=x^2$ 与 $y=(x-1)^2+2x-1$.

下面的例子可帮助读者正确理解函数的符号.

例 1 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$,试以 $f(x)$表示 $f(3x)$.

解

[法 1] 因 $f(3x)=\dfrac{3x}{3x-1}=\dfrac{3x}{2x+(x-1)}=\dfrac{3\dfrac{x}{x-1}}{2\dfrac{x}{x-1}+1}$

故

$$f(3x)=\frac{3f(x)}{2f(x)+1}$$

这种解法的关键在于会变形.

[法 2] 先由 $y=\dfrac{x}{x-1}$解出反函数 $x=\dfrac{y}{y-1}$,则有

$$f(3x)=f\left(\frac{3y}{y-1}\right)=\frac{\dfrac{3y}{y-1}}{\dfrac{3y}{y-1}-1}=\frac{3y}{3y-y+1}=\frac{3y}{2y+1}$$

从而

$$f(3x)=\frac{3f(x)}{2f(x)+1}$$

例 2 设

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -\infty<x<0\\ 2^x, & 0\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

求 $f(x-1)$.

解 令 $x-1=t$,则有

$$f(x-1)=f(t)=\begin{cases}1+t, & -\infty<t<0\\ 2^t, & 0\leqslant t<+\infty\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x, & -\infty<x-1<0\\ 2^{x-1}, & 0\leqslant x-1<+\infty\end{cases}$$

所以

$$f(x-1)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1\\ 2^{x-1}, & 1\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

注意 如果所求的结果写为

$$f(x-1)=\begin{cases} x, & -\infty<x<0 \\ 2^{x-1}, & 0\leqslant x<+\infty \end{cases}$$

那是错误的.

问题 2　两个函数应满足什么条件才能构成复合函数?

按照复合函数的定义,数集 B 上的函数 $y=f(u)$ 与数集 A 上的函数 $u=\varphi(x)$ 能构成数集 A 上的复合函数 $y=f[\varphi(x)]$,应要求 $u=\varphi(x)$ 的值域 $B_\varphi\subseteq B$,如果这个条件不满足,它们就不能构成数集 A 上的复合函数.

例如 $y=\sqrt{1-u^2}$ 与 $u=3+\sin x$ 就不能构成复合函数,这是因为 $y=\sqrt{1-u^2}$ 的定义域为 $-1\leqslant u\leqslant 1$,而 $u=3+\sin x(-\infty<x<+\infty)$ 的值域为 $2\leqslant u\leqslant 4$,它不在 $y=\sqrt{1-u^2}$ 的定义域中.

但应注意,如果在数集 $A^*(A^*\subset A)$ 上,$u=\varphi(x)$ 的值都属于 $y=f(u)$ 的定义域 B,那么 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 在 A^* 上可构成复合函数.

例 3　设 $f(x)=\sqrt{x-1}$,$g(x)=\dfrac{1}{x}$.试确定 $f[g(x)]$,$g[f(x)]$ 的定义域.

解　(1) $g(x)$ 的定义域为 $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,值域为 $B_g=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$f(x)$ 的定义域为 $B=[1,+\infty)$.

由于 B_g 中只有 $[1,+\infty)$ 这一部分在 $f(x)$ 的定义域 B 中,而 B_g 中 $[1,+\infty)$ 这一部分是由 A 中 $(0,1]$ 产生的,所以 $f[g(x)]$ 的定义域为 $(0,1]$.

(2) $f(x)$ 的定义域为 $A=[1,+\infty)$,值域为 $B_f=[0,+\infty)$,$g(x)$ 的定义域为 $B=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

由于 B_f 中只有 $(0,+\infty)$ 这一部分在 $g(x)$ 的定义域 B 中,而 B_f 中 $(0,+\infty)$ 这一部分是由 A 中的 $(1,+\infty)$ 产生的,所以 $g[f(x)]$ 的定义域为 $(1,+\infty)$.

本例表明 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 是不同的函数,它们的定义域没有一个共同点.

可见复合运算是不可交换的.

问　设 $f(x)=|x|$，$g(x)=x^2-x$，则 $f[g(x)]=g[f(x)]$ 成立的 x 的范围是什么？

问题 3　分段函数能不能看作几个函数或看作几段函数相加？

分段函数是一个函数，有其确定的定义域及对应规律，切不可看作几个函数，也不能看作几段函数相加.

例如 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\leqslant 0\\ x-2, & x>0\end{cases}$

是一个分段函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，其对应规律是：当自变量 $x\leqslant 0$ 时，因变量由 $1+x^2$ 确定；当自变量 $x>0$ 时，因变量由 $x-2$ 确定，它是一个函数而不是两个函数，它也不能看作两段函数 $f_1(x)=1+x^2(x\leqslant 0)$ 与 $f_2(x)=x-2(x>0)$ 相加. 因为函数相加是指在共同定义域内同一自变量值处的函数值相加，而 $f_1(x)=1+x^2(x\leqslant 0)$，$f_2(x)=x-2(x>0)$ 是两个定义域不同的函数，它们不能相加.

那么两个分段函数能不能相加？这要由具体情况而定.

例如 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$　与　$g(x)=\begin{cases}x+1, & x<1\\ x, & x\geqslant 1\end{cases}$

就能相加，因为它们的定义域相同，此时

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ 2x+1, & 0\leqslant x<1\\ 2x, & x\geqslant 1\end{cases}$$

而　$f(x)=\begin{cases}0, & -1\leqslant x<0\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$　与　$g(x)=\begin{cases}x+1, & x<1\\ x, & x\geqslant 1\end{cases}$

就不能相加，因为它们的定义域不同.

下面举一个分段函数的例.

例 4　设 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=2f(x)$，且在 $[0,2]$ 上 $f(x)=x(x-2)$，试求 $f(x)$ 在 $[-4,4]$ 上的表示式.

[分析]　已知的只是 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的表示式及关系式：

$$f(x+2)=2f(x) \tag{1-1}$$

要求 $f(x)$ 在 $[-4,4]$ 上的表示式，就要设法通过关系式 (1-1) 来

扩大.

解 ① 当 $x\in[2,4]$时，$x-2\in[0,2]$，将(1—1)式中的 x 用 $x-2$ 代，得

$$f(x)=2f(x-2)$$

由于 $x-2\in[0,2]$时，$f(x-2)=(x-2)(x-4)$. 所以当 $x\in[2,4]$时，$f(x)=2(x-2)(x-4)$.

② 当 $x\in[-2,0]$时，$x+2\in[0,2]$，由(1—1)式知

$$f(x)=\frac{1}{2}f(x+2)$$

由于 $x+2\in[0,2]$时

$$f(x+2)=(x+2)[(x+2)-2]=(x+2)x$$

所以当 $x\in[-2,0]$时，$f(x)=\frac{1}{2}x(x+2)$.

③ 当 $x\in[-4,-2]$时，$x+2\in[-2,0]$，由②知 $x+2\in[-2,0]$时，

$$f(x+2)=\frac{1}{2}(x+2)[(x+2)+2]=\frac{1}{2}(x+2)(x+4)$$

又由(1—1)式知 $f(x)=\frac{1}{2}f(x+2)$. 所以当 $x\in[-4,-2]$时，$f(x)=\frac{1}{4}(x+2)(x+4)$.

综上得$[-4,4]$上 $f(x)$的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x+2)(x+4)}{4}, & -4\leqslant x<-2\\ \dfrac{x(x+2)}{2}, & -2\leqslant x<0\\ x(x-2), & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 2(x-2)(x-4), & 2<x\leqslant 4\end{cases}$$

问题 4 有界函数、奇偶函数、周期函数有何特征？

请读者回答这个问题，并判断下列函数中哪些是周期函数？哪些不是周期函数？对周期函数指出其周期.

(1) $y=\sin^2 x$； (2) $y=\sin x^2$； (3) $y=\sin\pi x$；

(4) $y=1+\cos\frac{\pi}{2}x$；(5) $y=x\cos x$；(6) $y=|\sin x|+|\cos x|$.

例 5 证明定义于$(-a,a)$上的函数$f(x)$总能表示为一个偶函数与一个奇函数之和.

证 因为$(-a,a)$上的函数$f(x)$总可写为

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

记

$$G(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],\ H(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

则

$$f(x)=G(x)+H(x)$$

由于

$$G(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=G(x)$$

$$H(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]$$

$$=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-H(x)$$

所以$G(x)$是偶函数，$H(x)$是奇函数，这就证明了$f(x)$总能表示为一个偶函数与一个奇函数之和.

例 6 证明$f(x)=x-[x]$，$x\in(-\infty,+\infty)$是以 1 为周期的周期函数，并作其图形.

证 因$f(x+1)=(x+1)-[x+1]=(x+1)-[x]-1=x-[x]=f(x)$，故$f(x)$是以 1 为周期的周期函数，其图形如图 1—1 所示.

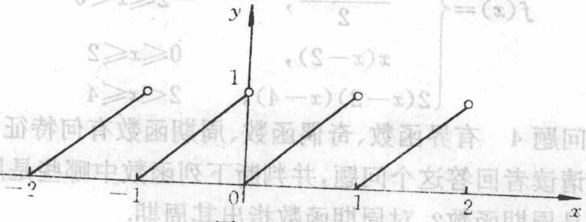

图 1—1

课内练习题

1. 求 $f(x)=\sqrt{3-x}+\dfrac{1}{\ln(x+1)}$ 的定义域.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}4-x^2, & |x|\leqslant 2\\ 0, & |x|>2\end{cases}$

求 $f(x-1)$；$f[f(x)]$.

3. 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

4. 设 $f(x)=2^x+3$，求 $g(x)$ 使得 $f[g(x)]=\sqrt{x}+4$.

5. 已知 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$，$a,b,c$ 为常数且 $|a|\neq|b|$，求 $f(x)$，并证明 $f(x)$ 为奇函数.

6. 已知函数 $y=f(x)$ 的图形如图 1—2 所示，试画出下列各函数的图形：

(1) $y=|f(x)|$.

(2) $y=\dfrac{1}{2}[f(x)+|f(x)|]$.

(3) $y=\begin{cases}f(x), & x\in(0,3);\\ f(-x), & x\in(-3,0).\end{cases}$

(4) $y=\begin{cases}f(x), & x\in(0,3);\\ -f(-x), & x\in(-3,0).\end{cases}$

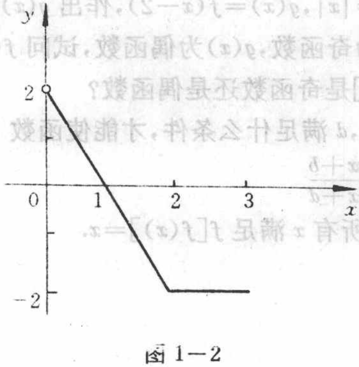

图 1—2

三、课外思考与练习题

1. 下面的函数哪些是相同的？

$f_1(x)=\sqrt{1+4x+4x^2}$，　$f_2(x)=|1+2x|$，

$f_3(t)=1+2t$，　$f_4(y)=1+2y$，

$f_5(Z)=1+2Z\left(Z\neq-\dfrac{1}{2}\right)$，　$f_6(x)=\dfrac{(1+2x)^2}{1+2x}$.

2. 解释为什么 $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$ 和 $\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ 是不同的函数.

3. 设 $f(x)=x+3$，求函数 $g(x)$ 使得 $f[g(x)]=\sqrt{\dfrac{5x+1}{x}}$.

4. 设 $f(x)=\sqrt{1-x}$，$g(x)=2+x^2$，问能不能定义 $f[g(x)]$，为什么？

5. 设 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$，$g(x)=\dfrac{1}{1+x}$，求 $g[f(x)]$，$f[g(x)]$.

6. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，$g(x)=\begin{cases}1, & x<10\\ 5, & x>10\end{cases}$

证明 $g(x)=3+2f(x-10)$.

7. 设 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$，$g(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ x^2, & x>0\end{cases}$

求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

8. 设 $f(x)=|x|$，$g(x)=f(x-2)$，作出 $g(x)$ 的图形.

9. 设 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，试问 $f(x)g(x)$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$，$f[f(x)]$ 是奇函数还是偶函数？

10. 问 a,b,c,d 满足什么条件，才能使函数

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

对其定义域中的所有 x 满足 $f[f(x)]=x$.

第二讲　极　限

一、目的要求

极限是高等数学的重要基础，由于极限部分的理论性较强，也比较抽象，要深刻领会是不容易的，但这部分内容对培养抽象思维能力及论证能力是有益的，应予重视，本讲的目的要求是：

1. 帮助读者正确理解极限的 ε-N，ε-δ 定义及左、右极限概念；

2. 练习正确应用极限的运算法则、两个准则、两个重要极限求极限；

3. 帮助读者理解无穷小量阶的概念，会正确应用等价无穷小量代换求极限.

二、疑难解析与练习

问题 1　极限的 ε-N，ε-δ 定义中应注意些什么？用极限定义证明极限的逻辑思路是什么？

通过讨论下面的两个问题及例子来回答这个问题.

讨论问题(一).

(1) “n 趋于∞时，数列$\{a_n\}$无限接近于 a”用 ε-N 的语言如何描述？这种描述中 ε 与 N 的关系怎样？N 是否唯一？

(2) 对 $n>N$ 时，有$|a_n-a|<\varepsilon$ 成立，应怎么理解？

(3) 如果$\forall\ \varepsilon>0$，$\{a_n\}$中只有有限项使$|a_n-a|<\varepsilon$，能不能说$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，为什么？

(4) 如果$\forall\ \varepsilon>0$，总有$\{a_n\}$中的无限项使得$|a_n-a|<\varepsilon$，能不能说 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，为什么？

(5) 要用 ε-N 方法证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，应如何证明？

例 1　试用 ε-N 方法证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n-1}=\frac{3}{2}$$

［分析］ 只须证明对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 N，使得当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\frac{3n-2}{2n-1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$$

成立.

证 $\forall\ \varepsilon>0$，要 $\left|\frac{3n-2}{2n-1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$

因

$$\left|\frac{3n-2}{2n-1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2}\frac{1}{2n-1}\leqslant\frac{1}{2}\frac{1}{n} \qquad (1-2)$$

故只要 $\frac{1}{2n}<\varepsilon$，即只要 $n>\frac{1}{2}\varepsilon$. 所以，只要取 $N=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，就有 $\frac{1}{2n}<\varepsilon$ 成立，从而有

$$\left|\frac{3n-2}{2n-1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$$

成立.

这就证明了 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $N=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$，使得当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\frac{3n-2}{2n-1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$$

成立.

故 $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n-1}=\frac{3}{2}$$

注意　在证明过程中，将 $\frac{1}{2}\frac{1}{2n-1}$ 放大为(1－2)式，对论证存在 N，使得当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{3n-2}{2n-1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$ 成立，起到简化的作用. 如果不用(1－2)式，直接由 $\frac{1}{2(2n-1)}<\varepsilon$，即 $2n-1>\frac{1}{2\varepsilon}$，从此得出 $n>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon}+1\right)$，再取 $N=\left[\frac{1}{2}(\frac{1}{2\varepsilon}+1)\right]$ 也是可以的，不过当你真正理解了 ε-N 定义，应该避免采用这种麻烦的方法.

讨论问题(二).

(1) "$x \to x_0$ 时,$f(x)$无限接近于 A"用 ε-δ 语言如何描述?这种描述中 ε 与 δ 的关系怎样? δ 是否唯一?

(2) 对 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立,应怎么理解?

(3) 如何用 ε-δ 语言叙述"数 A 不是函数 $f(x)$ 在 x_0 处的极限"? 按以下叙述"若存在一个正数 ε_0,对任意给定的 $\delta>0$,总有点 x_1 满足 $0<|x_1-x_0|<\delta$,使得 $|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A$"对吗?

(4) 要用 ε-δ 方法证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,应如何证明?

例 2 用 ε-δ 方法证明

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{6}$$

[分析] 只须证明$\forall\ \varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-3|<\delta$ 时,恒有

$$\left|\frac{x-3}{x^2-9}-\frac{1}{6}\right|<\varepsilon$$

成立.

证 $\forall\ \varepsilon<0$,现要找符合上述要求的 δ.

因为 $x\neq 3$,所以

$$\left|\frac{x-3}{x^2-9}-\frac{1}{6}\right|=\left|\frac{1}{x+3}-\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{6}\left|\frac{x-3}{x+3}\right|$$

要使

$$\left|\frac{x-3}{x^2-9}-\frac{1}{6}\right|<\varepsilon$$

只须

$$\frac{1}{6}\left|\frac{x-3}{x+3}\right|<\varepsilon$$

(如果由此得出 $0<|x-3|<6|x+3|\varepsilon$,而取 $\delta=6|x+3|\varepsilon$,就认为符合要求的 δ 找到了,那是错误的,因为极限定义中的 δ 只是与 ε 有关的数,它不依赖于 x.)

由于是 $x\to 3$ 时的极限，只须考虑 $x=3$ 的邻域内的 x，所以可令 $|x-3|<1$，即 $2<x<4$. 于是

$$\frac{1}{6}\left|\frac{x-3}{x+3}\right|<\frac{|x-3|}{30}$$

因此，要使 $\frac{1}{6}\left|\frac{x-3}{x+3}\right|<\varepsilon$，只须 $|x-3|<1$，且 $\frac{1}{30}|x-3|<\varepsilon$，即只须 $|x-3|<1$，且 $|x-3|<30\varepsilon$.

现取 $\delta=\min(1,30\varepsilon)$，则当 $0<|x-3|<\delta$ 时，恒有 $\frac{1}{6}\left|\frac{x-3}{x+3}\right|<\varepsilon$ 成立，此时 $\left|\frac{x-3}{x^2-9}-\frac{1}{6}\right|<\varepsilon$ 亦成立.

这样就证明了 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $\delta=\min(1,30\varepsilon)$，使得 $0<|x-3|<\delta$ 时，恒有 $\left|\frac{x-3}{x^2-9}-\frac{1}{6}\right|<\varepsilon$ 成立，所以

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{6}$$

本例对弄清用 ε-δ 定义证明极限的逻辑思路是有益的，希认真领会论证过程的每一步骤.

问题 2　如何用 ε-δ 语言描述 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$? 如何用 ε-M 语言描述 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$?

这个问题请读者给予回答.

由于函数的左、右极限与函数的极限之间有密切关系，所以在讨论函数的极限时，常常用到左、右极限. 例如求分段函数在“分界点”处的极限时，必须研究左、右极限；有些函数在特殊点处的极限也须要考虑左、右极限. 在解题时如果不注意，往往会产生错误.

例如讨论 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}$ 当 $x\to 0$ 时的极限，如果按以下做法：

因

$$\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}=\frac{e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{2}{x}}-1}=1+\frac{1}{e^{\frac{2}{x}}-1}$$