◉高等学校教材

线性代数

主　编　段正敏
副主编　颜　军　阴文革

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

线 性 代 数

Xianxing Daishu

主　审　杨　虎
主　编　段正敏
副主编　颜　军　阴文革

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书为高等学校理工科“线性代数”课程教材，全书共6章，内容包括：行列式，矩阵，向量组的线性相关性，线性方程组，矩阵的相似对角化，二次型。全书概念严谨、内容严密、层次清晰、简明扼要。在相关的章节穿插了线性代数的应用问题，每章后附有类型丰富的习题。

本书可作为高等学校线性代数课程32～54学时的教材，也可作为学生参加硕士研究生入学考试的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/段正敏主编．—北京：高等教育出版社，2010.8

ISBN 978-7-04-030192-2

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①段…　Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第124214号

策划编辑　兰莹莹　**责任编辑**　李　茜　**封面设计**　王凌波
版式设计　张　岚　**责任校对**　杨雪莲　**责任印制**　朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	肥城新华印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2010年8月第1版
印　　张	11.25	印　　次	2010年8月第1次印刷
字　　数	200 000	定　　价	15.40元

物料号　30192-00

序 言

线性代数作为易于接受而又强大的数学理论，于20世纪中叶列入大学数学教学计划，目前已是我国高等学校理工科专业数学教学的三门主要基础课程之一。线性代数工具可应用于现代社会几乎所有的学术领域，它与现代计算技术的交互有广泛的实际应用已是无需多言的事实。在我国，线性代数以一门独立的数学课程出现在工科专业数学教学计划中则相对较晚，课程教学在各大专院校中差异较大，教学时数也不尽相同，因而各校常根据本校的专业特点、历史传统以及实际需要安排这一课程的教学内容。这一现实状况决定了线性代数教材“百花齐放”，特别是数学软件(如MATLAB)应用的引入，使得这门课程的教材更加多样化，这既是该课程教学发展过程中的必经阶段，也反映了各校在该课程教学过程中的探索。

重庆大学数学与统计学院教师们编写的线性代数教材，覆盖了行列式、矩阵、向量的线性相关性、线性方程组、矩阵的对角化和二次型等内容，全书采用经典的线性代数内容结构，概念清晰、推证严谨、内容紧凑。由于该书面对的是大面积短学时的线性代数课程教学，所以在一些内容处理上力求简洁明了，如行列式概念中的各项符号的确定，采用的是简单的逆序数；直接用 $\mathbf{R}^n$ 空间定义向量空间；引入线性变换概念后直接过渡到二次型中的矩阵变换；一些定理推证作了星号内容处理等。与此同时，全书注意了培养学生的观察能力、抽象能力和表述能力。如，将线性方程组的表达式穿插在行列式、矩阵运算、矩阵分块运算和向量运算等内容中。全书习题丰富，特别是引进了填空题和选择题，使习题的形式多样化，不仅便于学生通过习题练习深入理解课程内容、理论和应用，也有利于今后作业和考核在网络上实施。

本书适应于短学时线性代数课程教学的需要，可以为理工科学生后续课程作理论和计算准备，同时通过课程学习，可以培养学生的逻辑思考、数学推证和数学应用的能力，以此提高学生的数学修养。

游宏

2010年3月26日

前 言

线性代数作为讨论代数学中线性关系经典理论的课程，具有较强的抽象性与逻辑性，是培养学生基本数学素养的经典课程。同时，随着数学的发展，线性代数的含义也不断的扩大。它的理论不仅渗透到数学的许多分支中，而且在理论物理、理论化学、工程技术、国民经济、生物技术、航天、航海等领域中都有着广泛的应用。特别是信息化的今天，数学科学被提到了与自然科学、社会科学并列的地位，而线性问题的研究与应用，广泛存在于自然科学、社会科学与工程技术的各个领域，具有普遍的实用价值。许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决。于是作为处理离散问题的线性代数，成为从事科学研究和工程设计的科技人员必备的数学基础。

线性代数的教学被认为是困难的，Dorier J. L. 认为线性代数“登上了另一个星球”（摘自 Dorier J. L. 在 ICM2002 文集中《大学的线性代数教学》一文），如何实施这样一门抽象但又具有相当应用性的课程教学显得尤为重要，而教材的精心设计将有利于该课程学时短的客观条件下教师的教学和学生的学习。本书集作者二十多年来丰富的教学经验和数个国家级、部级教改项目的改革成果编写而成。

关于教材内容，本书做了如下处理：

1. 关于行列式。采用了简单的逆序数定义 n 阶行列式的方式，并证明相关的性质。逆序数定义行列式是一种简单易懂的定义方式，便于学生理解。

2. 关于矩阵。采用直接的数表来定义矩阵，这种定义方式很直接，可以节约课时。为了和后面章节联系，本章开始引入了方程组的矩阵表示；为了突出矩阵理论的重要性，还加入了一节“矩阵的一些简单应用”。

3. 关于向量组的线性相关性。由于本章理论性强，且描述线性系统中元素关系的内容对后续章节非常重要，所以本节在提出线性相关和线性无关概念后，简易地加入了用方程组理解这两个概念，同时引入了方程组的向量组合表示。在不影响向量相关性等重要定理证明的严密性的同时，考虑到课时短的情况，个别定理证明处理成星号内容。向量空间是贯穿整个线性代数理论的精髓内容，而 $\mathbf{R}^n$ 空间关系到后续诸多内容的透彻理解，所以本书直接由 $\mathbf{R}^n$ 来定义向量空间，简洁的处理不仅满足了学生对基本内容的理解，也节约了学时。

4. 关于线性方程组。基于同解定理，利用向量线性相关性和矩阵理论分别得到了齐次方程组和非齐次方程组有非零解的条件和通解的求法。

5. 关于矩阵的相似对角化。本章介绍了特征值、特征向量的概念和性质，集中介绍实对称阵的矩阵对角化部分。

6. 关于二次型。本章为了研究二次型的标准化，提出了线性变换的概念，弥补了个别教材中线性变换概念不清晰的问题。最后研究了正定二次型等内容。

本书第一、二章由颜军、方延洪编写，第三、四章由段正敏、徐建文编写，第五、六章由阴文革、潘致锋编写。本书由重庆大学数学与统计学院院长、博士生导师杨虎教授审定。著名代数学家、国家级教学名师游宏教授为本书作序。本书的顺利完成离不开他们的支持和鼓励，在此表示由衷的感谢。

编　者

2010年3月16日于重庆大学

目录

1 第一章　行　列　式

线性代数是现代科学技术中不可缺少的数学工具，特别是计算机出现以后，线性代数得到了更广泛的应用．本章主要介绍行列式的定义、性质与算法．

第一节　预备知识

设有二元一次方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

用消元法解此方程组，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，可得方程组的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

其中的分母是由方程组中 x_1，x_2 的系数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 所确定的一个数，按它们在方程组中的位置，把它们排列成一个数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

可以看出 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 是这个数表中左上到右下对角线（称为主对角线）上两个数的乘积减去右上到左下对角线（称为反对角线）上两个数的乘积的差，称 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 为该数表的**二阶行列式**，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式的元素，行列式中的横排称为行，纵排称为列．按此定义，有 $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}$，$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21}$．在

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 时，方程组(1.1.1)有唯一解

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

同样，设有三元一次方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.1.2}$$

则当 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$ 时，用消元法，方程组(1.1.2)也有唯一解．类似地，若把方程组(1.1.2)中 x_1，x_2，x_3 的系数构成一个数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

令它等于 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$，称为该数表的**三阶行列式**，记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.1.3}$$

对方程组(1.1.2)，当 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ 时有唯一解：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

对行列式中元素 a_{ij}，第一脚标 i 表示元素所在行，称为**行标**；第二脚标 j 表示元素所在列，称为**列标**．从三阶行列式的定义式(1.1.3)可以看到以下特点：

（1）如果把每一项元素的行标按 1，2，3 依次排列，则每一项元素的列标排列分别是 123，231，312，132，213，321，恰好是 1，2，3 这三个数的所有可能排列；

（2）共有 $3!=6$ 项求和，且每一项是不同行不同列的三个元素乘积；

（3）六项中有三项符号为正，三项符号为负.

以上三个特点是有规律的，对此进行深入讨论后，就可以给出一般 n 阶行列式的定义.

把 n 个不同元素排成一列，称为**全排列**，简称排列. 用 P_n 表示不同全排列的个数，则 $\mathrm{P}_n=n!$.

在这 $n!$ 个不同的全排列中，规定某一个排列为标准顺序的排列，即在各元素中规定一个标准顺序（对自然数，一般规定从小到大的顺序为标准顺序）. 在任一排列中，当两个元素的次序与标准顺序不一致时，就说有一个**逆序**，一个排列中的所有逆序的总数称为这个排列的**逆序数**.

逆序数的计算方法如下：

设有 n 个自然数，记为 p_i $(i=1,2,\cdots,n)$，$p_1p_2\cdots p_n$ 为这 n 个数的一个排列，则对每个 p_i $(i=1,2,\cdots,n)$，如果比 p_i 大且排在 p_i 前面的数有 t_i 个，就称 p_i 在这个排列中的逆序数是 t_i，则这个排列的逆序数为

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i$$

例 1 求排列 421375 的逆序数.

解 4 前面没有数，故 $t_1=0$；2 前面有 4 比它大，故 $t_2=1$；

1 前面有 4、2 比它大，故 $t_3=2$；3 前面有 4 比它大，故 $t_4=1$；

7 前面没有数比它大，故 $t_5=0$；5 前面有 7 比它大，故 $t_6=1$；

所以该排列的逆序数为

$$t=0+1+2+1+0+1=5$$

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

在排列中，将两个元素对调位置，其余元素不动，这种作出新排列的方式称为**对换**.

定理 1.1.1 一个排列中，任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证 先证两个相邻元素的对换.

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，逆序数为 t；对换 a 与 b 后变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$，逆序数为 s. 显然排列中除 a、b 外其他各元素的逆序数对换前后不变，只有 a、b 两元素的逆序数有可能变化. 当 $a<b$ 时，对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1. 总之有 $s=t\pm1$，所以排列改变奇偶性.

再证一般情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l a b_1\cdots b_m b c_1\cdots c_n$，对换 a 与 b 后变为 $a_1\cdots a_l b b_1\cdots b_m a c_1\cdots c_n$. 对此可以把它看成先 m 次对换相邻元素 a 与 b_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 变成 $a_1\cdots a_l b_1\cdots b_m a b c_1\cdots c_n$，再对换 a 与 b，然后作 m 次对换相邻元素 b_i 与 b $(i=1,2,\cdots,m)$，变成 $a_1\cdots a_l b b_1\cdots b_m a c_1\cdots c_n$，共 $2m+1$ 次对换相邻元素，就相当于对换 a 与 b，所以恰好改变排列的奇偶性.

由于标准顺序的排列逆序数是零，由定理 1.1.1 显然有：

推论 奇排列调成标准顺序排列的对换次数是奇数，偶排列调成标准顺序排列的对换次数是偶数.

现在再来讨论三阶行列式，由于排列 123，231，312，132，213，321 的逆序数分别是 0，2，2，1，1，3，故(1.1.3)式可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3} (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中 $p_1p_2p_3$ 是 1，2，3 三个数的一个排列，t 是这个排列的逆序数，共 $3!=6$ 项求和.

由此可以给出一般 n 阶行列式的定义.

第二节 n 阶行列式的定义

定义 1.2.1 设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作和数 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，这里 $p_1p_2\cdots p_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，t 是这个排列的逆序数，共 $\mathrm{P}_n=n!$ 项求和.

称 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 为这个 n 行 n 列的数表形成的 **n 阶行列式**，记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

简记为 $D=\Delta(a_{ij})$. 数 $a_{ij}(i=1,2\cdots n;j=1,2\cdots n)$ 称为 $\Delta(a_{ij})$ 的**元素**，求和式中

每一项都是不同行不同列的 n 个元素的乘积，每一项中行标按标准顺序排列、列标任意排列，列标排列逆序数的奇偶性决定这一项的符号.

定理 1.2.1 n 阶行列式也可表示为

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是行标的任一排列，t 是该排列的逆序数.

证 按定义 $D=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，记 $D_1=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$，现证明 D 中任一项是 D_1 中的某一项：对 D 中任一项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$，对换 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 后成 $(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$，此时行标排列由 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 变成 $1\cdots j\cdots i\cdots n$，而列标排列同时由 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 变成 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$. 由于行标排列和列标排列同时作对换，故新的行标排列逆序数与列标排列逆序数之和的奇偶性与 t 相同. 经过有限次对换，使列标排列变成标准顺序，则行标排列变成某一个 $q_1q_2\cdots q_n$，设其逆序数为 s，则显然有 $(-1)^s=(-1)^t$，所以

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}=(-1)^s a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$$

即 D 中任一项都是 D_1 中某一项.

同理，D_1 中任一项都是 D 中某一项.

又若 $p_i=j$，则由 $a_{ip_i}=a_{ij}=a_{q_jj}$ 知 $q_j=i$，所以这种对应是唯一的，故 $D=D_1$.

对 n 阶行列式

$$D=\Delta(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称从左上角到右下角这条对角线为 D 的**主对角线**，简称**对角线**；称右上角到左下角这条对角线为 D 的**反对角线**或**次对角线**.

下面介绍一些特殊行列式.

1. 对角行列式

除对角线上元素外其余元素全为零的行列式称为**对角行列式**，即 $a_{ij}=0$ $(i\neq j)$. 此时

$$D=\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{1.2.1}$$

证 令

$$a_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ \lambda_i, & i=j\end{cases}$$

则 $D=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中不等于 0 的项只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 一项，故(1.2.1)式成立.

2. 反对角行列式

除反对角线上元素外其余元素全为零的行列式称为**反对角行列式**，即 $a_{ij}=0\ \ (i+j\neq n+1)$，此时

$$D=\begin{vmatrix}0 & & & \lambda_1\\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & 0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{1.2.2}$$

证 令

$$a_{ij}=\begin{cases}0, & i+j\neq n+1\\ \lambda_i, & i+j=n+1\end{cases}$$

则 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中不等于 0 的项只有 $(-1)^t a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$，其中 $t=0+1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$，故(1.2.2)式成立.

3. 三角形行列式

如果在行列式中，位于对角线以下的元素全为零，则称它为**上三角形行列式**，即 $a_{ij}=0\ \ (i>j)$；如果位于对角线以上的元素全为零，则称它为**下三角形行列式**，即 $a_{ij}=0\ \ (i<j)$. 二者统称为**三角形行列式**. 关于三角形行列式，有如下结论：

三角形行列式等于对角线上元素的乘积.

证 只证明下三角形行列式，上三角形行列式同理可得.

设

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

即 $a_{ij}=0\ \ (i<j)$.

对 $D=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，由于每一项中 n 个元素取自不同行不同

列，故要使$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}\neq 0$，必须有$p_1=1,p_2=2,\cdots,p_n=n$，只有一项$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$满足，所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例 1 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}1&0&-3\\2&5&-1\\1&4&2\end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix}2&3&5&1\\0&4&8&9\\0&0&-1&5\\0&0&0&8\end{vmatrix}$；(3) $\begin{vmatrix}0&0&0&0&2\\0&0&0&-1&0\\0&0&3&0&0\\0&5&0&0&0\\7&0&0&0&0\end{vmatrix}$.

解 (1) $D=1\times5\times2+0\times(-1)\times1+(-3)\times2\times4-1\times(-1)\times4-0\times2\times2-(-3)\times5\times1$
$=10+0-24+4-0+15=5$

(2) $D=2\times4\times(-1)\times8=-64$

(3) $D=(-1)^{\frac{5\times4}{2}}\times2\times(-1)\times3\times5\times7=-210$

第三节 行列式的性质

设有 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

记

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

称 D^{T} 为 D 的**转置行列式**.（D^{T} 也可以记为 D'.）

性质 1 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证 令 $b_{ij}=a_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$，则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}$$

$$= \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn} = D.$$

性质 2 互换行列式的两行或两列，行列式改变符号.

证 设行列式 $D=\Delta(a_{ij})$，交换 D 的 i、j 两行，可得行列式 $D_1=\Delta(b_{ij})$，其中

$$\begin{cases} b_{kp}=a_{kp} & (k\neq i,k\neq j) \\ b_{ip}=a_{jp}, & b_{jp}=a_{ip} \end{cases} \quad (p=1,2\cdots,n)$$

则有

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &= -\sum_{p_1p_2\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n}(-1)^s a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 是标准顺序排列，t 是排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数，s 是排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数，由第一节定理 1.1.1 知 $(-1)^s=-(-1)^t$，故 $D_1=-D$.

推论 1 如果行列式中有两行或两列完全相同，则此行列式等于零.

证 交换行列式 D 中相同的两行(列)，则有

$$D=-D$$

故有 $D=0$.

性质 3 行列式 D 的某一行或某一列所有元素都乘同一个数 k 后记为行列式 D_1，则有 $D_1=kD$.

证 设 $D=\Delta(a_{ij})$，不妨用数 k 乘 D 的第 i 行所有元素，则有

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{i-1,p_{i-1}}(ka_{ip_i})a_{i+1,p_{i+1}}\cdots a_{np_n} \\ &= k\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} = kD \end{aligned}$$

由性质 3 及推论 1，显然有下列推论：

推论 2 行列式中某一行或某一列的所有元素的公因子可以提到行列式外面.

推论 3 行列式中如果某一行或某一列的所有元素全为零，则此行列式等于零.

推论 4 行列式中如果有两行或两列元素对应成比例，则此行列式等于零.

性质 4 行列式中如果某一行或某一列的元素都表示为两数之和，例如第 j 列的元素都是两数之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_{1j}+c_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_{2j}+c_{2j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_{nj}+c_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_{2j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & c_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & c_{2j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & c_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

此性质请读者自己证明.

性质 5 把行列式的某一行(或某一列)的各元素乘同一数后加到另一行(或另一列)对应元素上，行列式不变.

证 设 $D=\Delta(a_{ij})$，将 D 的第 j 列各元素乘同一数 k 加到第 i 列对应元素上后所得行列式记为 D_1，则由性质 4 及推论 4 得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$=D+0=D$$

利用以上性质及推论可以简化行列式计算，特别是性质 5 的应用，是计算行列式的基本方法之一.

用 $r_i(c_i)$ 表示行列式的第 i 行(第 i 列). 交换 i、j 两行(列)记作 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$；第 i 行(列)各元素乘数 k 记作 $r_i\times k(c_i\times k)$ 或 $kr_i(kc_i)$；以数 k 乘第 j 行(列)各元素后加到第 i 行(列)各对应元素上记作 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$.

例 1 计算行列式