物理类专业系列教材

物理学中的群论基础

徐建军 编著

清华大学出版社

物理类专业系列教材

物理学中的群论基础

徐建军　编著

清华大学出版社

北京

内容简介

本书为物理学中涉及的群论知识的简明教程，适合理工科各相关专业学生使用。全书共分7章，其中第1章介绍群论的基本概念，第2章讨论群的表示，第3章是群论在量子力学中的应用，第4章则是点群和空间群的介绍，第5章给出置换群的主要结果，最后两章分别是Lie群和Lie代数的初步论述。书末提供习题答案与提示，一些重要结果则以附录的形式给出。

图书在版编目(CIP)数据

物理学中的群论基础/徐建军编著. --北京：清华大学出版社，2010.9

（物理类专业系列教材）

ISBN 978-7-302-23393-0

Ⅰ.①物… Ⅱ.①徐… Ⅲ.①群论—应用—物理学—高等学校—教材 Ⅳ.①O411.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第156822号

责任编辑：邹开颜
责任校对：刘玉霞
责任印制：杨 艳
出版发行：清华大学出版社 **地 址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn **邮 编**：100084
社 总 机：010-62770175 **邮 购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：清华大学印刷厂
经 销：全国新华书店
开 本：185×260 **印 张**：14.5 **字 数**：332千字
版 次：2010年9月第1版 **印 次**：2010年9月第1次印刷
印 数：1～3000
定 价：29.00元

产品编号：032546-01

目　录

引　论

群论是现代数学的一个分支，即抽象代数学 (近世代数学) 的一部分。群论也是用来描写物理世界对称性的一个非常有用的数学工具。

自然界中有许多对称现象，例如雪花，古人很早就注意到其特殊的对称性 (见图 0.1)，两千多年前的《韩诗外传》一书中就有“凡草木花多五出，雪花独六出”的说法。古希腊学者 Pythagoras 也早在两千五百多年前就证明了正多面体只有正四面体、立方体、正八面体、正十二面体和正二十面体 5 种。正是由于人们对自然界中各种对称现象的长期观察，才逐渐产生了对称的概念。

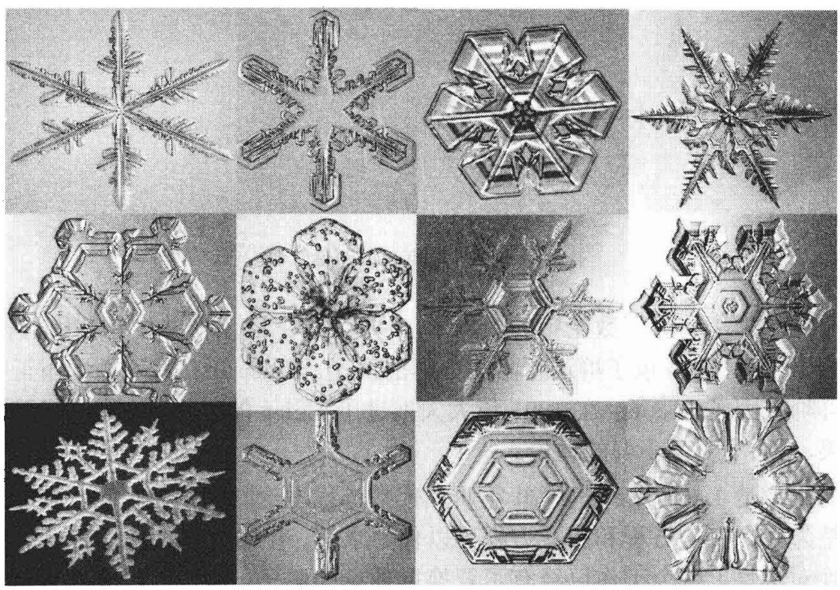

图 0.1　漂亮的雪花

群论的概念实际上主要来自于三个部分，即 19 世纪开始兴起的非欧几何、数论及 18 世纪末开始的代数方程理论研究，正是这些研究导致了置换群理论研究的开始。

几何学的研究从古希腊的 Euclid 几何开始，到 19 世纪后逐渐与直接度量分离，开始往非欧几何的方向发展，而对 n 维空间几何的研究则使数学家开始注意到几何本身的抽象性质。

Lambert，Gauss，Lobachevsky 和 János Bolyai 等人在 19 世纪开始了对非欧几何的研究，尽管当时还完全没有群的概念，但 Möbius 在 1827 年实际上已经开始了将几何按照在特定群作用下的不变量性质来进行分类的工作，Steiner 在 1832 年的工作则成为变换群理论的开端。

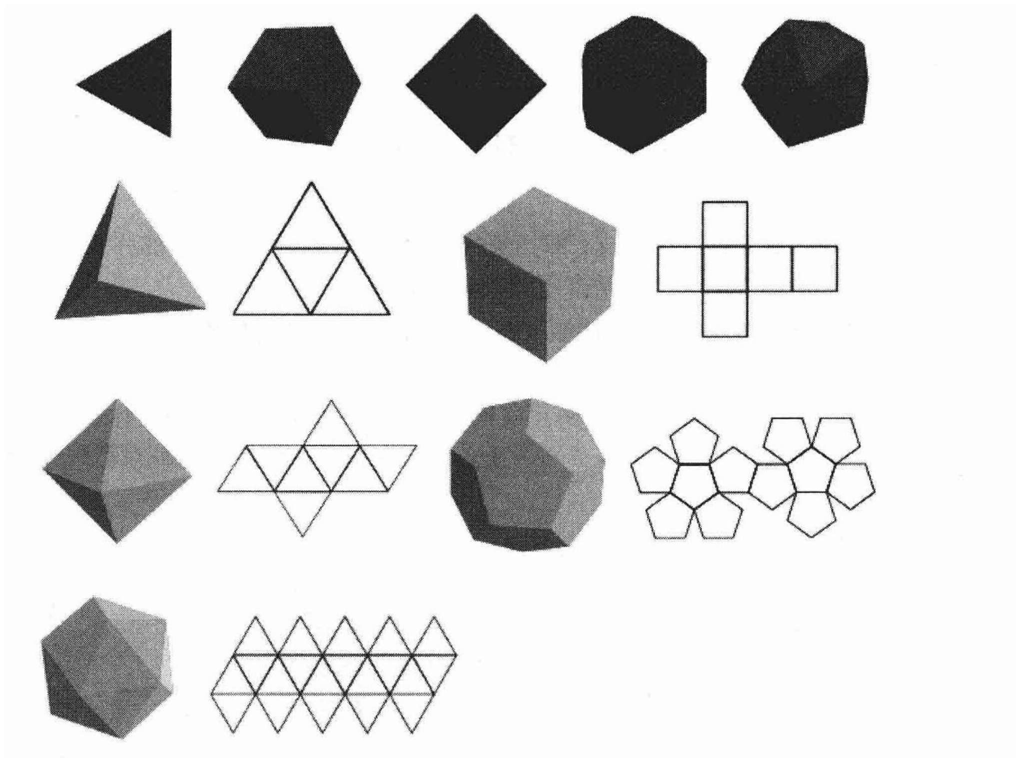

图 0.2 五种正多面体

Euler 在 1761 年研究了数论中的模算术，尽管 Euler 的工作并没有使用群论的语言，但实际上给出了 Abel 群按子群进行陪集分解的例子。Euler 还在特殊情况下证明了子群的阶数是群阶的因子。Gauss 在 1801 年大大推进了 Euler 的工作，在模算术等领域取得了显著成果，丰富了 Abel 群的理论。

置换的概念是 Lagrange 在 1770 年研究代数方程理论时提出的，他当时的主要目的是想弄清楚为什么三次方程和四次方程可以代数求解。在研究中，Lagrange 注意到了方程根的置换对称性，这个工作已经有了置换群理论的影子，但他并没有在最终的论文中提到群论。

第一个指出五次方程不能代数求解的人是 Ruffini，在 1799 年，他发表论文证明了一般的五次方程不可代数求解。Ruffini 的工作建立在 Lagrange 的基础之上，他引入了置换群的概念。

Cauchy 在发展置换群理论方面做出了很大贡献。他从 1815 年开始研究方程根的置换，到 1844 年转而研究置换本身的性质，Cauchy 还引入了循环和共轭的概念。

Galois 在 1831 年第一次认识到了代数方程的可解性和某个与方程对应的置换群的结构密切相关，即代数方程存在根式解的充要条件是所对应的群可解。他的工作是 19 世纪数学中最杰出的成就之一，Galois 理论是代数学发展中的一个里程碑。在 Galois 之前，代数学研究的中心问题是代数方程的求根问题；而在 Galois 之后，其中心问题转化为研究群、环、域等代数系统的结构与分类，这就步入了近世代数的时代。

但十分可惜，Galois 的工作在他生前无人能够理解，直到 1846 年由 Liouville 整理发表后才为世人所知。虽然 Liouville 清楚地看到了 Cauchy 的置换群理论和 Galois 工作之间的关系，但是他并没有意识到 Galois 的工作在奠定群论基础方面的重要性，而最终是由 Betti 首先看到了 Galois 关于代数方程的群就是现代意义上的置换群这个事实。

1849 年，Cayley 对群论的发展作出了重要贡献，他给出了抽象群的定义并给出了乘法表，认识到矩阵集合和四元数都可以构成群。但 Cayley 的工作超越了当时的时代，因而在当时没有产生太大的影响。1878 年后他证明了 Cayley 定理和其他许多重要结果，大大促进了群论的研究，直接引发了 Hölder 的研究工作。

Jordan 在 1865 至 1870 年间的工作真正认识到了置换群的重要意义，清晰而全面地阐述了 Galois 理论，为群论在 19 世纪最后 30 年间的发展奠定了基础。Jordan 给出了置换群的 Jordan-Hölder 定理。Hölder 在 1889 年给出了这一定理在抽象群意义下的完整证明。

Klein 在 1872 年提出了著名的 Erlangen 纲领，给出了几何学按对称群的分类，群论从此走上了数学的中心舞台。

Frobenius 及其学生 Schur 和 Kronecker 的学生 Netto 等人将群论的研究大大推进，其后 Klein 的学生 von Dyck 引进了生成元的概念，开始抽象群论的系统研究，群的表示理论应运而生。

随着 Burnside 的《有限群理论》在 1897 年的出版，真正的群论时代到来了。Heinrich Weber (Dedekind 的学生) 的两卷本《代数教程》也在 1895 年出版并成为了标准教科书。这些著作影响了几代数学家，对群论的发展起了巨大作用。

1831 年，Hessel 首次给出了 32 个三维晶格点群 (正交群 O(3) 的分立有限子群) 的分类，由格点周期性排列构成的网络具有晶格空间群对称的结论是首先由 Frankenheim 在 1835 年发现的，随后 Bravais 给出了 14 种晶格类型。Klein 建议找出所有三维空间的晶格空间群，到 1891 年，Schönflies 和 Fedorov 找到了所有的 230 个晶格空间群。在 19 世纪末，Fedorov，Schönflies 和 Barlow 给出了二维空间的 17 个空间群。

20 世纪 70 年代利用计算机证明了四维空间的空间群有 4783 个。五维以上高维空间的空间群个数还没有明确的答案，但 Bieberbach 在 1910 年证明了任意维空间的空间群数目都是有限的，这实际上是 Hilbert 在 1900 年提出的 23 个问题中第 18 个问题的一部分。

1890 年，Lie 试图将 Galois 理论推广到微分方程领域，这导致了 Lie 群和 Lie 代数理论的建立。1893 年，Lie 和 Friedrich Engel 出版了《变换群理论》。

1890 年，Killing 完成了对复单 Lie 代数的分类，他的工作在 1894 年被 Cartan 进一步推广和严格化。到 20 世纪初，Weyl 和 Cartan 开始注意到 Lie 群的整体性质，这方面的研究直到 70 年代后在纤维丛理论中有了新的发展。

Wigner 在 1930 年之前就已经阐明了群论和量子力学之间的密切联系，并将结果总结在他的名著《群论及其在原子光谱的量子力学中的应用》一书中。从此以后，现代物理学各个领域的发展都越来越关注体系蕴含的对称性所起的重要作用，Noether 定理则给出了对称性与守恒定律之间的深刻联系。

现阶段, 群论已经在几乎所有的物理学领域都得到了广泛应用，如固体物理、凝聚态物理、原子分子物理、核物理和粒子物理等，在化学和生命科学等领域也已经有了诸多应用。因此，群论现在已经成为物理系学生乃至科学工作者必不可少的一个数学工具。

本书是作者在多年来为复旦大学物理系研究生和高年级本科生开设的群论课程讲义的基础上经扩充和修改后而成的。全书共分 7 章，内容安排如下。第 1 章介绍群论的基本概念，第 2 章讨论群的表示，第 3 章是群论的初步应用，第 4 章是点群和空间群的介绍，第 5 章给出置换群的主要结果，最后两章分别是 Lie 群和 Lie 代数的讨论。书末给出了所有习题的答案或提示，一些重要结果则以附录的形式给出。

作者十分感谢复旦大学物理系多年来的培养和支持，30 多年来作者一直在这里学习和工作。作者要感谢陶瑞宝院士和胡嗣柱教授，正是他们在 20 世纪 80 年代初所开设的群论课，使作者第一次领略到了群论的无穷魅力。作者也要感谢多年来听课的学生们，他们的建议和讨论使作者获益颇多。最后要感谢清华大学出版社的邹开颜编辑，如果没有她的鼓励和帮助，本书的出版也是不可能的。

限于作者的学识水平，书中难免有错误和表达不当之处，恳请读者给予批评指正。

第1章　群论的基本概念

群论是用来描写对称性的一个非常有用的数学工具。一个物理体系的对称性往往和某种变换联系在一起，如时空平移，空间转动，Lorentz 变换，宇称变换，相位变换等。这些对称性可以是连续对称，也可以是分立对称；可以是时空对称，也可以是内部空间对称。群论揭示了体系的对称性和守恒量之间的深刻联系。本章将介绍群论的一些基本概念和基本性质。

1.1　群的定义

定义 1.1　设 G 是一个集合，在 G 上给定一个二元运算，称之为乘法运算，即给定一个映射 $G\times G\to G$，使其满足下列条件：

1. 集合 G 在乘法下是封闭的，即对任意两个元素 $g_i, g_j\in G$，有

$$g_ig_j=g_k\in G; \tag{1.1}$$

2. 乘法满足结合律，即对任意元素 $g_i, g_j, g_k\in G$，有

$$g_i(g_jg_k)=(g_ig_j)g_k; \tag{1.2}$$

3. 存在唯一的单位元 $e\in G$，对所有 $g\in G$ 满足

$$eg=ge=g; \tag{1.3}$$

4. 对每个元素 $g\in G$，都存在与之对应的唯一的逆元 $g^{-1}\in G$，满足

$$gg^{-1}=g^{-1}g=e。 \tag{1.4}$$

则称集合 G 在所给运算下构成群，这个二元运算称为群的乘法。定义中的条件称为群的公理。如果一个集合在某个乘法下构成群，那么这四条公理都必须满足。需要指出的是，所谓群的乘法不一定是普通的乘法，可以是非常一般的二元运算。

群 G 所包含的元素数目如果是有限的，则称之为有限群，如果包含的元素数目是无限的，则称之为无限群。

可以证明，条件 (1.3) 可以放宽为只要求 $eg=g$ 或 $ge=g$，条件 (1.4) 可以放宽为只要求 $g^{-1}g=e$ 或 $gg^{-1}=e$，即单位元和逆元是唯一的。下面给出一些简单例子。

例 1.1　$G_1=\{e\}$，这是最简单的只包含一个元素 (即单位元) 的平凡群。

例 1.2　$G_2=\{e,a\}$，最简单的非平凡群至少包含两个元素，其中一个必须是单位元。记另一个元素为 a，则容易推得群元之间的乘法关系

$$ae=ea=a,\quad aa=a^2=e,\quad a^{-1}=a。$$

物理上有很多只包含两个元素的对称群。例 1.2 中的元素 a 可以是宇称变换 $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$，数字 1 和 2 的置换，绕某定轴旋转 π 角等。

例 1.3 $G_3 = \{e, a, b\}$，对于包含三个元素的群，容易看到有 $ab = e$ (因为不可能有 $ab = a$ 或 $ab = b$)，因此有 $a^2 = b$ (不可能有 $a^2 = a$ 或 $a^2 = e$)，进一步有 $b^2 = a^2b = ae = a$。即

$$G_3 = \{a, b = a^2, e = ab = a^3\}。$$

注意到 1 的三次根构成的集合 $\{1, \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}, \mathrm{e}^{4\pi\mathrm{i}/3}\}$ 在普通乘法下是具有上述结构的三阶群，绕正三角形的中心轴分别转动 $\{2\pi/3, 4\pi/3, 2\pi\}$ 也构成类似的三阶群。这一结构可以推广为

$$G_n = \{a, a^2, \cdots, a^{n-1}, a^n = e\}。 \tag{1.5}$$

具有 (1.5) 式中结构的群称为循环群。下面给出几个重要定义。

定义 1.2 如果群 G 的乘法是可交换的，即对任意的 $a, b \in G$ 有 $ab = ba$，则称群 G 是 Abel 群。否则称其为非 Abel 群。

定义 1.3 如果群 G 是有限群，则 G 所包含元素的数目称为群 G 的阶。

定义 1.4 对于任意群元 $a \in G$，满足方程 $a^n = e$ 的最小正整数 n 称为群元 a 的阶。

易见，n 阶群元 a 可以生成 n 阶循环群。

例 1.4 最简单的非循环群是四阶群。四阶群 $G_4 = \{e, a, b, c\}$ 有两种结构，一种是循环群，记为

$$G_4^1 = \{a, b = a^2, c = a^3, e = a^4\},$$

其中下标 4 表示群 G 的阶数，上标 1 表示四阶群的第一种结构，后文沿用这一记号。非循环群记为 $G_4^2 = \{e, a, b, c\}$，其中群元满足下列关系：

$$a^2 = b^2 = c^2 = e, \quad ab = ba = c, \quad ac = ca = b, \quad bc = cb = a。$$

这个群可以用一个几何对称群，即 D_2 点群来具体实现。从图 1.1 中容易看到，绕相应的轴旋转 π 角将保持图形不变。

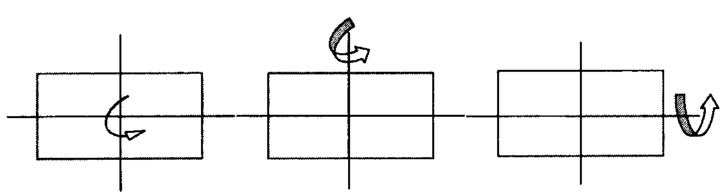

图 1.1 矩形的对称转动

例 1.5 实数集合 $\mathbf{R}$ 在普通加法下构成群，其中单位元和实数 a 的逆元分别为

$$e = 0, \quad a^{-1} = -a。$$

n 维实数空间 $\mathbf{R}^n$ 中的点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可以看成是 n 维空间中的向量，因此 n 维空间中的向量集合在向量加法下构成群。

易见，整数集合 $\mathbf{Z}$ 在普通加法下也构成群，但正整数集合 $\mathbf{Z}_+$ 在普通加法下不构成群。如果定义模 n 的加法，则集合

$$Z_n = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$$

构成群。其中当 $p+q \geqslant n$ 时定义 $p+q \equiv p+q-n$。

例 1.6　非零实数集合 $\mathbf{R}^*$ 在普通乘法下构成群，其中单位元和实数 a 的逆元分别为

$$e = 1, \quad a^{-1} = 1/a。$$

显然，非零有理数集合 $\mathbf{Q}^*$ 在普通乘法下构成群，模为 1 的复数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 在普通乘法下也构成群。

例 1.7　下列 2×2 矩阵集合在矩阵乘法下构成群：

$$g_1 = e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$g_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_8 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}。$$

由于

$$g_5 g_6 = g_2 \neq g_6 g_5 = g_3,$$

所以这是非 Abel 群。不难得到

$$g_2^2 = g_3^2 = g_4^2 = g_5^2 = g_8^2 = g_6 g_7 = g_7 g_6 = g_1 = e。$$

例 1.8　所有非奇异的 $n\times n$ 矩阵集合在矩阵乘法下构成群，其中单位元即为单位矩阵，逆元即为相应的逆矩阵。这个群通常称为一般线性变换群，记为 $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ 或 $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$。它实际上是第 6 章将要讨论的 Lie 群的一种。

1.2　子群，重排定理

最简单的非 Abel 群是六阶群。可以证明，六阶群也只有两种结构，其中一个是循环群

$$G_6^1 = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 = e\},$$

另一个是最简单的非 Abel 群 $G_6^2 = \{e, a, b, c, d, f\}$，满足关系

$$a^2 = b^2 = c^2 = e, \quad d^2 = f, \quad f^2 = d, \quad fd = df = e。$$

例 1.9　保持正三角形不变的所有转动对称变换构成六阶非 Abel 群，即点群 D_3。一共有 6 个对称操作使正三角形不变 (见图 1.2)：

e 恒等变换；

c_3^1, c_3^2 分别绕中心点 O 逆时针旋转 $2\pi/3$ 和 $4\pi/3$ 角；

c_{2x}, c_{2y}, c_{2z} 分别绕 x, y, z 轴旋转 π 角。

容易证明，这些操作是不可交换的，如 $c_3^1 c_{2x} = c_{2z} \neq c_{2x} c_3^1 = c_{2y}$ 等。

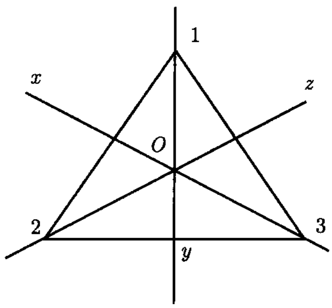

图 1.2 正三角形的对称操作

例 1.10 三个符号 1,2,3 的所有可能置换也构成六阶非 Abel 群，即置换群 S_3。我们可以将置换写成

$$\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix} = e, \quad \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix} = (12), \quad \begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix} = (23),$$
$$\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix} = (31), \begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix} = (123), \begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix} = (132),$$

其中循环记号 (123) 表示

$$1 \to 2, \quad 2 \to 3, \quad 3 \to 1。$$

置换的乘法定义为

$$(23)(132) = \begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}312\\213\end{pmatrix}\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix} = (12)。$$

容易看到，如果我们将正三角形的顶点用 1,2,3 编号，则正三角形的对称变换群就是置换群 S_3。关于置换群的详细讨论将在第 5 章进行。

定义 1.5 群 G 的子集 H 如果在和群 G 相同的乘法规则下也构成群，则称 H 为群 G 的子群。

对于任意的群 G，一阶群 $G_1 = \{e\}$ 和 群 G 本身一定是 G 的子群。除此之外的其他子群称为真子群或固有子群，简称子群。我们通常只讨论真子群。

例 1.11 四阶群 G_4^2 有 3 个子群，$H_1 = \{e, a\}$, $H_2 = \{e, b\}$, $H_3 = \{e, c\}$。这些子群的结构都和二阶群 G_2 的结构相同。

例 1.12 置换群 S_3 有 4 个子群：

$$H_1 = \{e, (12)\}, \quad H_2 = \{e, (13)\}, \quad H_3 = \{e, (23)\}, \quad H_4 = \{e, (123), (132)\}。$$

类似地，D_3 点群也有 4 个子群。下面介绍一个重要定理。

定理 1.1 (重排定理) 如果 $g \in G$ 是群 G 中的任意群元，则有

$$gG = Gg = G,$$

其中

$$gG = \{gg_i | g_i \in G\}, \quad Gg = \{g_i g | g_i \in G\}。$$

证明 对任意的 $g, g_i \in G$，我们有

$$g^{-1} \in G \quad 及 \quad g^{-1} g_i \in G。$$

这意味着可以找到另一个群元 $g_j \in G$，使得

$$g^{-1} g_i = g_j \quad 或 \quad g_i = g g_j \in gG,$$

由此得到 $G\subset gG$。类似地，对于 $gg_i\in gG$，由于 $g\in G, g_i\in G$，故

$$gg_i\in G,$$

此即 $gG\subset G$。因此有 $gG=G$。类似可以证明 $Gg=G$。

重排定理也可以表述成另一种形式：如果 $g,g_i,g_j\in G$，则由 $gg_i=gg_j$ 可以推出 $g_i=g_j$。这表示如果 g_i,g_j 是不同的群元，则 gg_i,gg_j 也一定是不同的。

重排定理虽然很简单，但它是一个很重要的定理，以后会经常用到。

考虑一个 n 阶的有限群，将其表示为

$$G=\{e=g_1,g_2,\cdots,g_n\},$$

每个群元用一个给定群元 g 左乘后得到

$$gG=\{gg_1,gg_2,\cdots,gg_n\}=\{g_{p_1},g_{p_2},\cdots,g_{p_n}\},$$

其中 $p_g=(p_1p_2\cdots p_n)$ 是序列 $1,2,\cdots,n$ 由群元 g 确定的一个置换。这样就给出了群元 $g\in G$ 和置换 $p_g=(p_1p_2\cdots p_n)$ 之间的自然映射关系。容易证明，$(12\cdots n)$ 的所有可能置换构成群，即置换群 S_n，这是 $n!$ 阶的群。

到现在为止讨论的几个六阶群都具有和抽象群 G_6^2 相同的结构，如对于 S_3，我们可以记

$$e,\quad a=(12),\quad b=(23),\quad c=(31),\quad d=(123),\quad f=(132);$$

对于群 D_3，我们可以记

$$e,\quad a=c_{2x},\quad b=c_{2y},\quad c=c_{2z},\quad d=c_3^1,\quad f=c_3^2;$$

还可以有

$$\begin{cases} e=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, & a=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}, & b=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}, \\ c=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}, & d=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}, & f=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}。\end{cases} \tag{1.6}$$

容易验证，这几个六阶群的群元之间的乘法关系都是相同的。

例 1.13　令

$$\boldsymbol{r}_n=n_1\boldsymbol{a}_1+n_2\boldsymbol{a}_2+n_3\boldsymbol{a}_3$$

为晶格向量，n_1,n_2,n_3 是任意整数，T_n 是作用在坐标函数 $f(\boldsymbol{r})$ 上的平移算符，且有

$$T_nf(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_n),$$

则集合 $\{T_n\}$ 在算符乘积意义下构成群，称为平移群。这是无限 Abel 群。

对于有限群，任意两个元素相乘的结果可以列成一个表，即所谓的乘法表。下面给出一些低阶有限群的乘法表，其中交叉位置的元素是第一列和第一行中对应元素的乘积。

G_2	e	a
e	e	a
a	a	e

G_3	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

G_4^1	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

G_4^2	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

G_6^2	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	f	b	c
b	b	f	e	d	c	a
c	c	d	f	e	a	b
d	d	c	a	b	f	e
f	f	b	c	a	e	d

1.3 共轭类，陪集

群 G 的元素可以按共轭类或者陪集进行分解。

定义 1.6 对于群 G 中的两个元素 g_i, g_j，如果存在另一个元素 $g \in G$ 使下式成立：

$$g_i = g g_j g^{-1}, \tag{1.7}$$

则称 g_i, g_j 是互相共轭的，用符号 $\sim$ 表示，记为 $g_i \sim g_j$。共轭是一种等价关系，具有下列性质：

1. 每个元素都与自身共轭，$g_i \sim g_i$；(反身性)
2. 如果 $g_i \sim g_j$，则有 $g_j \sim g_i$；(对称性)
3. 如果 $g_i \sim g_j$，$g_j \sim g_k$，则有 $g_i \sim g_k$。(传递性)

因此我们可以利用共轭关系来对群元进行分类。

定义 1.7 群 G 内彼此共轭的元素集合构成共轭类，简称类。

显然，一个群中的每个元素都属于且仅属于一个类，单位元自成一类，因为单位元只与自身共轭。通常用记号 $[g]$ 表示群元 g 所在类的元素集合。

如果群 G 是 Abel 群，则由关系

$$g g_i g^{-1} = g_i g g^{-1} = g_i, \quad g, g_i \in G$$

可知，Abel 群的每个元素都构成一个类。易见同类元素具有相同的阶。

对于矩阵群，显然所有同类的元素彼此都只相差一个相似变换。

例 1.14 置换群 S_3 有三个类：

$$[e] = \{e\}, \quad [(12)] = \{(12), (23), (31)\}, \quad [(123)] = \{(123), (132)\},$$

故可以将 S_3 群按类分解为

$$S_3 = [e] \oplus [(12)] \oplus [(123)]。$$

定义 1.8 设 $H \subset G$ 为群 G 的子群，令 $g_i \in G$, $g_i \notin H$，则集合

$$g_iH = \{g_ih |\, h \in H\}$$

称为子群 H 的左陪集。

类似地可以定义子群 H 的右陪集

$$Hg_i = \{hg_i |\, h \in H\}。$$

一般来说，左陪集不一定和相应的右陪集相同，即 $g_iH \neq Hg_i$。

除子群 H 外，陪集不是群 G 的子群。(因为没有单位元！)

例 1.15 对于六阶群 $G_6^2 = \{e, a, b, c, d, f\}$，考虑子群 $H_1 = \{e, a\}$，则有

$$bH_1 = \{b, f\}, \quad cH_1 = \{c, d\}, \quad H_1b = \{b, d\}, \quad H_1c = \{c, f\}。$$

易见

$$bH_1 \neq H_1b, \quad cH_1 \neq H_1c。$$

如果考虑子群 $H_2 = \{e, d, f\}$，则有

$$aH_2 = H_2a = \{a, b, c\}。$$

因此有陪集分解

$$\begin{aligned} G_6^2 &= H_1 \oplus bH_1 \oplus cH_1 = H_2 \oplus aH_2 \\ &= H_1 \oplus H_1b \oplus H_1c = H_2 \oplus H_2a。\end{aligned}$$

定理 1.2 子群 H 的两个左 (右) 陪集或者完全相同，或者没有相同的元素。

证明 设 gH 和 $g'H$ 为子群 H 的两个左陪集，假定这两个陪集中有一个元素是相同的，即对子群 H 中的两个元素 h_i, h_j，有

$$gh_i = g'h_j,$$

此即

$$g'^{-1}g = h_jh_i^{-1} \in H。$$

由重排定理得

$$g'^{-1}gH = h_jh_i^{-1}H = H,$$

两边乘 g' 即得

$$gH = g'H。$$

因此，如果两个陪集有一个元素是相同的，则这两个陪集一定是完全相同的。换言之，如果 $g' \in gH$，则有

$$gH = g'H。$$

这意味着陪集的代表元是可以任意选取的。给定一个 n_H 阶的子群 H，则群 G 的元素可以按子群 H 分解成 n/n_H 个不同的陪集。

定理 1.3 (Lagrange 定理) 有限群 G 的阶 n 一定能被其子群的阶 n_H 整除，即 $n/n_H = l$ 为整数，称 l 为子群 H 的指数。

证明 设子群 H 的阶为 n_H，取

$$g_1 \in G, \quad g_1 \notin H,$$

可得陪集

$$g_1 H \neq H。$$

然后取

$$g_2 \in G, \quad g_2 \notin H, \quad g_2 \notin g_1 H,$$

得到第二个陪集

$$g_2 H \neq H, \quad g_2 H \neq g_1 H。$$

继续这个过程，可以得到一系列的陪集。容易看到，所有的陪集都具有相同数目的元素，而所有的陪集都没有共同的元素。因此最后一定可以将群 G 的所有元素都划分到某一个陪集中去。即

$$G = H \oplus g_1 H \oplus g_2 H \oplus \cdots \oplus g_{l-1} H。$$

由于每个陪集都各不相同且包含的元素数目相同，因此得

$$n = n_H\, l。$$

显然，如果 n 是素数，则 l 只能是 1 或 n，这意味着素数阶的群没有真子群。

例 1.16 如果 $a \in G$，则集合

$$Z(a) = \{g | gag^{-1} = a, g \in G\}$$

是群 G 的一个子群。因为若有群元 $g \in G$ 满足

$$gag^{-1} = a,$$

即 $g \in Z(a)$，则有

$$a = g^{-1}ag = (g^{-1})a(g^{-1})^{-1},$$

即存在逆元 $g^{-1} \in Z(a)$。如果

$$gag^{-1} = a, \quad g'ag'^{-1} = a,$$

则有

$$gag^{-1} = gg'ag'^{-1}g^{-1} = (gg')a(gg')^{-1} = a,$$

此即 $gg' \in Z(a)$，封闭性满足。由 $eae^{-1} = a$ 可知存在单位元，$e \in Z(a)$。结合律显然满足，因此集合 $Z(a)$ 构成群，是群 G 的子群，通常称之为 a 在群 G 中的中心。

利用这个例子可以证明，群 G 任意一个类的元素数目是群阶的因子。