高考复习全书

# 概念方法题型解析与训练

# 数学

《高考复习全书》编写组

高 考 复 习 全 书

# 概念、方法、题型解析与训练——数学

《高考复习全书》编写组

科 学 普 及 出 版 社
·北 京·

(京)新登字026号

高考复习全书
**概念、方法、题型解析与训练——数学**
《高考复习全书》编写组
科学普及出版社出版
北京海淀区白石桥路32号　邮政编码：100081
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
北京市燕山联营印刷厂印刷
*
开本：787×1092毫米　1/32　印张：14　字数：350千字
1993年11月第1版　1993年11月第1次印刷
定价：8.40元
ISBN 7-110-02952-2/G·924

**·内 容 提 要·**

全书共21章，内容包括函数、不等式等差和等比数列、三角函数、直线与平面、多面体、转迹方程等，每章都有知识要点、例题解析、练习题及提示与答案。书中包含了高中数学的所有要点，归纳、补充和引伸了代数、三角、几何中的重点，概念分析透彻，例题讲解简明实用，富于技巧性，适合当前考试方向。

本书是广大高中学生，青年自学者及教师的数学参考书。此书专为1994年高考学生编写。

# 编 委 会



本册主要执笔　董世奎　邓　均

王建民　黄建生


责任编辑：王予南

封面设计：马　钢

正文设计：雨　田

# 前言

许多同学平时学习很努力，很扎实，但一遇到考试，成绩却往往不理想。究其原因，就是在学习尤其是复习时未能开阔思路，无法将自己所学内容灵活加以运用。基础知识是点，单掌握点是不够的，必须将它们贯穿成线，扩展成面，最终成为一个活的知识系统。这样，才能对付各种问题，在考试中考出好成绩。

本套《高考复习全书——概念、方法、题型解析与训练》就是为了满足高中学生提高应试能力尤其是高考应试能力这一要求，由北京实验中学、北大附中、北京四中、人大附中和清华附中等重点中学部分特级、一级教师在积累多年教学经验的基础上，结合当前教改方向和新大纲的要求编写完成的。本套书适合国家教委考试中心的出题范围和当前标准化考试需要。

认真阅读本套全书会使同学们更加牢固地掌握语文、数学、英语、物理、化学、历史六门课程中的知识，思考的范围更广。这套书的编写打破旧的复习参考书条框编排的限制，对高中知识结构作了合理调整，将高中知识内容加以系统化，以更适于同学全面复习的形式出现。书中概念的讲解简明、透彻，并依据各门课程的不同特点，细致剖析了解决各种类型的题目该从哪里入手、怎样做才最简捷，其方法也灵活多变。将使学生们既牢固地掌握基本知识，又能在遇到问题时不慌不乱，准确地找出结症所在。编者还针对近年来高考的出题范围精选并自拟了大量有代表性的习题，学生们可以将学到的方法灵活地实践运用，考查一下自己的复习效果。本套全书能大大提高同学们复习效果和应考能力。

# 编 者 的 话

为帮助同学们加深理解高中数学的教学内容，掌握高中数学中常用的五种方法，即配方法、换元法、待定系数法、数学归纳法和反证法，进一步体会方程、函数思想、数形结合思想、等体变换思想和分类讨论思想的重要性，提高同学们的分析问题和解决问题的技能、技巧与能力，我们根据新的教学大纲编写了此书。

我们将高中的代数、三角、解析几何、立体几何的重点和难点归纳成21章。每章的内容都在教材的基础上做了较大的补充和引伸、归纳和提高，对概念的讲解力求准确、透彻，并精选了一定数量的例题。对于重点例题，先作简明的分析，接着介绍灵活多变的解法，并有较详说明，藉以揭示一些解题规律和技巧，以便在数学方法、分析能力上给读者以启迪。每章又配备了练习题并有答案及提示。

本书可作为高一、高二同学的课外读物，也是高三同学的复习教材。本书又可供教师教学时参考。

本书分别由北大附中董世奎、邓均，中关村中学王建民、北京师大附中黄建生等老师执笔编写。由于水平有限，编写时间仓促，书中的缺点、错误在所难免，欢迎读者批评指正。

编 者

1993年5月于北大附中

# 目　　录

# 第一章　函数的基础知识

## 知 识 要 点

函数的定义。$f(x)$中"$f$"的含义复合函数、反函数。

## 例 题 选 析

### 一、函 数 定 义

函数是指从非空集合 $A$ 到非空集合 $B$上的一种映射$f$：$A\to B$。这里"上"是指集合$B$中的元素在集合$A$中都有原象，也就是说$A$中所有元素的象要充满集合$B$。这里应深刻理解函数就是揭示了两个非空集合元素间的一种特殊的对应关系，即对于集合$A$中的每一个元素$x$，在对应法则$f$的作用下，在集合$B$中都有唯一确定的元素$y$与之对应。这种集合$A$到集合$B$的特殊对应关系"$f$"，就叫做定义在$A$上的变量$x$的函数，记作$y=f(x)$。其中原象集$A$叫做函数的定义域，象集$B$叫做函数的值域。

从定义可知，对于一个函数，定义域和对应规律"$f$"一旦确定了，这个函数也就唯一的被确定了，同时，这个函数的值域也就被确定了，所以我们通常把函数的定义域和对应规律叫做函数的两大要素。从而得出，若比较两个函数是否相同，那就看这两个函数的定义域和对应规律是否相同，如果两个函数的定义域和对应规律均相同，那么这两个函数就是同一函数；否则，两个函数就不是同一个函数。例如，在$f(x)=\dfrac{x^2}{x}$和$g(x)=x$中，$f(x)$可化为$f(x)=x$，$(x\in R$ 且 $x\neq0)$。由此可

以看出，$f(x)$和$g(x)$的对应规律是相同的，但由于$f(x)$和$g(x)$的定义域不同，所以$f(x)$、$g(x)$仍表示两个不同的函数。

由于函数的值域在函数及其应用中占有重要地位，所以通常我们又把函数的定义域，对应规律和值域称为函数的三大要素。

在函数$y=f(x)$中，“$f$”的含义是作用于小括号中变量$x$的对应规律，其表示形式有三种，即(1) 图象；(2) 表标；(3) 运算及其运算规律。这样就引出了函数的三种表达形式，特别是当“$f$”表示施加于$x$上的运算及其运算规律时，这里的$x$是代表了小括号（　）这个整体，有时这个整体就是一个简单的字母$x$，有时这个整体是一个较复杂的函数式，也就是说“$f$”是施加于小括号里整数学表达式的运算及运算规律，如$f(u)=u^2+1$，则$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1$。

我们经常碰到已知$f(u)=g(x)$，其中$u=\phi(x)$，求$f(x)$的问题。

**例1** 已知$f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}$，求$f(x)$。

**分析** “$f$”是施加于$\frac{x+1}{x}$的运算及其规律，求$f$的关键就是把$\frac{x^2+1}{x^2}+1$写成关于$\frac{x+1}{x}$的表达式。

**解一** $\because$ $f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x^2+2x+1-2x}{x^2}$

$+\frac{1}{x}=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2-\frac{1}{x}=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2-\frac{x+1-x}{x}$

$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2-\frac{x+1}{x}+1$

$\therefore$ $f(x)=x^2-x+1$。

**说明** 以上方法是根据定义观察出对应规律"$f$"，称之为观察法。通常，使用换元法是发现"$f$"的常用方法。

**解二** 令$u=\dfrac{x+1}{x}$，解得$x=\dfrac{1}{u-1}$，代入原式

$$f(u)=\frac{\dfrac{1}{(u-1)^2}+1}{\dfrac{1}{(u-1)^2}}+u-1$$

整理得 $f(u)=u^2-u+1$

所以 $f(x)=x^2-x+1$。

**例2** 已知$f(10^x)=2x-3$，求$f(x)$。

**解** 令 $10^x=u$，则$x=\lg u$，代入原式

$f(u)=2\lg u-3$

所以 $f(x)=2\lg x-3$

**例3** 已知 $3f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$，求$f(x)$。

**解** 由已知可知$x\neq 0$，把原式中的$x$换成$\dfrac{1}{x}$得

$$\begin{cases}3f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f(x)=\dfrac{3}{x}\\3f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x\end{cases}\quad 解得f(x)=\frac{3(3x^2-1)}{8x}。$$

**例4** 求实系数一次函数$f(x)$，使$f[f[f(x)]]=8x+7$。

**解** 设$f(x)=ax+b(a,\ b\in R$，且$a\neq 0)$，代入$f[f[f(x)]]=8x+7$。

$a^3x+a^2b+ab+b=8x+7$

$$\therefore\begin{cases}a^3=8\\a^2b+ab+b=7\end{cases}\quad 解得\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$$

所求函数是：$f(x)=2x+1$。

**例5** 已知 $f(x)$定义域为$R$，$f(0)=1$，$f(a-b)=f(a)$

$-b(2a-b+1)$，求$f(x)$。

**解** 令$a=0$，代入原式

$f(-b)=f(0)-b(-b+1)=b^2-b+1$

令$-b=x$、$f(x)=x^2+x+1$

**说明** 求$f(x)$就是求对应规律"$f$",常用的方法有：(1) 观察法；(2) 换元法；(3) 代换消元法（如例3)；(4) 待定系数法。

## 二、布 列 函 数 式

布列函数式是巩固函数概念的很好的练习，而且是应用函数解决实际问题的关键性的一步，必须熟练掌握。

**例6** 甲以每小时6公里的速度用两小时由$A$城到达$B$城，在$B$城休息1小时后再以每小时4公里的速度返回到$A$城，试写出甲在运动过程中到$A$城的距离$s$与运动时间$t$的函数关系式，并画出图象。

**解**

$$s(t)=\begin{cases}6t, & t\in[0, 2]\\ 12, & t\in[2, 3]\\ 12-4(t-3), & t\in[3,6]\end{cases}$$

其图象见图 1-1。

**例7** 两点$M$和$N$同时从边长为1个单位长的正$\triangle ABC$的顶点$A$出发，分别以每秒1和$\frac{2}{3}$个单位长的速度沿$AB$和$AC$运动，然后分别在$B$和$C$点拐向$BC$线段，到它们相遇为止，将$M$、$N$两点间的距离$s$表示成时间$t$的函数(图 1-2)。

**解** 注意到：当$M$在$AB$上运动时，即$0\leqslant t\leqslant 1$时，计算$MN$应根据图 1-2中$\triangle AMN$；当$M$拐入$BC$，而$N$仍在$AC$上时，即$1<t\leqslant\frac{3}{2}$时，应根据$\triangle CMN$计算$MN$；当$M$、$N$均在

$BC$上运动时，则变成相向运动。所以

$$S=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{7t^2}}{3}, & (0\leqslant t\leqslant 1)\\ \sqrt{\dfrac{7}{9}t^2-3t+3}, & \left(1<t\leqslant\dfrac{3}{2}\right)\\ 3-\dfrac{5}{3}t, & \left(\dfrac{3}{2}<t\leqslant\dfrac{9}{5}\right)\end{cases}$$

**说明** 写出函数包含两层意思，一是写出函数式，二是写出定义域。

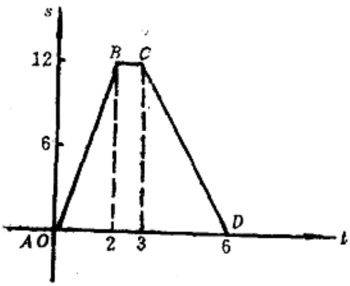


图 1-1

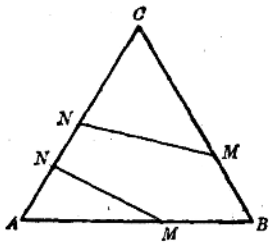


图 1-2

## 三、复 合 函 数

复合函数是高中函数中常见的，而课本中又没讲的一种很重要的函数，本书着重介绍复合函数的定义、定义域和值域的求法。

**1．复合函数的定义**

我们在课本中常见到下列一些函数：$y=(\lg x)^2$；$y=\sqrt{x^2+2x+3}$；$y=\dfrac{x}{x+1}$；……，如果我们把这些函数分解一下，不难发现它们都是用几个基本函数串联而成的。

在$y=(\lg x)^2$中，令$u=\lg x$，定义域$M=R^+$，值域为$Q=R$，则$y=u^2$，定义域为$Q=R$，值域为$G=\overline{R^-}$。于是我们可把函

数$y=(\lg x)^2$理解为它是两个基本函数$u=\lg x$和$y=u^2$通过下面的映射而得到，即对于集合$M$中的任意一个$x$值，通过对数运算，在集合$Q$中就有唯一确定的$u$与之对应；对于集合$Q$中这样一个确定的$u$，通过平方运算，在集合$G$中就有唯一确定的$y$值与$u$对应。

这样一来就有：对于集合$M$中任意的一个$x$值，通过对数运算、平方运算及变量$u$的传递，在集合$G$中就有唯一确定的$y$值与之对应，于是$y$就是$x$的函数。象这样串联而成的函数就叫做复合函数，一般定义是：

如果$y$是$u$的函数$y=f(u)$，$u\in Q$时，$y\in G$；$u$又是$x$的函数$u=g(x)$，$x\in M$时，$u\in Q$，那么对于$M$中的每一个$x$值，在法则$g$、$f$的作用下并通过变量$u$的传递，在$G$中就有唯一确定的$y$值与之对应，于是$y$也就是$x$的函数。这样串联而成的函数就叫做这两个函数的复合函数，记作$y=f[g(x)]$，其中$u=g(x)$叫做复合函数的内函数，函数$y=f(u)$叫做复合函数的外函数，集合$M$叫做复合函数的定义域，集合$G$叫做复合函数的值域（见图 1-3）。

如果函数$u=g(x)$的定义域记作$D_g$，值域记作$R_g$；函数$y=f(u)$的定义域记作$D_f$，值域记作$R_f$，那么只有当$D_f\cap R_g\neq\phi$时，两个函数才能复合，其复合函数$y=f[g(x)]$的定义域就是$R_g\cap D_f$在$D_g$中的原象集合，记作$M$，也就是定义域$M$；复合函数的值域就是$R_g\cap D_f$在$R_f$中的象集，如图 1-4 所示。

一般情况下，复合函数的定义域是内函数在复合前的定义域$D_g$的子集，求出这子集的方法是由满足$u\in D_f$的不等式求出相应的$x$值的集合，例如，$y=f(u)$的定义域设为$4\leqslant u\leqslant 9$，函数$u=g(x)=x^2$的定义域为$R$，值域为$\overline{R^-}$，其复合函数$y=f(x)^2$的定义域由$4\leqslant x^2\leqslant 9$求得$2\leqslant x\leqslant 3$或$-3\leqslant x\leqslant -2$，即$x\in[-3,\ -2]\cup[2,\ 3]$。基于这样一种理解，一些求复合函

数外函数的题就不再求出由内函数值域确定的定义域，如例1和例2。

**例8** 求出下列函数的定义域：

(1) $y=\lg\frac{1}{x}$；　　(2) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+2}$.

**解** 对(1)，所求定义域由下列不等式确定。

$\lg\frac{1}{x}>0$，　∴　$\frac{1}{x}>1$，∴　$0<x<1$，即所求。

对(2)，所求定义域由下列不等式确定。

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+2\geqslant 0$$

∴　$\log\frac{1}{2}(x-1)\geqslant -2$

∴　$0<x-1\leqslant 4$　∴　$1<x\leqslant 5$.

所求定义域为$x\in(1,\ 5]$。

**说明** 通过上面例题得出的复合函数定义域的求法就是根据外函数的要求布列关于内函数的不等式解之即可。

**2. 复合函数值域的求法**

**例9** 求下列函数的值域：

(1) $y=\log_2(-x^2-x+6)$；　(2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x}$

**解** 对(1)，由$-x^2-x+6>0$，求得$-3<x<2$。

令$u=-x^2-x+6=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}\leqslant\frac{25}{4}$

∴　$-3<x<2$时有

$$0<u\leqslant\frac{25}{4}$$

∴　$-\infty<\log_2(-x^2-x+6)\leqslant\log_2\frac{25}{4}$

即所求值域是 $y\in\left(-\infty,\ \log_2\frac{25}{4}\right]$.

对(2)，令　$u=x^2-2x$，$x\in R$。则$y=\left(\frac{1}{3}\right)^u$

$\because$　$x\in R$

$\therefore$　$u=x^2-2x=(x-1)^2-1\geqslant-1$，即$u\in[-1, +\infty)$

又　$y=\left(\frac{1}{3}\right)^u$在$[-1, +\infty)$上递减，

$\therefore$　$0<\left(\frac{1}{3}\right)^u\leqslant\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$\therefore$　$0<y\leqslant3$

所求值域为$y\in(0, 3]$。

**说明**　由此例可知求复合函数的基本方法是：先求出函数的定义域，然后求出内函数的值域，根据内函数的值域再求出外函数值域即可。

**例10**　求下列函数的值域：

(1) $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$；　(2) $y=\dfrac{x^2+x}{x^2+x-2}$；

(3) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+4}$。

上述三题初看起来不易发现是复合函数，仔细观察，经过变形即可发现其复合过程。

**解**　对(1)，$y=\dfrac{\sqrt{x}-1+2}{1-\sqrt{x}}=-1+\dfrac{2}{1-\sqrt{x}}$，

函数定义域为$[0, 1)\cup(1, +\infty)$。

$\therefore\sqrt{x}\in[0, 1)\cup(1, +\infty)$

$\therefore$　$-\sqrt{x}\in(-1, 0]\cup(-\infty, -1)$

$\therefore$　$1-\sqrt{x}\in(0, 1]\cup(-\infty, 0)$

$\therefore$　$\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\in[1, +\infty)\cup(-\infty, 0)$

$\therefore$　$-1+\dfrac{2}{1-\sqrt{x}}\in[1, +\infty)\cup(-\infty, -1)$

所求值域是$y\in(-\infty, -1)\cup[1, +\infty)$。

**说明** 复合函数值域基本求法可进一步概括为：从定义域出发，由里往外逐层求出每层内函数的值域，直到最外层的函数为止，即所求复合函数的值域。如果某层内函数值域较易求出，也可以由此出发求出复合函数值域。

对(2)，$y=\dfrac{x^2+x-2+2}{x^2+x-2}=1+\dfrac{2}{x^2+x-2}$

令$u=x^2+x-2$，显然$u\neq0$，

且 $u=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}\geqslant-\dfrac{9}{4}$

$\therefore\quad u\in\left[-\dfrac{9}{4}, 0\right)\cup(0, +\infty)$

$\therefore\quad \dfrac{1}{u}\in\left(-\infty, -\dfrac{4}{9}\right]\cup(0, +\infty)$

$\therefore\quad \dfrac{2}{u}\in\left(-\infty, -\dfrac{8}{9}\right]\cup(0, +\infty)$

$\therefore\quad 1+\dfrac{2}{u}\in\left(-\infty, \dfrac{1}{9}\right]\cup(1, +\infty)$

所求值域为 $y\in\left(-\infty, \dfrac{1}{9}\right]\cup(1, +\infty)$。

对（3） $y=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-4)(x-1)}=\dfrac{x+1}{x-4}$

$$=1+\frac{5}{x-4}\ (x\neq1)$$

函数定义域为$x\in R$且$x\neq4$且$x\neq1$，即

$x\in(-\infty, 1)\cup(1, 4)\cup(4, +\infty)$

$\therefore\quad x-4\in(-\infty, -3)\cup(-3, 0)\cup(0, +\infty)$

$\therefore\quad \dfrac{1}{x-4}\in\left(-\dfrac{1}{3}, 0\right)\cup\left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right)\cup(0, +\infty)$

$\therefore\quad \dfrac{5}{x-4}\in\left(-\dfrac{5}{3}, 0\right)\cup\left(-\infty, -\dfrac{5}{3}\right)\cup(0, +\infty)$