



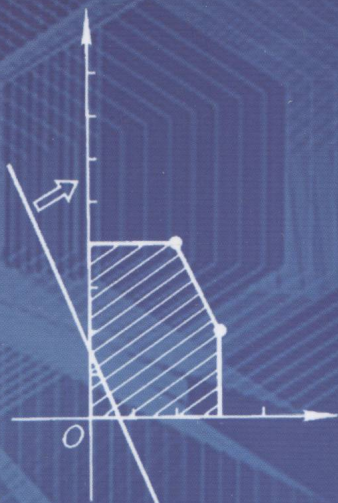
教育部高等农林院校理科基础课程
教学指导委员会推荐示范教材

线性代数

S

● 惠淑荣 张万琴 主编

Linear Algebra
Linear Algebra
Linear Algebra



中国农业大学出版社

ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE



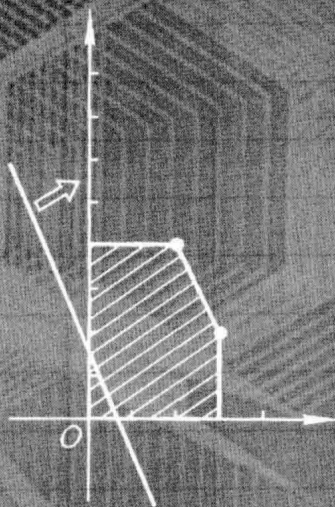
教育部高等农林院校理科基础课程
教学指导委员会推荐示范教材

线性代数

● 惠淑荣 张万琴 主编

Linear Algebra

华南农业大学
图书馆藏书



中国农业大学出版社

ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/惠淑荣,张万琴主编. —北京:中国农业大学出版社,2009.12
ISBN 978-7-81117-909-5

I. 线… II. ①惠…②张… III. 线性代数-高等学校-教材 IV. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 217661 号

书 名 线性代数

作 者 惠淑荣 张万琴 主编

策划编辑 董夫才 赵 中

封面设计 郑 川

出版发行 中国农业大学出版社

社 址 北京市海淀区圆明园西路 2 号

电 话 发行部 010-62731190,2620

编辑部 010-62732617,2618

网 址 <http://www.cau.edu.cn/caup>

经 销 新华书店

印 刷 涿州市星河印刷有限公司

版 次 2009 年 12 月第 1 版 2009 年 12 月第 1 次印刷

规 格 787×1 092 16 开本 9.75 印张 238 千字

定 价 17.00 元

责任编辑 冯雪梅

责任校对 陈 莹 王晓凤

邮政编码 100193

读者服务部 010-62732336

出 版 部 010-62733440

e-mail cbsszs @ cau.edu.cn

图书如有质量问题本社发行部负责调换

主 编 惠淑荣 张万琴

副主编 杜世平 郭亚军 戴云仙 李 强 王 倩 沈陆明

参编人员(以姓氏拼音顺序排列)

戴云仙 (内蒙古农业大学)

杜世平 (四川农业大学)

付玖春 (内蒙古农业大学)

郭亚军 (河北科技师范学院)

惠淑荣 (沈阳农业大学)

李 强 (南京农业大学)

刘宪敏 (沈阳农业大学)

马宝林 (河南科技学院)

沈陆明 (湖南农业大学)

王 倩 (沈阳农业大学)

王莉莉 (四川农业大学)

张万琴 (河南科技学院)

郑国萍 (河北科技师范学院)

**教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会
推荐示范教材编审指导委员会**

主 任 江树人

副主任 杜忠复 程备久

委 员(以姓氏笔画为序)

王来生 王国栋 方炎明 李宝华 张文杰 张良云
杨婉身 吴 坚 陈长水 林家栋 周训芳 周志强
高孟宁 戚大伟 梁保松 曹 阳 焦群英 傅承新

**教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会
推荐数学类示范教材编审指导委员会**

主 任 高孟宁

委 员(以姓氏笔画为序)

王来生 石 峰 卢恩双 吴 坚 杜忠复 张良云
杜晓林 孟 军 房少梅 梁保松 惠淑荣

出版说明

在教育部高教司农林医药处的关怀指导下,由教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会(以下简称“基础课教指委”)推荐的本科农林类专业数学、物理、化学基础课程系列示范性教材现在与广大师生见面了。这是近些年全国高等农林院校为贯彻落实“质量工程”有关精神,广大一线教师深化改革,积极探索加强基础、注重应用、提高能力、培养高素质本科人才的立项研究成果,是具体体现“基础课教指委”组织编制的相关课程教学基本要求的物化成果。其目的在于引导深化高等农林教育教学改革,推动各农林院校紧密联系教学实际和培养人才需求,创建具有特色的数理化精品课程和精品教材,大力提高教学质量。

课程教学基本要求是高等学校制定相应课程教学计划和教学大纲的基本依据,也是规范教学和检查教学质量的依据,同时还是编写课程教材的依据。“基础课教指委”在教育部高教司农林医药处的统一部署下,经过批准立项,于2007年底开始组织农林院校有关数学、物理、化学基础课程专家成立专题研究组,研究编制农林类专业相关基础课程的教学基本要求,经过多次研讨和广泛征求全国农林院校一线教师意见,于2009年4月完成教学基本要求的编制工作,由“基础课教指委”审定并报教育部农林医药处审批。

为了配合农林类专业数理化基础课程教学基本要求的试行,“基础课教指委”统一规划了名为“教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会推荐示范教材”(以下简称“推荐示范教材”)。“推荐示范教材”由“基础课教指委”统一组织编写出版,不仅确保教材的高质量,同时也使其具有比较鲜明的特色。

一、“推荐示范教材”与教学基本要求并行 教育部专门立项研究制定农林类专业理科基础课程教学基本要求,旨在总结农林类专业理科基础课程教育教学改革经验,规范农林类专业理科基础课程教学工作,全面提高教育教学质量。此次农林类专业数理化基础课程教学基本要求的研制,是迄今为止参与院校和教师最多、研讨最为深入、时间最长的一次教学研讨过程,使教学基本要求的制定具有扎实的基础,使其具有很强的针对性和指导性。通过“推荐示范教材”的使用推动教学基本要求的试行,既体现了“基础课教指委”对推行教学基本要求的决心,又体现了对“推荐示范教材”的重视。

二、规范课程教学与突出农林特色兼备 长期以来各高等农林院校数理化基础课程在教学计划安排和教学内容上存在着较大的趋同性和盲目性,课程定位不准,教学不够规范,必须科学地制定课程教学基本要求。同时由于农林学科的特点和专业培养目标、培养规格的不同,对相关数理化基础课程要求必须突出农林类专业特色。这次编制的相关课程教学基本要求最大限度地体现了各校在此方面的探索成果,“推荐示范教材”比较充分反映了农林类专业教学改革的新成果。

三、教材内容拓展与考研统一要求接轨 2008年教育部实行了农学门类硕士研究生统一入学考试制度。这一制度的实行,促使农林类专业理科基础课程教学要求作必要的调整。“推荐示范教材”充分考虑了这一点,各门相关课程教材在内容上和深度上都密切配合这一考试制度的实行。

四、多种辅助教材与课程基本教材相配 为便于导教导学导考,我们以提供整体解决方案的模式,不仅提供课程主教材,还将逐步提供教学辅导书和教学课件等辅助教材,以丰富的教学资源充分满足教师和学生的需求,提高教学效果。

乘着即将编制国家级“十二五”规划教材建设项目之机,“基础课教指委”计划将“推荐示范教材”整体运行,以教材的高质量 and 新型高效的运行模式,力推本套教材列入“十二五”国家级规划教材项目。

“推荐示范教材”的编写和出版是一种尝试,赢得了许多院校和老师的参与和支持。在此,我们衷心地感谢积极参与的广大教师,同时真诚地希望有更多的读者参与到“推荐示范教材”的进一步建设中,为推进农林类专业理科基础课程教学改革,培养适应经济社会发展需要的基础扎实、能力强、素质高的专门人才做出更大贡献。

中国农业大学出版社

2009年8月

前 言

本书是教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会组织编写的理科基础课程推荐示范教材,根据教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会制定的《普通高等学校农林类专业数理化基础课程教学基本要求》编写而成。

在编写过程中,既注重线性代数课程本身结构的科学性、系统性、严谨性,又深入浅出、通俗易懂,同时突出有关理论、方法的应用。在例题与习题的选择上注重典型性和代表性,旨在提高学生的计算和解决实际问题的能力。书中还附有相关数学家简介及用 Matlab 软件解决线性代数问题等内容。与本教材配套的还有学习指导和电子教案。

全书内容包括行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、相似矩阵与二次型。

书中标有 * 号的部分,教师可根据学时等情况酌情选讲。

本书的编写分工为:主编惠淑荣(沈阳农业大学)、张万琴(河南科技学院)负责全书的总体设计、统稿及部分章节的编写;副主编杜世平(四川农业大学)、郭亚军(河北科技师范学院)、戴云仙(内蒙古农业大学)、李强(南京农业大学)、王倩(沈阳农业大学)、沈陆明(湖南农业大学)负责部分章节的编写;参加编写的还有王莉莉(四川农业大学)、付玖春(内蒙古农业大学)、刘宪敏(沈阳农业大学)、郑国萍(河北科技师范学院)、马宝林(河南科技学院)。

编者对中国农业大学出版社为本书编写和出版所做的工作表示衷心感谢。

由于编者水平有限,书中疏漏和不足之处在所难免,恳请读者批评指正。

编者

2009 年 11 月

C 目录

CONTENTS

第 1 章 行列式	1
§ 1.1 n 阶行列式	1
1.1.1 二、三阶行列式	1
1.1.2 n 阶行列式	4
【习题一】	7
§ 1.2 行列式的性质	8
【习题二】	11
§ 1.3 行列式的计算	12
1.3.1 行列式的计算	12
1.3.2 拉普拉斯定理	20
【习题三】	22
§ 1.4 克莱姆法则	24
【习题四】	27
【自测题一】	27
第 2 章 矩阵	31
§ 2.1 矩阵的概念	31
2.1.1 矩阵的定义	31
2.1.2 几种重要矩阵	32
【习题一】	33
§ 2.2 矩阵的运算	34
2.2.1 矩阵的线性运算	34
2.2.2 矩阵与矩阵的乘法	35
2.2.3 方阵的幂与方阵的多项式	38
2.2.4 矩阵的转置	38
2.2.5 方阵的行列式	39

【习题二】	40
§ 2.3 逆矩阵	42
2.3.1 逆矩阵的概念	42
2.3.2 逆矩阵存在的条件与求法	42
2.3.3 逆矩阵的运算性质	46
【习题三】	47
§ 2.4 分块矩阵	48
2.4.1 分块矩阵的概念	48
2.4.2 分块矩阵的运算	49
【习题四】	54
【自测题二】	54
 第 3 章 向量组的线性相关性	56
§ 3.1 n 维向量及其运算	56
【习题一】	57
§ 3.2 向量组的线性相关性	58
3.2.1 线性组合	58
3.2.2 线性相关性	59
【习题二】	62
§ 3.3 矩阵的秩与向量组的秩	63
【习题三】	66
§ 3.4 矩阵的初等变换与初等矩阵	66
3.4.1 矩阵的初等变换	66
3.4.2 初等矩阵	68
§ 3.5 向量空间	72
【习题四】	72
【自测题三】	73
 第 4 章 线性方程组	75
§ 4.1 齐次线性方程组	75
4.1.1 齐次线性方程组解的判定	75
4.1.2 齐次线性方程组的解空间	79
4.1.3 齐次线性方程组的基础解系	79
【习题一】	84
§ 4.2 非齐次线性方程组	85
4.2.1 非齐次线性方程组有解的条件	87
4.2.2 非齐次线性方程组解的结构	89
【习题二】	93



【自测题四】	94
第 5 章 相似矩阵与二次型	98
§ 5.1 正交矩阵与正交变换	98
5.1.1 向量的内积	98
5.1.2 向量组的正交化	99
5.1.3 正交矩阵与正交变换	100
【习题一】	101
§ 5.2 方阵的特征值与特征向量	102
5.2.1 特征值与特征向量	102
5.2.2 实对称矩阵的特征值、特征向量的性质	105
【习题二】	106
§ 5.3 实对称矩阵的对角化	106
5.3.1 相似矩阵	107
5.3.2 实对称矩阵的对角化	107
【习题三】	113
§ 5.4 二次型及其标准形	114
5.4.1 二次型与矩阵	114
5.4.2 用正交变换化二次型为标准形	116
5.4.3 用配方法化二次型为标准形	118
【习题四】	121
§ 5.5 正定二次型	121
5.5.1 惯性定律	121
5.5.2 正定二次型	122
【习题五】	128
【自测题五】	128
习题答案	130
参考文献	141

行列式是线性代数中的一个重要概念,也是一个有用的工具.行列式起源于解 n 元线性方程组,它是研究线性代数的一个重要工具,被广泛地应用到物理、工程技术等多个领域.本章从二元与三元一次线性方程组入手,引入二阶与三阶行列式的概念,并用递推法将概念推广到 n 阶行列式,然后介绍行列式的性质、行列式的计算以及一些技巧,最后介绍克莱姆法则.

§ 1.1 n 阶行列式

1.1.1 二、三阶行列式

设二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases} \quad (1.1)$$

这里 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ 均为常数, x_1, x_2 为未知量.用加减消元法求解

$(1) \times a_{22} - (2) \times a_{12}, (2) \times a_{11} - (1) \times a_{21}$, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 则方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

定义 1 2^2 个数 $a_{ij} (i, j=1, 2)$ 排成两行两列(横排称为行,竖排称为列)的数表

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \quad (1.2)$$

表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为数表 (1.2) 所确定的二阶行列式, 记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

数 a_{ij} ($i, j=1, 2$) 叫做行列式 (1.3) 的元素. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标, 第二个下标 j 称为列标, a_{ij} 表明该元素位于行列式的第 i 行第 j 列.

若将 a_{11}, a_{22} 两个数构成的对角线叫主对角线, 将 a_{12}, a_{21} 构成的对角线叫副对角线, 则二阶行列式展开式等于主对角线两个元素的乘积减去副对角线两个元素的乘积.

按二阶行列式的定义, 二元一次线性方程组的求解公式可以写成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则二元一次线性方程组的解可写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

其中行列式 D 叫方程组 (1.1) 的系数行列式, D_1 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中第一列所得到的二阶行列式, D_2 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中第二列得到的二阶行列式.

例 1 求解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$$

解 计算行列式的值

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10 \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7.$$

所以方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{2}{10} = 0.2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{7}{10} = 0.7.$$

其次, 讨论三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & (3) \end{cases} \quad (1.4)$$

的解.

$$\begin{aligned}
 & (1) \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - (2) \times \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (3) \times \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \text{消去 } x_2, x_3, \text{得} \\
 & \left[a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \times \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \times \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \right] x_1 \\
 & = b_1 \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_2 \times \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_3 \times \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

当 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$ 时, 可解出 x_1 为

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} b_3 + a_{13} b_2 a_{32} - b_1 a_{23} a_{32} - a_{12} b_2 a_{33} - a_{13} a_{22} b_3}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}}$$

同理可解出 x_2, x_3 的表达式

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \frac{a_{11} b_2 a_{33} + b_1 a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} b_3 - a_{11} a_{23} b_3 - b_1 a_{21} a_{33} - a_{13} b_2 a_{31}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}} \\
 x_3 &= \frac{a_{11} a_{22} b_3 + a_{12} b_2 a_{31} + b_1 a_{21} a_{32} - a_{11} b_2 a_{32} - a_{12} a_{21} b_3 - b_1 a_{22} a_{31}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}}
 \end{aligned}$$

定义 2 用 $3^2=9$ 个数排成的 3 行 3 列的数表

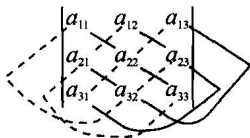
$$\begin{array}{ccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33}
 \end{array} \quad (1.5)$$

组成的记号

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
 &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}
 \end{aligned}$$

称为三阶行列式, 右端称为三阶行列式的展开式; 横排称为行, 竖排称为列, 数 a_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) 叫做行列式的第 i 行第 j 列元素.

由定义可以看出, 一个三阶行列式是由不同行不同列的三个数相乘得到的 6 项的代数和, 这些项前面所带的正负号可以从下图看出, 凡是实线上 3 个元素相乘所得项的前面带正号; 虚线上 3 个元素相乘所得项的前面带负号, 称为三阶行列式展开式的对角线法则.



若令



$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

则由三阶行列式定义知方程组(1.4)的解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

称 D 为方程组(1.4)的系数行列式.

例 2 计算三阶行列式的值

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{解} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 1 - 1 = 4.$$

1.1.2 n 阶行列式

为了定义 n 阶行列式, 引进余子式和代数余子式的概念. 由三阶行列式与二阶行列式的定义可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

上式表明, 三阶行列式等于它的第一列每个元素分别乘一个二阶行列式的代数和.

在三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中, 把元素 a_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$) 所在的第 i 行元素与第 j 列元素划掉, 剩下的元素按原来位置所构成的二阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式, 记为 M_{ij} , 称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式, 记为 A_{ij} , 即 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

上述计算式中 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 为元素 a_{11} 的余子式, $(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 为元素 a_{11} 的代数余子式, 同理可知 $-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 为元素 a_{21} 的代数余子式, $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ 为元素 a_{31} 的代数余子式. 则三阶行列式 D 的值等于它的第一列每个元素与其对应的代数余子式的乘积之

和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

类似地,可定义四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} \quad (1.6)$$

其中(1.6)式右端的 A_{i1} ($i=1,2,3,4$) 是四阶行列式 D 中元素 a_{i1} ($i=1,2,3,4$) 的代数余子式. 例如

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

用递推的方法给出 n 阶行列式的定义.

定义 3 设有 n^2 个元素 a_{ij} ($i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,n$) 排成 n 行 n 列的算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 简记为 $\det(a_{ij})$. 数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素, 其中横排称为行, 纵排称为列.

定义 n 阶行列式的值为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1} \quad (1.7)$$

其中 A_{i1} 为 n 阶行列式第一列元素 a_{i1} ($i=1,2,\dots,n$) 的代数余子式, 即

$$A_{i1} = (-1)^{i+1} M_{i1} = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (i=1,2,\dots,n).$$



也称(1.7)式为 n 阶行列式 D 按第一列元素的展开式.

注 当 $n=1$ 时, 一阶行列式 $|a|=a$, 注意不要与绝对值符号相混淆.

例 3 计算四阶行列式的值 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解 由 4 阶行列式的定义, 得

$$\begin{aligned} D &= 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \\ &\quad 2 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 - 0 - 6 + 1 = -4. \end{aligned}$$

例 4 计算上三角形行列式

(当 $i > j$ 时, $a_{ij} = 0$, 即主对角线左下方的元素全为零)

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 由 n 阶行列式的定义, 得

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \cdots = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. \end{aligned}$$

上面用第一列的展开式定义了 n 阶行列式的值, 下述定理表明, 按第一行展开有相同的结果.

定理 1 n 阶行列式的值等于它的第一行的每个元素与其相应的代数余子式乘积之和. 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \quad (1.8)$$