高职高专教材

高等数学

Gaodeng shuxue

王海舟　郭　君　主编

高职高专教材

高等数学

王海舟　郭　君　主编

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 王海舟，郭君主编. -- 北京 ：人民邮电出版社，2010.10
高职高专教材
ISBN 978-7-115-23750-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… ②郭… Ⅲ. ①高等数学－高等学校：技术学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第160910号

内容提要

本书是高职高专院校适用的高等数学教材。本教材在内容的组织和结构设计上注重循序渐进的原则，精心设计内容，大胆改革创新，在保证主线完整的前提下，删除一些较难的、不必要的内容，使其符合高职高专教学与学生学习的特点。在例题、习题的选择安排上，都围绕理解基本概念、掌握基本运算方法为目标展开。语言表达通俗易懂，有利于学生课后阅读和进一步提高训练。

本教材共分为十章，包括一元函数微积分学、多元函数微积分学、空间解析几何与向量代数、常微分方程及无穷级数等内容。在每章内容之后，都精选了一套复习题，可供学生复习、自测使用。

高职高专教材

高等数学

◆ 主　编　王海舟　郭　君
责任编辑　丁金炎
执行编辑　郑奎国

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街14号
邮编　100061　电子函件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
中国铁道出版社印刷厂印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：16
字数：388千字　　2010年10月第1版
印数：1－3 000册　　2010年10月北京第1次印刷

ISBN 978-7-115-23750-7

定价：29.00元

读者服务热线：(010)67132746　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

前　言

为了适应我国高等职业教育的迅速发展，我们以教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》为依据，以培养学生必要的数学素养为前提，按照“必需、够用为度”的教学原则，结合高职高专学制短、学时少的教学特点，编写了本教材。

本教材注重由实际问题引入概念，重视数学在实践中的应用，强化了学生对数学的应用知识，激发其学习兴趣，从而有利于促进应用能力的提高。

本教材在内容的组织和结构设计上注重循序渐进的原则，语言表达通俗易懂，有利于学生课后阅读和进一步的提高训练。编者精心设计的内容，大胆改革创新，在保证主线完整的前提下，删除一些较难的、不必要的内容，使其符合高职高专教学与学生学习的特点。在例题、习题的选择安排上，都围绕理解基本概念、掌握基本运算方法为目标展开。

本教材不注重数学概念的严密推理，避免繁杂的理论证明，对有利于培养学生思维能力的定理证明或说明，尽可能做到表达确切、思维清晰，使学生从已有的知识当中理解其来龙去脉，并获得解决问题的能力。使数学教育不仅具备工具功能，还具备思维训练、综合素质提高的功能。

全书共分为十章，分别为函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，空间解析几何与向量代数，多元函数微分学，二重积分，无穷级数。在每章内容之后，都精选了一套复习题，可供学生复习、自测使用。

本教材参考学时为72～144学时，适用于高职高专理工科类、经管类等专业的学生，同时也可供自学者使用。

本教材由硅湖职业技术学院王海舟、郭君老师主编。第一、二、三、六章由郭君编写，第四、五、七、八、九、十章由王海舟编写。教材在编写过程中还得到了数学教研室其他同仁的大力支持，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，时间也比较仓促，书中难免有不当之处，我们衷心地希望得到专家、同行及读者的批评指正，使本教材在教学实践中得以不断完善。

编　者

目　　录

第一章　函数、极限与连续 …… 1

第一节　函数 …… 1

习题 1-1 …… 10

第二节　建立函数关系 …… 10

习题 1-2 …… 13

第三节　极限的概念 …… 14

习题 1-3 …… 19

第四节　极限的运算 …… 19

习题 1-4 …… 26

第五节　函数的连续性 …… 27

习题 1-5 …… 33

复习题一 …… 33

第二章　导数与微分 …… 36

第一节　导数的概念 …… 36

习题 2-1 …… 42

第二节　导数的基本公式与运算法则 …… 42

习题 2-2 …… 46

第三节　几类特殊求导法 …… 47

习题 2-3 …… 50

第四节　高阶导数 …… 50

习题 2-4 …… 52

第五节　函数的微分 …… 52

习题 2-5 …… 56

复习题二 …… 56

第三章　导数的应用 …… 59

第一节　微分中值定理与洛必达法则 …… 59

习题 3-1 …… 65

第二节　函数的单调性与极值 …… 65

习题 3-2 …… 70

第三节　最大值与最小值问题 …… 70

习题 3-3 …… 73

第四节　曲线的凹凸性与拐点 ……73
习题 3-4 ……75
第五节　函数图形的描绘 ……75
习题 3-5 ……78
第六节　导数在实际问题中的应用 ……78
习题 3-6 ……83
复习题三 ……84

第四章　不定积分 ……86

第一节　不定积分的概念与性质 ……86
习题 4-1 ……91
第二节　换元积分法 ……91
习题 4-2 ……99
第三节　分部积分法 ……99
习题 4-3 ……103
复习题四 ……103

第五章　定积分及其应用 ……106

第一节　定积分的概念与性质 ……106
习题 5-1 ……112
第二节　微积分基本定理 ……113
习题 5-2 ……116
第三节　定积分的换元与分部积分法 ……117
习题 5-3 ……120
第四节　广义积分 ……120
习题 5-4 ……123
第五节　定积分的几何应用 ……123
习题 5-5 ……128
复习题五 ……129

第六章　常微分方程 ……131

第一节　微分方程的基本概念 ……131
习题 6-1 ……133
第二节　一阶微分方程 ……133
习题 6-2 ……138
第三节　可降阶的二阶微分方程 ……139
习题 6-3 ……140
第四节　二阶线性微分方程 ……140
习题 6-4 ……147

复习题六 ······ 148

第七章　空间解析几何与向量代数 ······ 150

第一节　二阶及三阶行列式　空间直角坐标系 ······ 150
习题 7-1 ······ 153
第二节　向量及其坐标表示 ······ 154
习题 7-2 ······ 157
第三节　向量的数量积与向量积 ······ 157
习题 7-3 ······ 161
第四节　平面及其方程 ······ 161
习题 7-4 ······ 164
第五节　空间直线及其方程 ······ 164
习题 7-5 ······ 166
复习题七 ······ 167

第八章　多元函数微分学 ······ 169

第一节　多元函数的基本概念 ······ 169
习题 8-1 ······ 174
第二节　偏导数 ······ 174
习题 8-2 ······ 177
第三节　全微分 ······ 178
习题 8-3 ······ 180
第四节　多元复合函数和隐函数的求导法则 ······ 180
习题 8-4 ······ 184
第五节　多元函数的极值 ······ 184
习题 8-5 ······ 188
复习题八 ······ 188

第九章　二重积分 ······ 190

第一节　二重积分的概念与性质 ······ 190
习题 9-1 ······ 193
第二节　二重积分的计算 ······ 194
习题 9-2 ······ 200
复习题九 ······ 201

第十章　无穷级数 ······ 203

第一节　数项级数的概念与性质 ······ 203
习题 10-1 ······ 207
第二节　数项级数及其审敛法 ······ 207

习题 10-2 ········ 211
第三节　幂级数 ········ 211
习题 10-3 ········ 217
第四节　函数的幂级数展开 ········ 217
习题 10-4 ········ 222
复习题十 ········ 222

附录一　常用数学公式 ········ 224

附录二　希腊字母表 ········ 228

习题参考答案 ········ 229

参考文献 ········ 248

第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学的主要研究对象，它用来描述事物变化过程中变量之间的依赖关系。极限是贯穿高等数学始终的一个非常重要的概念，微积分的重要概念几乎都是通过极限定义的。连续是函数的重要性态，连续函数是高等数学主要讨论的函数类型。本章将介绍函数、极限与连续的概念和基本知识，为后续知识的学习奠定坚实的基础。

本章要求：

了解区间与邻域的定义；理解函数的概念，了解分段函数；能熟练地求函数的定义域和函数值；了解函数的主要性质（单调性、奇偶性、周期性和有界性）；掌握六类基本初等函数的解析表达式、定义域、主要性质和图形；了解复合函数、反函数、初等函数的概念；能熟练地将复合函数分解成简单函数；了解常用的经济函数；会利用函数的概念建立简单的函数关系。

了解极限的思想，了解极限、左右极限的概念；了解无穷小量的概念，了解无穷小量的运算性质及其与无穷大量的关系，以及无穷小量比较；掌握极限的四则运算法则；知道极限存在的两个准则，会用两个重要极限求极限；了解函数连续性的定义，会求函数的连续区间；了解函数间断点的概念，会判别函数间断点的类型；知道初等函数的连续性，知道闭区间上的连续函数的几个性质（最大值、最小值定理和介值定理），会用介值定理证明方程根的存在性。

第一节　函　　数

一、区间与邻域

1．区间

区间是指数轴上介于某两点之间的线段上点的全体，这两点称为区间的端点，两端点间的距离称为区间的长度。区间包括有限区间和无限区间。

有限区间：

开区间：$(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$；

闭区间：$[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$；

半开区间：$[a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$、$(a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$。

无穷区间：

$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$；

$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$；$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$；

$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$；$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$。

2．邻域

设a为任意实数，δ为任意小的正数，我们把以a为中心、δ为半径的开区间$(a-\delta,a+\delta)$称为点a的δ邻域，记为$U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta);$$

把将$U(a,\delta)$的中心a去掉的区间称为点a的δ去心邻域（或空心邻域），记为$\overset{\circ}{U}(a,\delta)$，即

$$\overset{\circ}{U}(a,\delta)=(a-\delta,0)\cup(0,a+\delta)。$$

二、函数的概念

1．函数的定义

在某一自然现象或社会现象中，往往同时存在几个变量，这些变量并不是孤立变化的，而是相互联系并遵循一定的规律，函数就是描述变量之间相互关系的一个法则。

定义 1　设x和y是两个变量，D是一个非空实数集，若存在确定的对应规则f，使得对于数集D中的任意一个数x，按照对应规则f都有唯一确定的数y与之对应，则称y是x的**函数**，记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中，x称为**自变量**，y称为**因变量**，数集D称为这个函数的**定义域**，当x取遍数集D中的所有数值时，对应函数值的全体组成的数集称为函数的值域，记为$B=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$。

函数的两个要素是定义域和对应规则。对于不同的函数应该用不同的记号，如$f(x)$、$g(x)$、$F(x)$、$G(x)$等。

2. 函数的定义域与函数值

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义而确定的。若不考虑所讨论函数的实际意义，它的定义域就是使表达式有意义的一切实数。

确定函数的定义域时应注意以下几点：

（1）分式函数的分母不能为零；

（2）偶次根式的被开方式应大于等于零；

（3）对数函数的真数应大于零；

（4）反正弦函数、反余弦函数的定义域为$[-1,1]$；

（5）若函数表达式中同时存在上述几种函数，则定义域为各部分函数定义域的交集。

【例 1】　确定函数$y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}$的定义域。

解　若使函数y有定义，必须同时满足两个条件——分式函数的分母不能为零和偶次根式的被开方式应大于等于零，即自变量值满足不等式组$\begin{cases}x\neq 0\\1-x^2\geqslant 0\end{cases}$，解不等式组得

$$-1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ 且 } x \neq 0,$$

所以函数 y 的定义域为

$$D=[-1,0)\cup(0,1]。$$

【例 2】 确定函数 $y=\log_2(1-x)-\arcsin\dfrac{x}{3}$ 的定义域。

解 若使函数 y 有定义，必须同时满足两个条件——对数函数的真数应大于零和反正弦函数的定义域为 $[-1,1]$，即自变量值满足不等式组 $\begin{cases}1-x>0\\ -1\leqslant \dfrac{x}{3}\leqslant 1\end{cases}$，解不等式组得 $-3\leqslant x<1$，所以函数 y 的定义域为

$$D=[-3,1)。$$

【例 3】 设函数 $f(x)=x^2-x+2$，求 $f(1)$、$f[f(0)]$、$f(a^2)$、$f(2x+1)$。

解 $f(1)=1^2-1+2=2$；

$f[f(0)]=f(2)=2^2-2+2=4$；

$f(a^2)=(a^2)^2-a^2+2=a^4-a^2+2$；

$f(2x+1)=(2x+1)^2-(2x+1)+2=4x^2+4x+1-2x-1+2=4x^2+2x+2$。

【例 4】 设函数 $f(x+2)=x^2+2x+3$，求 $f(x)$。

解 令 $x+2=t$，则 $x=t-2$，将 $x=t-2$ 代入 $f(x+2)=x^2+2x+3$，得

$$f(t)=(t-2)^2+2(t-2)+3,$$

即

$$f(t)=t^2-2t+3,$$

所以

$$f(x)=x^2-2x+3。$$

3. 函数的表示法

（1）**公式法（解析法）** 将自变量和因变量之间的关系用数学表达式来表示的方法。这种方法是最利于函数的理论研究和计算的，因此我们在分析和研究函数时大部分情况都是用这种方法表示的。

（2）**表格法** 把一系列自变量的值与对应的函数值列成表格的方法。例如平方表、三角函数表等。

（3）**图像法（图形法）** 在坐标系中用图形来表示函数关系的方法。例如，图 1-1 是绝对值函数 $y=|x|$ 的图形。

4. 分段函数

有些函数在定义域的不同范围内具有不同的表达式，这样的函数称为**分段函数**。

例如，绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 是分段函数，其定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[0,+\infty)$，如图 1-1 所示。

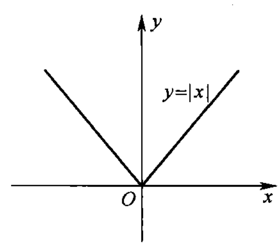


图 1-1

又如，函数 $y=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$ 是分段函数，其定义域为 $[0,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，如图 1-2 所示。

再如，符号函数 $y=\begin{cases}1, x>0\\0, x=0\\-1, x<0\end{cases}$ 是分段函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{-1,0,1\}$，如图 1-3 所示。

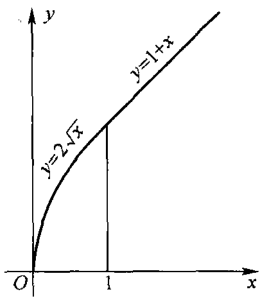


图 1-2

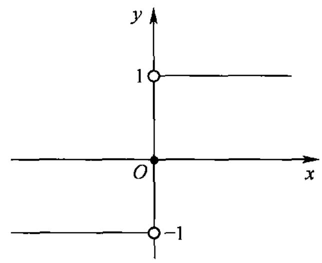


图 1-3

需要指出的是，分段函数是由几个表达式共同表示一个函数，不能理解为每一段是一个函数，那么，分段函数的定义域就应该是各个表达式中自变量取值的并集。

三、函数的特性

1. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，对于区间 I 上的任意两点 $x_1<x_2$，若

（1）恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，即函数值随着自变量的增大而增大，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**，区间 I 称为函数 $f(x)$ 的**单调增区间**；

（2）恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，即函数值随着自变量的增大而减小，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调减少**，区间 I 称为函数 $f(x)$ 的**单调减区间**。

例如，函数 $y=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调增加；函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调减少。

需要指出的是，**函数的单调性是依赖于区间的**，同一函数在定义域的不同范围内单调性可能是不同的。如函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内单调减少，而在区间 $(0,+\infty)$ 内则单调增加。

2. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，对于任意的 $x\in D$，若

（1）恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；

（2）恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；

（3） $f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$，则称 $f(x)$ 为**非奇非偶函数**。

例如，函数 $y=\sin x$、$y=x^3$ 是奇函数，函数 $y=\cos x$、$y=x^2$ 是偶函数，函数 $y=x^2-x+1$ 是非奇非偶函数等。

偶函数的图形是关于 y 轴对称的，奇函数的图形是关于原点对称的。

3. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在非零常数 T，使得对于一切 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且

$f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，称 T 为 $f(x)$ 的**周期**。周期函数的周期不唯一，通常所说的周期是指其最小正周期。

例如，函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期，而函数 $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 都是以 π 为周期。

4. 有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在一个正数 $M>0$，使得对一切 $x\in D$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**有界**，或称 $f(x)$ 是 I 上的**有界函数**，否则称 $f(x)$ 在 I 上无界。每一个具有上述性质的 M，都是该函数的界，因此，函数的界是不唯一的。

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为对任何的实数 x，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$；函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上有界，而在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内无界。

四、反函数

定义 2　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，值域为 B。对于 B 中的任意 y 值，若 D 中也有唯一的 x 值与之对应，使得 $y=f(x)$ 成立，于是得到一个以 y 为自变量、x 为因变量的新函数

$$x=f^{-1}(y),$$

称此函数为 $y=f(x)$ 的**反函数**。我们习惯上总是用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此往往把 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=f^{-1}(x)$。

从反函数的定义可以看出，函数的定义域恰好是其反函数的值域，函数的值域恰好是其反函数的定义域。在同一坐标系下，函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像是关于直线 $y=x$ 对称的。

求反函数的一般步骤是：

（1）从函数 $y=f(x)$ 中解出 x 的表达式，得到 $x=f^{-1}(y)$；

（2）将 x 和 y 互换，得到反函数 $y=f^{-1}(x)$。

【例 5】　求函数 $y=2x+3$ 的反函数。

解　从 $y=2x+3$ 中解得　$x=\dfrac{1}{2}(y-3)$，

将 x 和 y 互换，得到反函数为：　$y=\dfrac{1}{2}(x-3)$。

五、基本初等函数

通常我们把常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这六种函数称为**基本初等函数**。

1. 常函数　$y=c$　(c 是常数)

2. 幂函数　$y=x^{\mu}$　（$\mu\neq 0$，μ 是常数)

3. 指数函数　$y=a^{x}$　（$a>0$，$a\neq 1$，a 是常数)

我们经常会用到以无理数 e 为底的指数函数：$y=\mathrm{e}^{x}$（e=2.718281…）。

4. 对数函数　$y=\log_a x$（$a>0, a\neq 1, a$是常数）

当$a=10$时，$y=\log_{10}x$，简记为$y=\lg x$，称为常用对数；

当$a=\mathrm{e}$时，$y=\log_{\mathrm{e}}x$，简记为$y=\ln x$，称为自然对数。

5. 三角函数

三角函数包括以下六种：

（1）正弦函数　$y=\sin x$；

（2）余弦函数　$y=\cos x$；

（3）正切函数　$y=\tan x$；

（4）余切函数　$y=\cot x$；

（5）正割函数　$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$；

（6）余割函数　$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$。

6. 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数，包括以下四种：

（1）反正弦函数　$y=\arcsin x$；

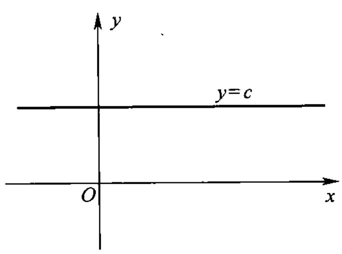
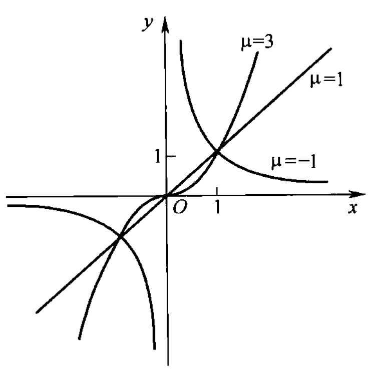
（2）反余弦函数　$y=\arccos x$；

（3）反正切函数　$y=\arctan x$；

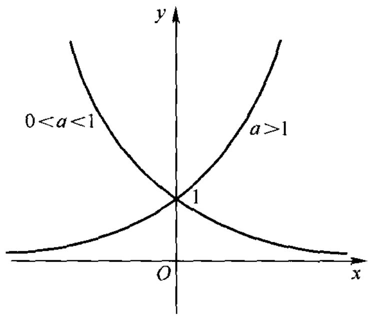
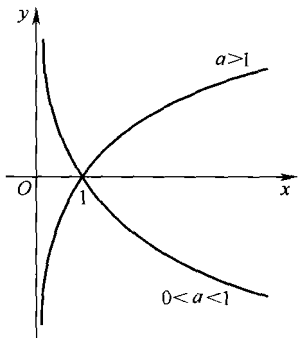
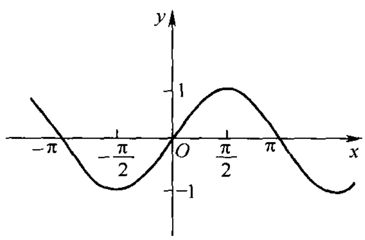
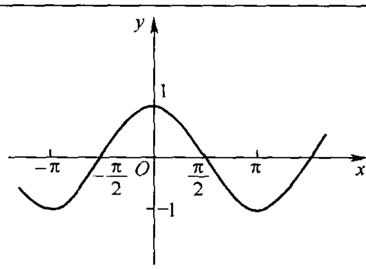
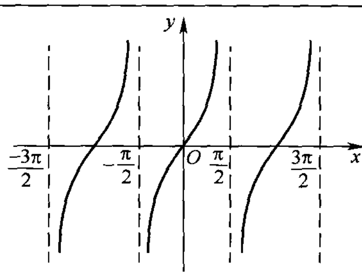
（4）反余切函数　$y=\operatorname{arc}\cot x$。

这些函数的性质、图形在中学时已经学过，这里通过表 1-1 复习一下。

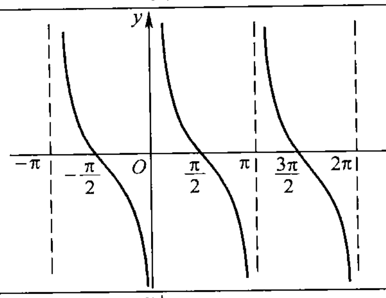
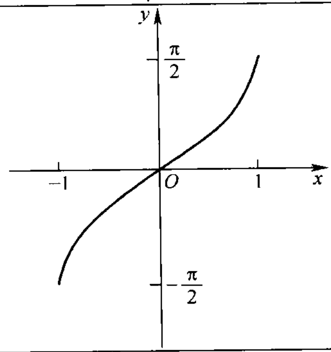
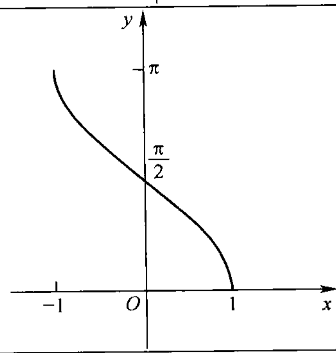
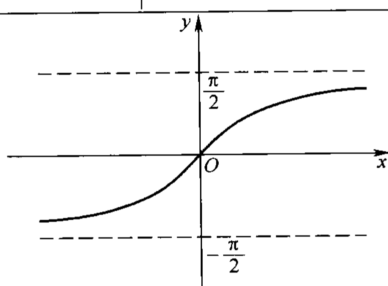
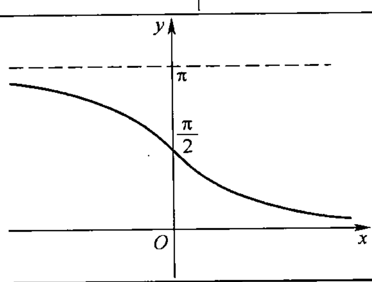
表 1-1

函数名称及表达式	定义域 D 和值域 B	图　形	主 要 性 质
常函数 $y=C$ (C 是常数)	$D=(-\infty,+\infty)$ $B=\{c\}$		图形是过点（0，C），且平行于 x 轴的直线
幂函数 $y=x^{\mu}$ （$\mu\neq 0$，μ 是常数）			$\mu>0$，图形在$(0,+\infty)$内单调增加；$\mu<0$，图形在$(0,+\infty)$内单调减少。无论何种情况，图形总经过点$(1,1)$

续表

函数名称及表达式	定义域 D 和值域 B	图　形	主 要 性 质
指数函数 $y=a^x$ ($a>0$，$a\neq 1$，a 是常数)	$D=(-\infty,+\infty)$ $B=(0,+\infty)$		当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少。无论何种情况，图形总经过点 $(0,1)$ 且始终在 x 轴上方
对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$，$a\neq 1$，a 是常数)	$D=(0,+\infty)$ $B=(-\infty,+\infty)$		当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少。无论何种情况，图形总经过点 $(1,0)$ 且始终在 y 轴右方
三角函数：(1) 正弦函数 $y=\sin x$	$D=(-\infty,+\infty)$ $B=[-1,1]$		奇函数，图形关于原点对称；以 2π 为周期；有界函数；在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加 $(k\in Z)$，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少 $(k\in Z)$
三角函数：(2) 余弦函数 $y=\cos x$	$D=(-\infty,+\infty)$ $B=[-1,1]$		偶函数，图形关于 y 轴对称；以 2π 为周期；有界函数；在 $(2k\pi-\pi,2k\pi)$ 内单调增加 $(k\in Z)$，在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少 $(k\in Z)$
三角函数：(3) 正切函数 $y=\tan x$	$D=\left\{x\middle\vert x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\right.$ $\left.k\in Z\right\}$ $B=(-\infty,+\infty)$		奇函数，图形关于原点对称；以 π 为周期；无界函数；在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加 $(k\in Z)$

续表

函数名称及表达式	定义域 D 和值域 B	图　形	主 要 性 质
三角函数： （4）余切函数 $y=\cot x$	$D=\{x \mid x\neq k\pi,$ $k\in Z\}$ $B=(-\infty,+\infty)$		奇函数，图形关于原点对称；以 π 为周期；无界函数；在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少 $(k\in Z)$
反三角函数： （1）反正弦函数 $y=\arcsin x$	$D=[-1,1]$ $B=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		是正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数；奇函数，图形关于原点对称；在 **R** 上单调增加
反三角函数： （2）反余弦函数 $y=\arccos x$	$D=[-1,1]$ $B=[0,\pi]$		是余弦函数 $y=\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的反函数；在 **R** 上单调减少
反三角函数： （3）反正切函数 $y=\arctan x$	$D=(-\infty,+\infty)$ $B=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		是正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数；在 **R** 上单调增加
反三角函数： （4）反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$	$D=(-\infty,+\infty)$ $B=(0,\pi)$		是余切函数 $y=\cot x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的反函数；在 **R** 上单调减少

六、初等函数

1. 复合函数

定义 3 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 U_2，若 $U_1\cap U_2\neq\varnothing$，则 y 通过变量 u 的联系也成为 x 的函数，我们称函数

$$y=f[\varphi(x)]$$

是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 构成的**复合函数**，其中 u 称为**中间变量**。

例如，函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1+x^2$ 可以构成复合函数 $y=\sqrt{1+x^2}$；函数 $y=x^3$ 与 $u=\sin x$ 可以构成复合函数 $y=\sin^3 x$。

需要指出的是，并非任何两个函数都可以构成复合函数。例如，函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=\sin x-2$ 就不能复合成一个函数，因为 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $[0,+\infty)$ 与 $u=\sin x-2$ 的值域 $[-3,-1]$ 相交为空集。

一个复合函数也可以由三个或三个以上的函数复合，即中间变量可以有多个。例如，由 $y=u^3$、$u=\tan v$ 和 $v=1+x$ 三个函数复合成函数 $y=\tan^3(1+x)$；由 $y=\ln u$、$u=\sin v$、$v=w^2$ 和 $w=2+x$ 四个函数复合成函数 $y=\ln\sin(2+x)^2$ 等。

【例 6】 求由下列各组函数构成的复合函数：

（1）$y=\mathrm{e}^u$，$u=\sin x$；　　（2）$y=\ln u$，$u=v^2$，$v=2-x$；

（3）$y=\tan u$，$u=2^v$，$v=x^2+1$。

解 （1）由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\sin x$ 构成的复合函数是 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$；

（2）由 $y=\ln u$，$u=v^2$，$v=2-x$ 构成的复合函数是 $y=\ln(2-x)^2$；

（3）由 $y=\tan u$，$u=2^v$，$v=x^2+1$ 构成的复合函数是 $y=\tan 2^{x^2+1}$。

相对于复合函数，我们称由基本初等函数经过有限次的四则运算所得到的函数为**简单函数**。如 $y=2x-3$ 和 $y=x^3+\sin x$ 都是**简单函数**。我们可以将一个复合函数分解成若干个简单函数。例如，函数 $y=\dfrac{1}{2x+1}$ 可以分解为两个简单函数 $y=\dfrac{1}{u}$ 和 $u=2x+1$。复合函数的分解非常重要，下面再举些例题。

【例 7】 把下列复合函数分解为若干个简单函数：

（1）$y=\sqrt{\ln x}$；　　（2）$y=\sin(2x^3-1)$；

（3）$y=2^{\cos 3x}$；　　（4）$y=[\arcsin(2+x)]^2$。

解 （1）$y=\sqrt{\ln x}$ 可分解为 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=\ln x$ 两个函数；

（2）$y=\sin(2x^3-1)$ 可分解为 $y=\sin u$ 和 $u=2x^3-1$ 两个函数；

（3）$y=2^{\cos 3x}$ 可分解为 $y=2^u$、$u=\cos v$ 和 $v=3x$ 三个函数；

（4）$y=[\arcsin(2+x)]^2$ 可分解为 $y=u^2$、$u=\arcsin v$ 和 $v=2+x$ 三个函数。

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合而成，并且只能用一个式子表示的函数，称为**初等函数**。

例如，$y=\sqrt{\sin 2x}+2^x-3$、$y=\dfrac{\ln\cos 2x+\sqrt[5]{x^2-7}}{x^3\tan x-\mathrm{e}^{2x}}$ 都是初等函数。今后我们所讨论的函