中学生
家教丛书

王建民　董世奎 主编

特级教师讲数学

高中一年级

科学普及出版社

中学生家教丛书

特级教师讲数学

（高中一年级）

王建民　董世奎　主编

科学普及出版社
·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

特级教师讲数学：高中一年级/王建民，董世奎主编．北京：科学普及出版社，1999.3

（中学生家教丛书）

ISBN 7-110-04599-4

Ⅰ．特…　Ⅱ．①王…　②董…　Ⅲ．数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ．G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字（98）第40449号

科学普及出版社出版

北京海淀区白石桥路32号　邮政编码：100081

电话：62179148　62173865

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

中国文联印刷厂印刷

*

开本：850毫米×1168毫米　1/32　印张：10.625　字数：265千字

1999年2月第1版　1999年2月第1次印刷

印数：1—10000册　定价：13.50元

《中学生家教丛书》编委会

21.15

责任编辑　桂民荣

封面设计　朱　江

正文设计　李　伟

责任校对　闫世军

责任印制　李春利

出 版 说 明

随着我国教育改革的深入发展，根据教育部有关教育改革的最新精神，我社特邀请部分北京市著名特级教师编写了《中学生家教丛书》。

《中学生家教丛书》是一套涵盖中学主要课程的自学自测导向教程。其主要特点是：

1. 注重素质教育，内容新颖 充分体现教育改革的精神，按照素质教育的要求，注重对学生学习能力的培养和学习方法的指导，帮助学生扎扎实实学好基础知识，拓宽学习思路，掌握学习方法，提高分析问题和解决问题的能力。

2. 与现行教材同步，实用性强 在编写中根据各年级、各学科的特点，按照教育部最新教学大纲和考试大纲的要求，与最新现行教材同步，由浅入深地帮助学生更好地理解和掌握书本知识，顺利地通过各科考试。

3. 突出学习重点，针对性强 各学科有的放矢地抓重点、难点进行通俗讲解，精辟分析和精要习题训练，以帮助学生达到举一反三、触类旁通的目的。

4. 编写队伍强，权威性高 本丛书各学科全部由北京市著名特级教师担任主编，参加编写工作的都是学科带头人、优秀教师。他们不仅具有丰富的教学经验，同时善于指点迷津，使学生在学习中少走弯路，取得事半功倍的效果。

本套丛书的编写是在总结和吸收众多成功指导学生学习经验的基础上编写的，是编写者在长期的教学实践中不断研究和工作经验的结晶。

我们衷心地希望读者通过本套丛书的学习，进一步激发学习兴趣，切实有效地达到素质教育的目的。并殷切期盼本套丛书出版面世后，能得到更多读者的关注和听到更多读者的意见，以便我们改进不足之处，使之不断完善。

前　言

本书依据国家教委制定《全日制中学数学教学大纲》、新教材和最新的《普通高等学校招生全国统一考试说明·数学科》及国家教委1998年关于推进中小学素质教育的最新精神组织编写.

本书的宗旨是提高学生的数学素养,提高教师的教学质量.重在对知识的内在联系、知识规律性的把握和能力的培养，并融入了近年中学数学教学科研新成果,体现了90年代以来教学改革和高考的最新特点. 观点高、思路新、题目活、知识与能力要求具体明确.

本书各章结构均包括学法指导、重点·难点、解题能力指导、精要练习、答案与提示五个部分.

学法指导是在学生原有认知结构的基础上，对学习本单元进行了适当的学习方法的指导. 相关篇幅虽然不多，但是读者若对该指导有所领悟，相信对本单元以及今后的数学学习会有一定的帮助.

重点·难点的概括与阐述力求精练、准确. 重点鲜明，难点解释清晰，多视角.

解题能力指导注意从基础抓起，围绕本单元的重要基本能力展开. 精心设计题型，不搞题海战术，务求实效性、典型性和启发性. 分析解题思路，说明为什么选择这样的解题方法，强调解后反思与点评，真正做到举一反三、融会贯通，培养思维能力，提高数学的意识与悟性.

精要练习与教学目标一致,注意覆盖大纲要求的主要知识点，有不同层次的能力要求，精选基本题型和灵活题型，题型力求新颖以体现素质教育及数学的实际应用.

答案与提示中，简单题给答案、中档题加提示，较难题给出略解.

本书是配合课堂教学的一本很好的课外同步读物，也可供数学教学同行们备课时参考.

书中疏漏在所难免，请读者批评指正.

编　者

1998 年 12 月

目　　录

代数部分

几何部分

代数部分

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

一、集　合

【学法指导】

集合概念及其基本理论，是近代数学的基本内容之一．许多重要的数学分支，如数理逻辑、近世代数、实变函数、泛函分析、概率统计、拓扑学等，都是建立在集合理论的基础上的．此外，集合思想还广泛地渗透到自然科学的许多领域，集合语言在科技文章与科普读物中比比皆是，因此，高中数学，一开始就学习集合知识，可以帮助同学们对以后学习初等数学的一些基本概念理解得更深刻，表达得更准确，同时可以阅读一些课外科技读物并为以后学习近代数学作必要的准备．

1．学习集合概念要涉及到许多旧有的数学知识，如奇数和偶数的概念、不等式及不等式的解、方程或方程组及它们的解，常见的几何图形及基本性质等，如果这些数学知识遗忘了，要设法补上．

2．和“集合”有关的术语、符号很多，学习过程中，一定要正确地、熟练地掌握这些术语与符号，不能混淆．如子集与真子集、交集与并集等概念，记号$\subset$，$\subseteq$，$\supset$，$\supseteq$及$\in$的区别和联系，都要准确地理解与运用．

3．学习集合过程中，凡是能用数轴或韦恩图（见重点·难点）表

示集合及关系时，要尽量用它们表示，以借助于图形的直观，帮助分析问题．

【重点·难点】

1．集合的概念

集合是着眼于一组对象的整体进行研究而产生的数学概念．构成集合的元素（即集合中各个对象），必须具备确定性、互异性和无序性．

（1）确定性．设 A 是一个给定的集合，x 是某一具体对象，则 x 或者是 A 的元素，或者不是 A 的元素，二者必有一种且只有一种成立．例如 5 是自然数集的元素，0 不是自然数集的元素．

（2）互异性．集合中每一个元素都是不同的，也就是说，同一集合中不应重复出现同一元素．例如方程 $(x-1)^2(x+2)=0$ 有三个解 $x_1=x_2=1, x_3=-2$. 但是这个方程的解集只有两个元素，即 $\{1,-2\}$.

（3）无序性．在用列举法表示集合时，不必考虑元素间的顺序，如集合 $\{1,2,3\}$，$\{2,1,3\}$，$\{3,1,2\}$，…都是同一集合．

2．表示集合的方法

表示集合的方法有以下三种：列举法、描述法和图示法．

（1）列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内的表示集合的方法叫列举法．例如不大于 5 的自然数的集合可用列举法表示为

$$\{1,2,3,4,5\}$$

我们把概念所反映的对象总和称为概念的“外延”，列举法是从外延出发的一种表示方法，其优点是集合中的元素一目了然，但是当集合中的元素很多或无限多时，用列举法就很麻烦甚至不可能．例如表示适合不等式 $2<x<5$ 的实数 x 的集合，无法用列举法表示．

（2）描述法．用描述法表示集合常用形式是 $\{x|P\}$，竖线前的 x

是此集合中代表的元素，竖线后的 P 是元素具有的公共属性．例如 $\{x|x>3,x\in\mathbf{R}\}$ 表示大于 3 的所有实数的集合．有时集合中代表元素也可省略不写，如{整数}表示整数集合，注意这里的大括号已包含了“所有”的意思，不必写成{全体整数}．我们把反映概念的本质属性称为概念的“内涵”，描述法是着眼于内涵的一种表示方法，揭示了集合中元素的本质属性，是用概念的内涵刻划概念的外延，非常准确．但有些集合，如 $\{-4,0,7\}$ 就不宜用描述法表示，在观察用描述法表示的集合时，首先要分清集合中的元素是什么，然后分清元素的属性又是什么．如集合 $\{y|y=x^2+1\}$ 与集合 $\{(x,y)|y=x^2+1\}$ 是完全不同的两个集合，前者是数集，表示大于、等于 1 的所有实数，后者表示点集，抛物线 $y=x^2+1$ 上的所有的点（也可以看成一个二元二次方程的解集）．

(3)图示法．有些数集可以用数轴表示，如集合 $\{x|3<x\leqslant 5\}$ 可表示为下图 1－1．

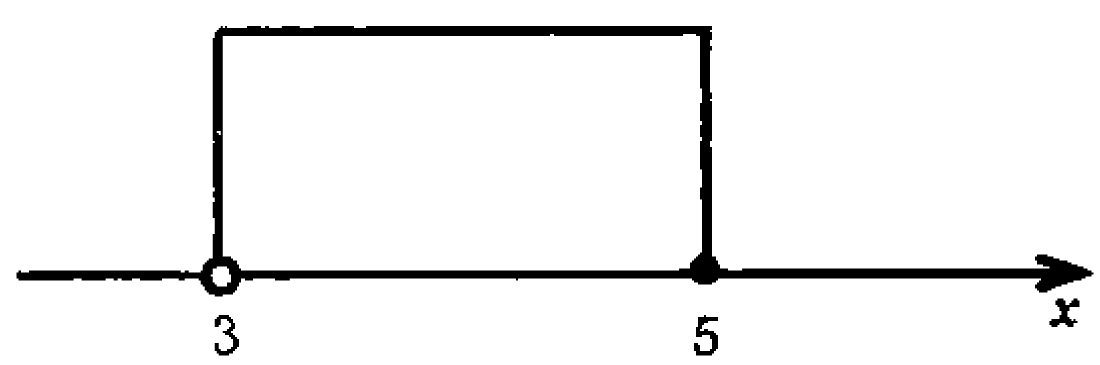

图 1－1

在讨论集合关系或运算时，常用韦恩图．这种图示是以一个封闭曲线所围的区域代表一个集合，通常用一个大的矩形表示全集 I，而用圆域表示全集中的子集．这种图示，按其创立者的名字韦恩命名为韦恩图，也称文氏图或欧拉图．

例如 A,B 是全集 I 的子集，图 1－2 直观地反映了它们的关系，阴影区域分别表示 A 和 B 的交集、并集、补集．

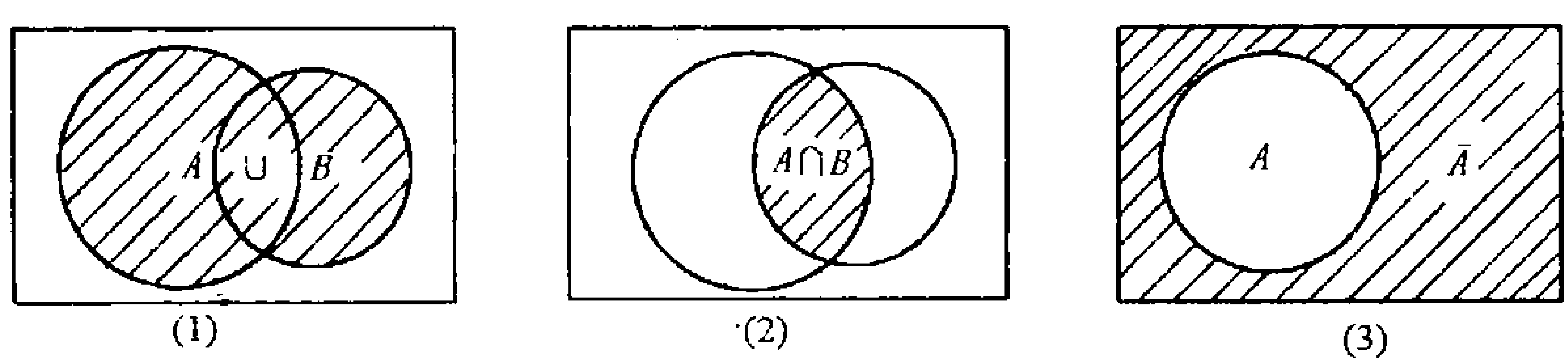

图 1－2

3. 集合间的包含关系和运算关系

(1)集合间的包含关系——子集、真子集和等集

A 是 B 的子集的涵义是:A 的任何一个元素都是 B 的元素,即任意的 $x\in A\Rightarrow x\in B$,则 $A\subseteq B$. 注意不要把子集说成由原来集合中的部分元素组成的集合,因为这种说法与"空集是任何集合的子集"的规定相抵触,也和"A 是 A 的子集"相矛盾.

如果 A 是 B 的子集,并且 B 中至少有一个元素不属于 A,称 A 是 B 的真子集,记作 $A\subset B$,注意"空集是任何集合的真子集"是错误的,因为空集不是它自身的真子集,应该改为"空集是任何非空集合的真子集".

若 $A\subseteq B$, 且 $B\subseteq A$,称 A,B 两个集合相等. 其实也可以说两个非空集合中的元素完全相同,这两个非空集合是等集,记作 $A=B$.

要区别记号"$\subseteq$"和"$\leqslant$",前者描述了两个集合间的包含关系,后者描述了两个数间的大小关系,不能混淆. 同时要区别记号"$\in$"和"$\subseteq$",$\in$ 用在元素与集合间,表示从属关系;$\subseteq$ 用在集合与集合之间,表示包含关系.

另外数 0,集合 $\{0\}$,空集 $\varnothing$,集合 $\{\varnothing\}$ 也不能混淆. 0 是数,不是集合,$\{0\}$ 是含一个元素 0 的集合,$\varnothing$ 是不含任何元素的集合,$\{\varnothing\}$ 是含元素 $\varnothing$ 的集合,不要写错.

与子集有关的包含性质有:

①对任何集合 A 都有 $A\subseteq A$;

②对任何集合 A 都有 $\varnothing\subseteq A$;

③$A\subseteq B, B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$;

$A\subset B, B\subset C\Rightarrow A\subset C$.

(2)集合间的运算关系——交集、并集、补集

①全集是一个相对所研究问题而言的概念,它含与所研究问题有关的各个集合的元素. 因此全集因研究问题而异. 例如考虑有理数范围内因式分解,这时有理数集是全集;在考虑实数范围内因式分

解时，实数集成为全集，有理数集成为它的子集．

②交集定义可以用下面的表达式表示：

$$A\cap B=\{x\mid x\in A,且\ x\in B\}$$

是由 A 与 B 的公共元素组成的集合．因此有：

$$A\cap A=A,\ A\cap\varnothing=\varnothing,\ A\cap B=B\cap A$$

③并集定义可以用下面的表达式表示：

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\ 或\ x\in B\}$$

是由所有至少属于 A、B 二者之一的元素组成的集合．有如下关系：

$$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$$

$$A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$$

$$A\cup A=A, A\cup\varnothing=A, A\cup B=B\cup A$$

④补集定义也可以用表达式表示：

$$\overline{A}=\{x\mid x\in I,且\ x\notin A\},$$

是由全集中除去 A 的全部元素后所有剩余元素组成的集合，其实补集是全集 I 与集合 A 的差集．补集的性质是：

$$A\cup\overline{A}=I,\ A\cap\overline{A}=\varnothing,\ \overline{\overline{A}}=A.$$

此外还有几个明显的性质：

$$\overline{I}=\varnothing,\ \overline{\varnothing}=I,\ A\cap I=A,\ A\cup I=I.$$

4．高中阶段常见的集合

(1)数集．如自然数集 **N**，整数集 **Z**，有理数集 **Q**，实数集 **R**．又如小于 4 的正数集合：$\{x\mid 0<x<4\}$．

(2)不等式的解集．如 $\{x\mid x+3>2\}=\{x\mid x>-1\}$．

(3)方程的解集．如 $\{x\mid x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$ 表示方程 $x^2-3x+2=0$ 的解集．

(4)不等式组的解集．如

$$\left\{x\,\middle|\,\begin{array}{l}x+3>0\\x-5<0\end{array}\right\}=\{x\mid -3<x<5\}$$

或 $\{x\mid x+3>0\}\cap\{x\mid x-5<0\}=\{x\mid -3<x<5\}$ 都表示不

等式组$\begin{cases}x+3>0\\x-5<0\end{cases}$的解集．

(5)方程组的解集．如

$$\left\{(x,y)\;\middle|\;\begin{cases}2x+y=3\\3x-2y=1\end{cases}\right\}=\{(x,y)\mid x=1,y=1\}$$

表示方程组$\begin{cases}2x+y=3\\3x-2y=1\end{cases}$的解集．

(6)点集，如$\{(x,y)\mid y=3x+1\}$表示直线（一次函数 $y=3x+1$ 的图像）上的所有点的集合．

随着学习的深入，还用集合表示空间图形的集合或平面曲线的集合……

5. 特定的符号

数学符号的出现，极大地方便了人们的思维和思想交流，同时也对数学的发展起了极大的推动作用，可以说，没有符号就没有数学，符号化是数学最本质的特征之一．

集合中出现许多符号，必须准确无误地掌握与运用．

N：表示自然数集，它是无限集，在它的全体元素中，1 是最小的元素．

Z：表示整数集，有时可以借助函数 $f(x)=[x]$，$x\in\mathbf{R}$，（这里$[x]$表示不超过实数 x 的那个最大整数．例如$[-1]=-1$，$[-\pi]=-4$，$[0.5]=0$ 等）．表示整数集，可以写成 $\mathbf{Z}=\{a\mid a=[x],x\in\mathbf{R}\}$；

Q：有理数集合．有理数集合也可表示为

$$\mathbf{Q}=\{x\mid x=\frac{p}{q},\ p,q\in\mathbf{Z},\ q\neq 0,\ p,q\text{ 互质}\};$$

R：实数集．如果把实数集作为全集，那么无理数集可以表示成 $\overline{\mathbf{Q}}$；$\mathbf{R}^+$表示正实数集；$\mathbf{R}^-$表示负实数集；$\overline{\mathbf{R}^-}$表示非负实数集，$\overline{\mathbf{R}^+}$表示非正实数集，$\mathbf{Q}^+$表示正有理数集，$\mathbf{Q}^-$表示负有理数集等；

$\varnothing$：表示空集；

$\in$：表示元素与集合的从属关系；

$\subseteq$:表示集合与集合间的从属关系;

$\cap$:表示集合与集合取交的运算关系;

$\cup$:表示集合间取并的运算关系;

"—":表示给定全集的前提下,对横线下面的集合取补的运算;

=:等集符号

……

准确使用、识别这些符号,能提高我们对数学语言的表达、理解能力.

【解题能力指导】

例 1 说出下列元素与集合或集合与集合之间的关系.

(1)$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$与$\{a+b\sqrt{6}\mid a,b\in\mathbf{R}\}$

(2)$X=\{x\mid x=2m,\ m\in\mathbf{Z}\}$与$Y=\{y\mid y=4n+2,\ n\in\mathbf{Z}\}$

(3)$A=\{(x,y)\mid y=|x|\}$与$B=\{(x,y)\mid x\in R,\ y\geqslant 0\}$

解:(1)由于

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}})^2}=$$

$\sqrt{6}$,因此可得$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\in\{a+b\sqrt{6}\mid a,b\in\mathbf{R}\}$;

(2)解法 1 集合X是全体偶数组成的集合,Y是除去 4 的倍数的所有偶数组成的集合,故$X\supset Y$;

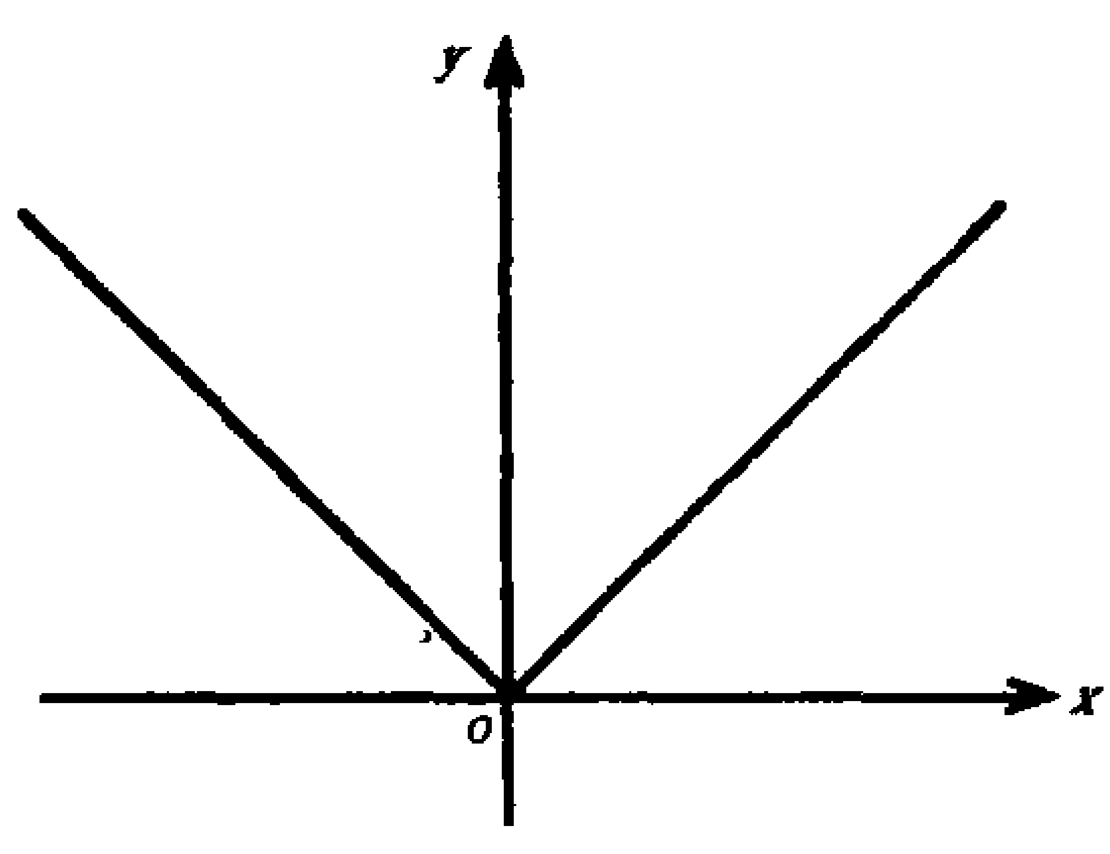

图 1—3

解法 2 本题还可列举集合中的一些元素来判断,如令$m=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$可得相应$X$中的元素是$\cdots,-4,-2,0,2,4,\cdots$. 同样令$n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$得出$Y$的元素是$-6,\ -2,2,6,10,\cdots$,得

$X \supseteq Y$;

解法 3 当 $m=2n$ 时，$x=4n$，当 $m=2n+1$ 时，$x=4n+2$，可见集合 Y 是由集合 X 中 m 取奇数时的元素组成的集合，故 $X \supseteq Y$.

(3)$A=\{(x,y)\mid y=|x|\}$，它是如图 1—3 所示射线上的点所组成的集合，而集合 $B=\{(x,y)\mid x\in \mathbf{R}, y\geqslant 0\}$ 是坐标平面的上半部分(包括 x 轴)的点组成的集合，因此 $A\subset B$.

点评：判断集合间的关系，可归结为元素与集合的关系，可以从分析元素的分类或集合的结构得出结论.

例 2 下列四个集合中，表示空集的是(　　).

A. $\{0\}$　　B. $\{(x,y)\mid y^2=-x^2, x\in \mathbf{R}, y\in \mathbf{R}\}$

C. $\{x\mid 2x^2+3x-2=0, x\in \mathbf{N}\}$　　D. $\{x\mid 3x+2>5\}$

分析：$\{0\}$ 含元素 0，不是空集；

$\{(x,y)\mid y^2=-x^2, x\in \mathbf{R}, y\in \mathbf{R}\}=\{(0,0)\}$ 表示坐标原点，不是空集；

$\{x\mid 3x+2>5\}=\{x\mid x>1\}$ 表示大于 1 的所有实数，不是空集；

因为 $2x^2+3x-2=0$ 的根是 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-2$ 都不是自然数，

所以 $\{x\mid 2x^2+3x-2=0, x\in N\}=\varnothing$，答案选 C.

点评：对于集合中元素的属性要仔细观察，有时“咬文嚼字”是必要的. 如对选项 C，如果看不清 $x\in \mathbf{N}$ 的条件，很难作出正确判断.

例 3 判断正误

(1)$a\subset\{a\}$　　(2)$\varnothing\subset\{a\}$

(3)$\varnothing\in\{a,b\}$　　(4)$\{a\}\subset\{a,b,c\}$

(5)直角坐标系的坐标轴上的点的集合表示为 $\{(x,y)\mid x=0, y=0\}$

(6)集合 $\{x\mid (x+1)^2=2x+1, x\in \mathbf{R}\}=\{0\}=\varnothing$

分析：a 是集合 $\{a\}$ 的元素，应使用记号“$\in$”即 $a\in\{a\}$，(1)是错的；

$\varnothing$是任何非空集合的真子集，(2)正确；

$\varnothing$ 是空集，集合与集合间的包含关系应该用记号“$\subset$”，即 $\varnothing\subset\{a,b\}$，(3)是错的；

(4)正确；

用描述法表示集合属性所用的逗号“，”，一般是“且”的意思，点集 $\{(x,y)\mid x=0, y=0\}$ 表示的是原点，坐标轴上的点集应表示为 $\{(x,y)\mid x=0$ 或 $y=0\}$，(5)是错的；

方程 $(x+1)^2=2x+1$ 的解是 $x=0$，正确的写法是 $\{x\mid(x+1)^2=2x+1,\ x\in\mathbf{R}\}=\{0\}\supset\varnothing$，(6)是错的．

点评：集合语言是刻画数学本质属性的最重要的语言之一，贵在准确，因此在运用集合语言与集合符号时，一定要小心谨慎，切忌出现概念不清、符号乱用的毛病．

例 4 方程 $x^2-ax-b=0$ 的解集是 A，方程 $x^2+bx-a=0$ 的解集是 B，若 $A\cap B=\{1\}$，则 $A\cup B=$________．

分析：由于 $A\cap B=\{1\}$，可知 1 是两个方程的公共根，得

$$\begin{cases}1-a-b=0\\1+b-a=0\end{cases}\text{解得 } a=1,\ b=0$$

方程 $x^2-x=0$ 的另一根是 0，方程 $x^2-1=0$ 的另一根是 -1，故 $A\cup B=\{0,1,-1\}$．

例 5 设 S,T 是两个非空集合，且 $S\not\subseteq T$，$T\not\subseteq S$，令 $X=S\cap T$，那么 $S\cup X$ 等于(　　)．

A. X　　B. T　　C. $\varnothing$　　D. S

分析 1：由于 $X=S\cap T\subseteq S$，故 $S\cup X=S$，答案选 D.

分析 2：由于 S,T 是非空集合，$S\not\subseteq T$，$T\not\subseteq S$，用韦恩图表示 S,T 有两种情况：

图 1－4 甲中，$X=S\cap T\neq\varnothing$，这时 $S\cup X=S$，图 1－4 乙中，$S\cap T=\varnothing$，即 $X=S\cap T=\varnothing$，这时 $S\cup X=S\cup\varnothing=S$ 仍然成立．

评述：用韦恩图讨论集合的关系有化抽象为具体的功能，是一种