21世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

数学分析讲义

（第五版）

全程导学及习题全解

（上 册）

主编 马訾伟 闫晓红

◆ 知识归纳 梳理主线重点难点
◆ 习题详解 精确解答教材习题
◆ 提高练习 巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

数学分析讲义

（第五版）

全程导学及习题全解

（上 册）

主编 马誉伟 闫晓红

◆ 知识归纳 梳理主线重点难

◆ 习题详解 精确解答教材习题

◆ 提高练习 巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目（CIP）数据

数学分析讲义（第五版）全程导学及习题全解. 上册/ 马訾伟，闫晓红主编. —北京：中国时代经济出版社，2009. 9

（21世纪高等院校经典教材同步辅导）

ISBN 978-7-80221-946-5

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①马… ②闫… Ⅲ. 数学分析－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. 017

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 131897 号

数学分析讲义（第五版）全程导学及习题全解（上册）

马訾伟 闫晓红 主编

出 版 者	中国时代经济出版社
地　　址	北京市西城区车公庄大街乙5号鸿儒大厦B座
邮政编码	100044
电　　话	（010）68320825（发行部） （010）88361317（邮购）
传　　真	（010）68320634
发　　行	各地新华书店
印　　刷	北京鑫海达印刷有限公司
开　　本	880×1230　1/32
版　　次	2009年9月第1版
印　　次	2009年10月第2次印刷
印　　张	12.375
字　　数	285千字
印　　数	5001—8000册
定　　价	19.00元
书　　号	ISBN 978-7-80221-946-5

前言

数学分析是数学各专业最重要的一门专业基础课，大学本科乃至研究生阶段的很多后继课程如微分方程、实变函数和复变函数、概率论、统计及泛函分析、微分几何等课程都要以数学分析为基础。正因如此，数学各专业研究生入学考试都将数学分析作为必考课程。数学分析逻辑性很强，其习题的技巧性也很强，只了解基本的理论和方法，不辅以相应的技巧，很难顺利应用理论和方法解出习题，因此往往出现学习者听懂内容容易，课后习题完成困难的现象。加上数学分析学习的时间跨度长、内容极为丰富，这些都给学生的学习带来不少困难。

刘玉琏、傅沛仁等编写的《数学分析讲义（第五版)》是许多综合性大学、高等师范院校、函授院校以及教育学院的数学分析教材，为了帮助学习者更好地掌握课程内容，针对学生在学习过程中遇到的困难，我们编写了这本辅导书。本书的编排严格与教材保持一致。每章的知识要点部分着重点明知识点之间的联系，帮助学生在更高层次上理解教材内容；在此基础上按照各类考试中经常出现的考题总结出不同类型的典型例题，进行针对性的训练，以开阔学习思路。对于课后习题的解答，我们遵循解答详细、思路清晰、理论严密、简明易懂的原则，力争在帮助大家学习教材习题的同时做到举一反三。但希望大家在学习的过程中，不要依赖答案，要懂得善用。

参与本书编写的除马訾伟、闫晓红外，刘伟、蒋春涛、刘晓亚、方琳、李娟娟也参与了编写工作并提出了宝贵的修改意见和建议，为本书的顺利出版付出了辛勤的劳动，在此表示感谢。并对《数学分析讲义（第五版)》的作者刘玉琏、傅沛仁、林玎、苑德馨、刘宁老师表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中难免出现疏漏，望读者批评指正。

编　者

2009 年 7 月

目　录

第一章　函　数

知识结构图

- 函数
  - 函数
    - 函数的概念
    - 函数的四则运算
    - 函数的图像
  - 四类具有特殊性质的函数
    - 有界函数
    - 单调函数
    - 奇函数与偶函数
    - 周期函数
  - 复合函数与反函数
    - 复合函数
    - 反函数
    - 初等函数

§1.1　函　数

一、知识要点

1. 函数概念

设 A 是非空实数集. 若存在对应关系 f,对 A 中任意数 $x(\forall x\in A)$,按照对应关系 f,有唯一一个 $y\in\mathbf{R}$,则称 f 是定义在 A 上的函数,记为

$$f:A\to\mathbf{R}.$$

记为 $y=f(x)$. x 称为自变量,y 称为因变量. 数集 A 称为函数 f 的定义域,函数值的集合 $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$称为函数 f 的值域.

注意　(1)函数 f 由两个因素完全确定,函数 f 的定义域A 和对应关系 f;即 $\forall x\in A$,按照对应关系 f,都对应唯一一个 $y\in\mathbf{R}$.

(2)在函数概念中,对应关系 f 是抽象的,只有在具体函数中,对应关系 f

才是具体的.

(3)根据函数定义,函数都存在定义域,若不指明具体的取值,即指的是使函数 $y=f(x)$ 有意义的实数 x 的集合 $A=\{x|f(x)\in\mathbf{R}\}$.

2.函数的四则运算

设两个函数 f 与 g 分别定义在数集 A 与 B.

(1) 若 $A=B$,且 $\forall x\in A$,有 $f(x)=g(x)$,则称函数 f 与 g 相等,记为 $f=g$.

(2)若 $A\cap B\neq\varnothing$,则函数 f 与 g 的和 $f+g$,差 $f-g$、积 fg 分别定义为

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ \forall x\in A\cap B.$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x),\ \forall x\in A\cap B.$$
$$(fg)(x)=f(x)g(x),\qquad \forall x\in A\cap B.$$

(3)若 $(A\cap B)\setminus\{x|g(x)=0\}\neq\varnothing$,则函数 f 与 g 的商 $\dfrac{f}{g}$ 定义为

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},x\in(A\cap B)\setminus\{x|g(x)=0\}.$$

3.三个特殊函数

(1)符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1,x>0,\\0,x=0,\\-1,x<0.\end{cases}$$

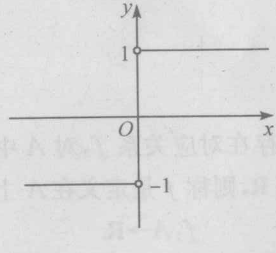


图 1.1.1

(2)狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1,\ x\text{是有理数},\\0,\ x\text{是无理数}.\end{cases}$$

(3)黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n},\ x=\dfrac{m}{n},m\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z},\text{且 } m \text{ 与 } n \text{ 互质},\\ 1\ ,\ x=0,\\ 1\ ,\ x\text{ 是无理数}.\end{cases}$$

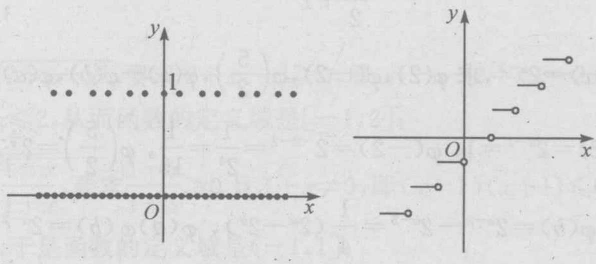


图 1.1.2

4. 定义在正整数集 $\mathbf{N}^+$ 上的函数 $f(x)$ 称为数列. 例如:

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}:1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots;\text{ 或 }\left\{\frac{n}{n+1}\right\}:\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots;$$

其中重要的是等差数列和等比数列.

二、典型题解

例 1 求函数 $y=(x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 的定义域.

解 要使函数 $y=(x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 有意义,则 $\dfrac{1+x}{1-x}\geqslant 0$,即 $-1\leqslant x<1$,因此该函数的定义域是 $[-1,1)$.

例 2 求函数 $y=\ln(x+2)+\ln(x-2)$ 的定义域.

解 要使函数 $y=\ln(x+2)+\ln(x-2)$ 有意义,则 $\begin{cases}x+2>0,\\ x-2>0.\end{cases}$ 即 $x>2$,因此该函数的定义域是 $(2,+\infty)$.

三、课后题详解

1. 设 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$,求 $f(0),f(2),f(-2),f(1),f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

解 $f(0)=\dfrac{|0-2|}{0+1}=2$, $f(2)=\dfrac{|2-2|}{2+1}=0$, $f(-2)=\dfrac{|-2-2|}{-2+1}=-4$,

$f(1)=\dfrac{|1-2|}{1+1}=\dfrac{1}{2}$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\left|\dfrac{1}{2}-2\right|}{\dfrac{1}{2}+1}=1$.

2. 设 $\varphi(x)=2^{x-2}$,求 $\varphi(2)$,$\varphi(-2)$,$\varphi\left(\dfrac{5}{2}\right)$,$\varphi(a)-\varphi(b)$,$\varphi(a)\varphi(b)$,$\dfrac{\varphi(a)}{\varphi(b)}$.

解 $\varphi(2)=2^{2-2}=1$, $\varphi(-2)=2^{-2-2}=\dfrac{1}{2^4}=\dfrac{1}{16}$, $\varphi\left(\dfrac{5}{2}\right)=2^{\frac{5}{2}-2}=\sqrt{2}$,

$\varphi(a)-\varphi(b)=2^{a-2}-2^{b-2}=\dfrac{1}{4}(2^a-2^b)$, $\varphi(a)\varphi(b)=2^{a-2}2^{b-2}=2^{a+b-4}$,

$\dfrac{\varphi(a)}{\varphi(b)}=\dfrac{2^{a-2}}{2^{b-2}}=2^{a-b}$.

3. 设 $F(x)=x^2-3x+7$,求 $F(2+h)$,$\dfrac{F(2+h)-F(2)}{h}$.

解 由于 $f(2+h)=(2+h)^2-3(2+h)+7=4+4h+h^2-6-3h+7$

$$=h^2+h+5,$$

因此 $f(2)=5$,并且

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{h^2+h+5-5}{h}=h+1.$$

4. 设 $\psi(t)=ta^t(a>0)$,求 $\psi(0)$,$\psi(1)$,$\psi(t+1)$,$\psi(t+1)+1$,$\psi\left(\dfrac{1}{t}\right)$,$\dfrac{1}{\psi(t)}$.

解 经过计算可得 $\psi(0)=0$, $\psi(1)=a$,$\psi(t+1)=(t+1)a^{t+1}$,

$\psi(t+1)+1=(t+1)a^{t+1}+1$, $\psi(\dfrac{1}{t})=\dfrac{1}{t}a^{\frac{1}{t}}=\dfrac{\sqrt[t]{a}}{t}$, $\dfrac{1}{\psi(t)}=\dfrac{1}{t}a^{-t}$.

5. 确定下列函数的定义域:

1) $y=\sqrt{3x+4}$; 2) $y=\sqrt{2+x-x^2}$;

3) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; 4) $y=\arcsin(2x+1)$;

5) $y=\dfrac{1}{|x|-x}$; 6) $y=\ln(2x+1)+\sqrt{4-3x}$;

7) $y=\ln\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$; 8) $y=x^3+e^{x-1}+\dfrac{\ln x}{x-4}$;

9) $y=\dfrac{1}{e^x-e^{-x}}$；　　　　10) $y=\sqrt{\cos x}$.

解　1) $y=\sqrt{3x+4}$，要求 $3x+4\geqslant 0$，即 $x\geqslant -\dfrac{4}{3}$，于是函数的定义域是 $\left[-\dfrac{4}{3},+\infty\right)$；

2) $y=\sqrt{2+x-x^2}$，要求 $2+x-x^2\geqslant 0$，即 $x^2-x-2=(x-2)(x+1)\leqslant 0$，于是有 $-1\leqslant x\leqslant 2$，从而函数的定义域是 $[-1,2]$；

3) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$，要求 $\dfrac{1-x}{1+x}\geqslant 0$ 且 $1+x\neq 0$，即 $(x-1)(x+1)\leqslant 0$ 且 $x\neq 1$，从而 $-1<x\leqslant 1$，于是函数的定义域是 $(-1,1]$；

4) $y=\arcsin(2x+1)$，要求 $-1\leqslant 2x+1\leqslant 1$，即 $-1\leqslant x\leqslant 0$，于是函数的定义域是 $[-1,0]$；

5) $y=\dfrac{1}{|x|-x}$，要求 $|x|-x\neq 0$，即 $x<0$，于是函数的定义域是 $(-\infty,0)$；

6) $y=\ln(2x+1)+\sqrt{4-3x}$，要求 $2x+1>0$ 且 $4-3x\geqslant 0$，即 $x>-\dfrac{1}{2}$ 且 $x\leqslant\dfrac{4}{3}$，于是函数的定义域是 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3}\right]$；

7) $y=\ln\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$，要求 $\sin\dfrac{\pi}{x}>0$，即 $2k\pi<\dfrac{\pi}{x}<(2k+1)\pi$，于是有

$\forall k\in\mathbf{Z}-\{0\}$，$\dfrac{1}{2k+1}<x<\dfrac{1}{2k}$ $(k=0、1、\cdots)$，当 $k=0$ 时是区间 $(1,+\infty)$.

从而函数的定义域是无穷多个区间：

$$\left(\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2k}\right),k\in\mathbf{Z}-\{0\}\text{与}(1,+\infty)；$$

8) $y=x^3+e^{x-1}+\dfrac{\ln x}{x-4}$，要求 $\begin{cases}x-4\neq 0,\\ x>0.\end{cases}$ 即 $x>0$ 且 $x\neq 4$，于是函数的定义域是 $(0,4)\cup(4,+\infty)$；

9) $y=\dfrac{1}{e^x-e^{-x}}$，要求 $e^x-e^{-x}\neq 0$，即 $\dfrac{e^{2x}-1}{e^x}\neq 0$，于是有 $e^{2x}\neq 1$，从而 $x\neq$

0,于是函数的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;

10) $y=\sqrt{\cos x}$,要求 $\cos x\geqslant 0$, 即 $\forall k\in\mathbf{Z},2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$,于是函数的定义域是无穷多个区间:

$$\forall k\in\mathbf{Z},\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right].$$

6. 正方形的周长集合 L 与其面积集合 A 之间的对应是否是函数?三角形的周长集合 l 与其面积集合 S 之间的对应是否是函数?为什么?

解　正方形的周长与边长的关系为 $L=4a$,则面积与周长的关系为 $A=\left(\frac{L}{4}\right)^2$ 是一个函数;但对于三角形来讲,$l=a+b+c$(假设三边分别为 a,b,c),则所对应的面积为

$$S=\sqrt{\frac{l}{2}\left(\frac{l}{2}-a\right)\left(\frac{l}{2}-b\right)\left(\frac{l}{2}-c\right)}$$

不是由 l 唯一确定,而是由 a,b,c 确定,因此不是函数.

7. 下列函数是否相等,为什么?

1) $f(x)=\frac{x}{x}$　与　$\varphi(x)=1$;

2) $f(x)=2\lg x$　与　$\varphi(x)=\lg x^2$;

3) $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$　与　$\varphi(x)=x-3$;

4) $f(x)=\frac{\pi}{2}x$　与　$\varphi(x)=x(\arcsin x+\arccos x)$.

解　1)—4)均不相等,因为它们的定义域不同.

8. 证明:若 $\varphi(x)=\ln x$,则 $\varphi(x)+\varphi(x+1)=\varphi[x(x+1)]$.

证明 $\varphi(x)+\varphi(x+1)=\ln x+\ln(x+1)$

$$=\ln[x(x+1)]=\varphi[x(x+1)].$$

9. 证明:若 $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$,其中 $a>0$,则

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

证明　$f(x+y)+f(x-y)=\frac{1}{2}(a^{x+y}+a^{-x-y})+\frac{1}{2}(a^{x-y}+a^{-x+y})$

$$=\frac{1}{2}[a^x(a^y+a^{-y})+a^{-x}(a^{-y}+a^y)]$$

$$=\frac{1}{2}[(a^x+a^{-x})(a^y+a^{-y})]$$

$$=2f(x)f(y).$$

10. 证明：$\varphi(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$，则 $\varphi(a)+\varphi(b)=\varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

证明　因为

$$\varphi(a)+\varphi(b)=\ln\frac{1-a}{1+a}+\ln\frac{1-b}{1+b}=\ln\frac{1-a-b+ab}{(1+a)(1+b)},$$

并且

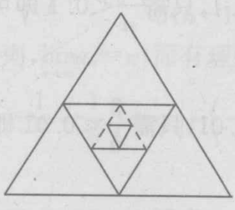
$$\varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)=\ln\frac{1-\dfrac{a+b}{1+ab}}{1+\dfrac{a+b}{1+ab}}=\ln\frac{1+ab-a-b}{1+ab+a+b},$$

于是有

$$\varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)=\varphi(a)+\varphi(b).$$

11. 如果等边三角形的面积为1，连结这个三角形各边的中点得到一个小三角形，又连结这个小三角形的各边中点得到一个更小的三角形，如此无限继续下去，求出这些三角形面积的数列.

解　由题意可知，若大三角形的面积为1，即 $a_1=1$，那么里面的三角形的面积应为 a_1 的 $\frac{1}{4}$，同理可得，即这些三角形面积的数列为



1.1.11图

$$a_1=1,a_2=\frac{1}{4},\ a_3=\frac{1}{4}a_2=\left(\frac{1}{4}\right)^2,\cdots a_n=\frac{1}{4}a_{n-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1},\cdots.$$

12. 写出无理数

$$\pi=3.141\,592\,653\cdots,$$

$$e=2.718\,281\,828\cdots$$

的有理数不足近似值数列与过剩近似值数列，使其精确到 1,0.1,0.01,0.001,….

解　e 的有理数不足近似值数列为 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n=1,2,\cdots)$，它是单调增加且上方有界的数列，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$；而有理数过剩近似值数列 $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$是单调减少且下方有界的数列，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$；因为，

$$0<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

即
$$0<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

而
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n},$$

因此有
$$0<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n},$$

用数列$\{a_n\}$去近似 e，则

1)要使 $e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1$，只需$\frac{3}{n}<1$ 即可，则只要 $n>3$ 就可满足条件；

2)要使 $e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<0.1$，只需$\frac{3}{n}<0.1$ 即可，则只要 $n>30$ 就可满足条件；

3)要使 $e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<0.01$，只需$\frac{3}{n}<0.01$ 即可，则只要 $n>300$ 就可满足条件；

4)要使 $e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<0.001$，只需$\frac{3}{n}<0.001$ 即可，则只要 $n>3000$ 就可满足条件；

…….

因为

$$0<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n,$$

即

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<0,$$

而

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n},$$

因此有

$$0<\left|e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right|<\frac{3}{n},$$

于是用数列$\{b_n\}$去近似 e,则

1)要使$\left|e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right|<1$,只需$\frac{3}{n}<1$即可,则只要$n>3$就可满足条件;

2)要使$\left|e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right|<0.1$,只需$\frac{3}{n}<0.1$即可,则只要$n>30$就可满足条件;

3)要使$\left|e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right|<0.01$,只需$\frac{3}{n}<0.01$即可,则只要$n>300$就可满足条件;

4)要使$\left|e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right|<0.001$,只需$\frac{3}{n}<0.001$即可,则只要$n>3000$就可满足条件;

……

π的有理数不足近似值数列

$$a_n=4\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2(n-1)+1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}(n=1,2,\cdots)$$

是单调增加且上方有界的数列,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\pi$;而有理数过剩近似值数列

$$b_n=4\left\{1+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2(n+1)+1}\right)\right\}(n=1,2,\cdots)$$

是单调减少且下方有界的数列,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\pi$;因为

$$0<a_n\leqslant\pi\leqslant b_n,$$

即

$$0<\pi-a_n\leqslant b_n-a_n=\frac{1}{2(n+1)+1}$$

而 $$\frac{1}{2(n+1)+1}<\frac{1}{n};,$$

因此有 $$0<\pi-a_n\leqslant b_n-a_n<\frac{1}{n},$$

用数列$\{a_n\}$去近似π,则

1)要使$0<\pi-a_n<1$,只需$\frac{1}{n}<1$即可,则只要$n>1$就可满足条件;

2)要使$0<\pi-a_n<0.1$,只需$\frac{1}{n}<0.1$即可,则只要$n>10$就可满足条件;

3)要使$0<\pi-a_n<0.01$,只需$\frac{1}{n}<0.01$即可,则只要$n>100$就可满足条件;

4)要使$0<\pi-a_n<0.001$,只需$\frac{1}{n}<0.001$即可,则只要$n>1000$就可满足条件;

因为$a_n-b_n\leqslant\pi-b_n\leqslant 0$,因此
$$0\leqslant b_n-\pi\leqslant b_n-a_n=\frac{1}{2(n+1)+1}<\frac{1}{n},$$

用数列$\{b_n\}$去近似π,则

1)要使$0<\pi-b_n<1$,只需$\frac{1}{n}<1$即可,则只要$n>1$就可满足条件;

2)要使$0<\pi-b_n<0.1$,只需$\frac{1}{n}<0.1$即可,则只要$n>10$就可满足条件;

3)要使$0<\pi-b_n<0.01$,只需$\frac{1}{n}<0.01$即可,则只要$n>100$就可满足条件;

4)要使$0<\pi-b_n<0.001$,只需$\frac{1}{n}<0.001$即可,则只要$n>1000$就可满足条件.

13. 证明:若$f(x)=ax+b$,且$\{x_n\}$是等差数列,则$\{f(x_n)\}$也是等差数列.

证明　因为$\{x_n\}$是等差数列,则$2x_n=x_{n-1}+x_{n+1}$,于是有
$$\begin{aligned}2f(x_n)&=2(ax_n+b)=a(x_{n-1}+x_{n+1})+2b\\&=ax_{n-1}+b+ax_{n+1}+b\\&=f(x_{n-1})+f(x_{n+1}).\end{aligned}$$

即$\{f(x_n)\}$也是等差数列.

14. 证明：若$\{a_n\}$是等比数列，且$a_n>0, n=1,2,\cdots$，则$\{\ln a_n\}$是等差数列.

证明　因为$\{a_n\}$是等比数列，则$a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}$，于是

$$2\ln a_n=\ln a_n^2=\ln a_{n-1}a_{n+1}=\ln a_{n-1}+\ln a_{n+1},$$

从而$\{\ln a_n\}$是等差数列.

15. 已知函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$的图像（在区间$[a,b]$上可随意画一条曲线，有的点函数值为正，有的点函数值为负），描绘下列函数的图像：

1) $y_1=|f(x)|$;

2) $y_2=\frac{1}{2}\{f(x)+|f(x)|\}$;

3) $y_3=\frac{1}{2}\{f(x)-|f(x)|\}$.

解　1) $y_1=|f(x)|=\begin{cases}f(x), & f(x)\geqslant 0,\\ -f(x), & f(x)<0\end{cases}$ 的图像：

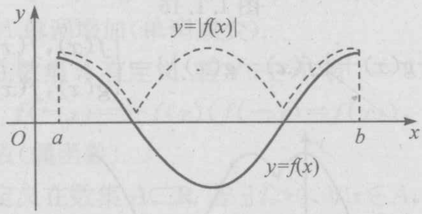


图 1.1.15(1)

2) $y_2=\frac{1}{2}\{f(x)+|f(x)|\}=\begin{cases}f(x), & f(x)\geqslant 0,\\ 0, & f(x)<0\end{cases}$ 的图像：

3) $y_2=\frac{1}{2}\{f(x)-|f(x)|\}=\begin{cases}0, & f(x)\geqslant 0,\\ f(x), & f(x)<0\end{cases}$ 的图像：

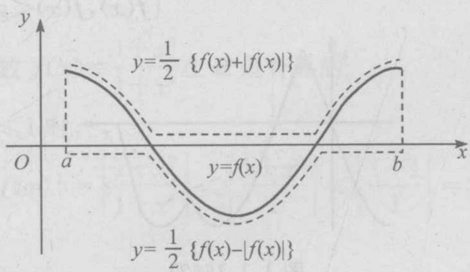


图 1.1.15(2)