电子信息本科系列教材

电磁场与电磁波学习指导与习题详解

DIANCICHANG YU DIANCIBO XUEXI ZHIDAO YU XITI XIANGJIE

马冰然 编著

华南理工大学出版社

电子信息本科系列教材

电磁场与电磁波
学习指导与习题详解

马冰然　编著

华南理工大学出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波学习指导与习题详解/马冰然编著. —广州:华南理工大学出版社,2010.3

(电子信息本科系列教材)

ISBN 978-7-5623-3262-6

Ⅰ.①电… Ⅱ.①马… Ⅲ.①电磁场—高等学校—教学参考资料②电磁波—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 030040 号

总 发 行:华南理工大学出版社(广州五山华南理工大学 17 号楼,邮编 510640)
营销部电话:020-87113487 87110964 87111048(传真)
E-mail:scutc13@scut.edu.cn **http://www.scutpress.com.cn**
责任编辑:詹志青
印 刷 者:广州市穗彩彩印厂
开 本:787 mm×1092 mm 1/16 **印张**:21.75 **字数**:543 千
版 次:2010 年 3 月第 1 版 2010 年 3 月第 1 次印刷
印 数:1～2 000 册
定 价:35.00 元

前　　言

本书是与主教材(电磁场与电磁波,华南理工大学出版社,2007年8月版)相匹配的学习指导书与习题解集。内容包括主教材各章的基本内容和公式、重点难点分析、章后习题及本书附加习题的详解与分析。在各章重点难点分析中,编者欲以准确定义、深刻理解、拓宽视野、前后连贯为指导思想来阐述基本概念和基本定理,希望能揭示基本概念和定理的本质内涵以帮助读者加深对其理解;在习题详解中,对有启发意义的习题都附有题前的解题分析和题后的详论或附注,希望帮助读者以正确的思路解题,并提高应用和分析能力。

本书凝聚了编者多年在不同层次的电磁场与电磁波理论教学中的心得与体会。书中所述的许多问题常常是初学者感到疑惑和进一步学习者想要深入思考的问题。因此,本书对主教材或与主教材相类似的电磁场理论书籍的学和教者,都会有参考价值。同时,本书可以作为高等院校电子信息类和电气信息类专业相关基础理论课程教材的辅助参考书。

“电磁场与电磁波”课程一向被认为是难教难学的课程。但依编者多年的教学实践看,它并非如此之难。请注意:概念的准确理解很重要;形象的抽象思维有帮助;与其他大多数课程不同的数理工具(如矢量分析、场论等)不可避免;习题的思考和训练常常能加深读者对概念和定理的准确理解,能起到释疑作用。希望本书的出版能让读者共享编者的心得与体会,能令电磁场与电磁波课程易教易学。

限于编者的水平和能力,书中难免存在缺点和错误,敬请读者批评指正。

编　者

2010年1月

目　录

第1章　矢量分析与场论基础

一、基本内容和公式

1. 单位矢量、长度元、面积元和体积元

三种常用坐标系中的单位矢量、长度元、面积元、体积元如表 1－1 所示。

表 1－1　三种常用坐标系中的单位矢量、长度元、面积元和体积元

	直角坐标系	圆柱坐标系	球坐标系
坐标变量	$x,\ y,\ z$	$r,\ \varphi,\ z$	$r^{*},\ \theta,\ \varphi$
单位矢量	$\boldsymbol{a}_x,\ \boldsymbol{a}_y,\ \boldsymbol{a}_z$	$\boldsymbol{a}_r,\ \boldsymbol{a}_\varphi,\ \boldsymbol{a}_z$	$\boldsymbol{a}_r,\ \boldsymbol{a}_\theta,\ \boldsymbol{a}_\varphi$
长度元	$\mathrm{d}l_x=\mathrm{d}x$ $\mathrm{d}l_y=\mathrm{d}y$ $\mathrm{d}l_z=\mathrm{d}z$	$\mathrm{d}l_r=\mathrm{d}r$ $\mathrm{d}l_\varphi=r\mathrm{d}\varphi$ $\mathrm{d}l_z=\mathrm{d}z$	$\mathrm{d}l_r=\mathrm{d}r$ $\mathrm{d}l_\theta=r\mathrm{d}\theta$ $\mathrm{d}l_\varphi=r\sin\theta\mathrm{d}\varphi$
面积元	$\mathrm{d}S_x=\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ $\mathrm{d}S_y=\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ $\mathrm{d}S_z=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	$\mathrm{d}S_r=r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$ $\mathrm{d}S_\varphi=\mathrm{d}r\mathrm{d}z$ $\mathrm{d}S_z=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$	$\mathrm{d}S_r=r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ $\mathrm{d}S_\theta=r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$ $\mathrm{d}S_\varphi=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$
体积元	$\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	$\mathrm{d}V=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$	$\mathrm{d}V=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$

* 注：圆柱坐标系的(r,φ,z)和球坐标系的(r,θ,φ)中的坐标变量 r 是不相同的，当要讨论两坐标系变量之间的关系时，为了区分，将球坐标系中的 r 写成 R，如图1－1所示。在没有必要区分时，在各自坐标系中仍然用 r 表示。

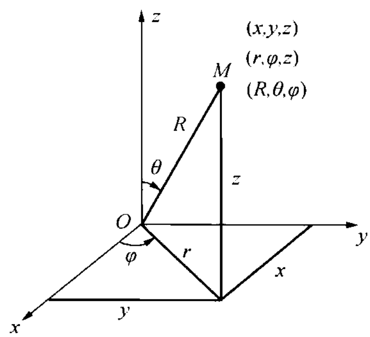


图 1－1　三坐标系变量之间的关系

坐标变量之间的关系，如图 1－1 所示。

$$\left.\begin{aligned}x&=r\cos\varphi=R\sin\theta\cos\varphi,\\y&=r\sin\varphi=R\sin\theta\sin\varphi,\\z&=z=R\cos\theta。\end{aligned}\right\}\qquad(1-1)$$

单位矢量之间的关系：

直角坐标系单位矢量

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_x\\\boldsymbol{a}_y\\\boldsymbol{a}_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi&0\\\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_r\\\boldsymbol{a}_\varphi\\\boldsymbol{a}_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi&\cos\theta\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\theta\sin\varphi&\cos\theta\sin\varphi&\cos\varphi\\\cos\theta&-\sin\theta&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_R\\\boldsymbol{a}_\theta\\\boldsymbol{a}_\varphi\end{bmatrix};\quad(1-2\mathrm{a})$$

圆柱坐标系单位矢量

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_r \\ \boldsymbol{a}_\varphi \\ \boldsymbol{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_x \\ \boldsymbol{a}_y \\ \boldsymbol{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_R \\ \boldsymbol{a}_\theta \\ \boldsymbol{a}_\varphi \end{bmatrix}; \tag{1-2b}$$

球坐标系单位矢量

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_R \\ \boldsymbol{a}_\theta \\ \boldsymbol{a}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_x \\ \boldsymbol{a}_y \\ \boldsymbol{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_r \\ \boldsymbol{a}_\varphi \\ \boldsymbol{a}_z \end{bmatrix}。 \tag{1-2c}$$

2. 标量函数的梯度及矢量函数的散度和旋度

其定义公式为：

梯度

$$\mathrm{grad}u \cdot \boldsymbol{a}_l = \nabla u \cdot \boldsymbol{a}_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial l}, \tag{1-3}$$

散度

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}, \tag{1-4}$$

旋度

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a}_{\Delta S} = \nabla \times \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a}_{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_\Gamma \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}。 \tag{1-5}$$

以上各式中的算符“∇”在直角、圆柱和球坐标系中的展开式分别为：

$$\nabla = \boldsymbol{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial}{\partial z}, \tag{1-6}$$

$$\nabla = \boldsymbol{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{a}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial}{\partial z}, \tag{1-7}$$

$$\nabla = \boldsymbol{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{a}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}。 \tag{1-8}$$

梯度、散度和旋度在三坐标系中的展开式如表 1-2 所示。

表 1-2 梯度、散度和旋度的展开式

	直角坐标系	圆柱坐标系	球坐标系
$\nabla u =$	$\boldsymbol{a}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial u}{\partial z}$	$\boldsymbol{a}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \boldsymbol{a}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial u}{\partial z}$	$\boldsymbol{a}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \boldsymbol{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \boldsymbol{a}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$
$\nabla \cdot \boldsymbol{A} =$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) +$ $\frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$
$\nabla \times \boldsymbol{A} =$	$\boldsymbol{a}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) +$ $\boldsymbol{a}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) +$ $\boldsymbol{a}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$	$\boldsymbol{a}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) +$ $\boldsymbol{a}_\varphi \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) +$ $\boldsymbol{a}_z \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right]$	$\boldsymbol{a}_r \frac{1}{r\sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] +$ $\boldsymbol{a}_\theta \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) \right] +$ $\boldsymbol{a}_\varphi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$

3. 高斯散度定理和斯托克斯定理

高斯散度定理：

$$\int_V \nabla\cdot \boldsymbol{A}\mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \tag{1-9}$$

斯托克斯定理：

$$\int_S (\nabla\times \boldsymbol{A})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_c \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}。 \tag{1-10}$$

4. 两个重要的矢量恒等式

$$\nabla\times(\nabla u)\equiv 0, \tag{1-11}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\equiv 0。 \tag{1-12}$$

5. 亥姆霍兹定理

对于一个定义于无限大区间、在无限远处有界、完全正则的矢量函数$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$，可表示为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r}) + \nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})。\\ \text{其中：}\quad &\nabla\times\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{r}) = 0,\quad \phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V';\\ &\nabla\cdot\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{r}) = 0,\quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla'\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V'。\end{aligned}\right\} \tag{1-13}$$

6. 矢量场的分类

无旋有散场（保守场）

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=0,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{F}=\rho\neq 0, \tag{1-14a}$$

可引入位函数u，$\boldsymbol{F}=-\nabla u$，且$\nabla^2 u=-\rho$。

有旋无散场（管形场）

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{J}\neq 0, \tag{1-14b}$$

可引入矢量位函数$\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{G}$，且$\nabla^2\boldsymbol{G}-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{G})=-\boldsymbol{J}$。

无旋无散场（调和场）

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=0,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{F}=0, \tag{1-14c}$$

若引入位函数u，$\boldsymbol{F}=-\nabla u$，则$\nabla^2 u=0$。

有旋有散场

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2,\\ \text{其中：}\quad &\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{F}_1=0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{F}_1=\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\rho\end{cases},\\ &\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{F}_2=0\\ \nabla\times\boldsymbol{F}_2=\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}\end{cases}。\end{aligned}\right\} \tag{1-14d}$$

二、重点、难点和例题分析

1. 用坐标系变量、单位矢量、长度元、面积元表示标量函数和矢量函数以及其线、面、体积分

(1)同一标量函数（或矢量函数）可以用不同坐标系表示。

例如，在直角坐标系中的$u(x,y,z)=x^2+xyz$和$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x x^2+\boldsymbol{a}_y y$，在圆柱坐标系中可表

示为

$$u=u(r,\varphi,z)=r^2\cos^2\varphi+r^2\cos\varphi\sin\varphi z,$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{A}(r,\varphi,z)=(\boldsymbol{a}_r\cos\varphi-\boldsymbol{a}_\varphi\sin\varphi)r^2\cos^2\varphi+(\boldsymbol{a}_r\sin\varphi+\boldsymbol{a}_\varphi\cos\varphi)r\sin\varphi\\&=\boldsymbol{a}_r(r^2\cos^3\varphi+r\sin^2\varphi)+\boldsymbol{a}_\varphi(-r^2\sin\varphi\cos^2\varphi+r\cos\varphi\sin\varphi)。\end{aligned}$$

选择用哪一个坐标系来表示场函数，要根据场源的分布规律和场域边界面形状特点决定。由于在电磁场问题的求解过程中，边界条件起着决定通解中待定常数的作用，故据场域的边界面形状，选择具有相应或相同形状的坐标面的坐标系，常是求解问题的第一步。

(2)线积分中常用的线元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 同样可以用不同坐标系的单位矢量和长度元表示。

直角坐标系：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{a}_x\mathrm{d}x+\boldsymbol{a}_y\mathrm{d}y+\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}z, \tag{1-15}$$

圆柱坐标系：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{a}_r\mathrm{d}l_r+\boldsymbol{a}_\varphi\mathrm{d}l_\varphi+\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}l_z=\boldsymbol{a}_r\mathrm{d}r+\boldsymbol{a}_\varphi r\mathrm{d}\varphi+\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}z, \tag{1-16}$$

球坐标系：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{a}_r\mathrm{d}l_r+\boldsymbol{a}_\theta\mathrm{d}l_\theta+\boldsymbol{a}_\varphi\mathrm{d}l_\varphi=\boldsymbol{a}_r\mathrm{d}r+\boldsymbol{a}_\theta r\mathrm{d}\theta+\boldsymbol{a}_\varphi r\sin\theta\mathrm{d}\varphi。 \tag{1-17}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 取哪一种表示形式，要根据需要而定。例如，在计算 $\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 时，若 $\boldsymbol{A}$ 用直角坐标系表示为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_xA_x+\boldsymbol{a}_yA_y+\boldsymbol{a}_zA_z$，则 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 应用式(1-15)表示，$\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z$；若 $\boldsymbol{A}$ 是用圆柱坐标系表示的，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_rA_r+\boldsymbol{a}_\varphi A_\varphi+\boldsymbol{a}_zA_z$，则 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 取式(1-16)，$\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=A_r\mathrm{d}r+A_\varphi r\mathrm{d}\varphi+A_z\mathrm{d}z$ 就更便于积分。

例 1-1 矢量 $\boldsymbol{A}=(x+3y)\boldsymbol{a}_x+7yz\boldsymbol{a}_y-y^2z\boldsymbol{a}_z$，试计算 $\int\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 从点 $P(0,0,0)$ 到点 $Q(1,1,1)$ 沿下列路径的值：①$x=t,y=t^2,z=t^3$；②连接点 P、Q 的直线；③从 $P(0,0,0)$ 到 $M(1,1,0)$ 再到 $Q(1,1,1)$。

解 在直角坐标系中，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{a}_x\mathrm{d}x+\boldsymbol{a}_y\mathrm{d}y+\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}z$，

$$\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=(x+3y)\mathrm{d}x+7yz\mathrm{d}y-y^2z\mathrm{d}z。$$

①题设 l 路径为 $x=t,y=t^2,z=t^3$，故有

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}y=2t\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}z=3t^2\mathrm{d}t。$$

则
$$\begin{aligned}\int_P^Q\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}&=\int_0^1[(t+3t^2)\mathrm{d}t+7t^2\cdot t^3\cdot 2t\mathrm{d}t-t^4\cdot t^3\cdot 3t^2\mathrm{d}t]\\&=\int_0^1(t+3t^2+14t^6-3t^9)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}+\frac{3}{3}+\frac{14}{7}-\frac{3}{10}=3.2。\end{aligned}$$

②沿 PQ 直线时，有 $y=x,z=x$，即得 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}x,\mathrm{d}z=\mathrm{d}x$，

则
$$\begin{aligned}\int_P^Q\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}&=\int_0^1(x+3x+7x^2-x^3)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{7}{3}-\frac{1}{4}\approx 4.08。\end{aligned}$$

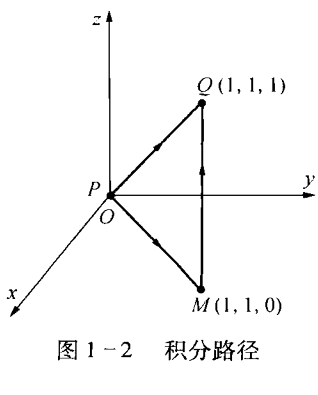


图 1-2 积分路径

③如图 1-2 所示，当路径沿 PMQ 时，PM 段：$y=x$，$\mathrm{d}y=\mathrm{d}x,z=0,\mathrm{d}z=0$；$MQ$ 段：$y=x=1,\mathrm{d}y=0,\mathrm{d}x=0$。

则 $\int_P^Q \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_P^M \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_M^Q \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$

$$= \int_0^1 (x+3x)\mathrm{d}x + \int_0^1 -z\mathrm{d}z = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = 1.5。$$

(3)面积元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 亦可用不同坐标系的面元和单位矢量表示。

当面积元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ 的单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 的方向与坐标单位矢量的夹角大于、等于 0 并小于 $\pi/2$ 时，在三坐标系中，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 表示为

直角坐标系：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \boldsymbol{a}_x\mathrm{d}S_x + \boldsymbol{a}_y\mathrm{d}S_y + \boldsymbol{a}_z\mathrm{d}S_z \\ &= \boldsymbol{a}_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \boldsymbol{a}_y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \boldsymbol{a}_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned} \tag{1-18}$$

圆柱坐标系：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \boldsymbol{a}_r\mathrm{d}S_r + \boldsymbol{a}_\varphi\mathrm{d}S_\varphi + \boldsymbol{a}_z\mathrm{d}S_z \\ &= \boldsymbol{a}_r r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z + \boldsymbol{a}_\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}z + \boldsymbol{a}_z r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi,\end{aligned} \tag{1-19}$$

球坐标系：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \boldsymbol{a}_r\mathrm{d}S_r + \boldsymbol{a}_\theta\mathrm{d}S_\theta + \boldsymbol{a}_\varphi\mathrm{d}S_\varphi \\ &= \boldsymbol{a}_r r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi + \boldsymbol{a}_\theta r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi + \boldsymbol{a}_\varphi r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta。\end{aligned} \tag{1-20}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 的面积分 $\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 可依 $\boldsymbol{A}$ 的表达式而选择适当的 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 表达式。例如，若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_xA_x+\boldsymbol{a}_yA_y+\boldsymbol{a}_zA_z$，则 $\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=A_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+A_y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+A_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *。

* 在具体的 $\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的面积分中，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 在三个坐标轴方向上的分量的正负，要视积分面 S 上的面元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向而定。例如，在直角坐标系中，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\boldsymbol{a}_x\mathrm{d}S\cos\alpha+\boldsymbol{a}_y\mathrm{d}S\cos\beta+\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}S\cos\gamma,$$

α、β、γ 为 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{a}_x$、$\boldsymbol{a}_y$、$\boldsymbol{a}_z$ 的夹角，如图 1-3 所示的 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1$，其 α、β、γ 均小于 $\pi/2$，则 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 表达式为式(1-18)；如 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2$，其 $0\leqslant\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\gamma<\pi$，则 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2$ 应表示为 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2=\boldsymbol{a}_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\boldsymbol{a}_y\mathrm{d}x\mathrm{d}z-\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

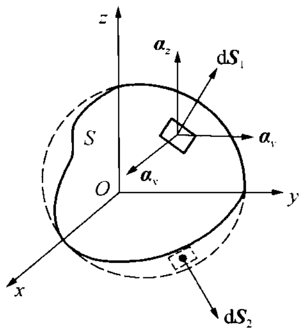


图 1-3　面元矢量

例 1-2　①在半径为 a 的球面上计算位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的标量面积分 $\oint_S \boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 值，再计算面元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 在此面上的矢量面积分 $\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 值；② 在 $0\leqslant x\leqslant 1$、$0\leqslant y\leqslant 1$、$0\leqslant z\leqslant 1$ 的正方体表面上，再计算以上两个积分值。

解　①(a)如图 1-4 所示，在球坐标系中，位置矢量为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_r r$。在 $r=a$ 的球面上，面元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向为 $\boldsymbol{a}_r$ 方向，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mathrm{d}\boldsymbol{S}_r=\boldsymbol{a}_r\mathrm{d}S_r=\boldsymbol{a}_r r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

故 $\oint_S \boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r\boldsymbol{a}_r\cdot\boldsymbol{a}_r r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\,\Big|_{r=a} = 4\pi a^3$。

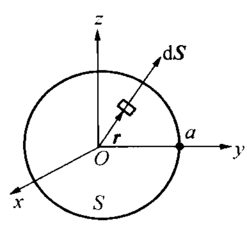


图 1-4　积分球面 S

(b) 而 $\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\boldsymbol{a}_r r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ 中，$\boldsymbol{a}_r$ 是 θ 和 φ 的函数，不便于积分。可将 $\boldsymbol{a}_r$ 用直角坐标系单位矢量 $\boldsymbol{a}_x$、$\boldsymbol{a}_y$、$\boldsymbol{a}_z$ 表示。$\boldsymbol{a}_x$、$\boldsymbol{a}_y$、$\boldsymbol{a}_z$ 是常矢量，可以从积分号中如同提取常数提出来。据式(1-2c) 有

$$\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{a}_x\sin\theta\cos\varphi + \boldsymbol{a}_y\sin\theta\sin\varphi + \boldsymbol{a}_z\cos\theta,$$

则 $\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a}_x a^2\int_0^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi + \boldsymbol{a}_y a^2\int_0^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi + \boldsymbol{a}_z a^2\int_0^{\pi}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = 0$。

②(a)如图 1-5 所示,当积分闭面是直角坐标系中的正方体的表面积时,面上任一点的位置矢量可表示为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_x x + \boldsymbol{a}_y y + \boldsymbol{a}_z z。$$

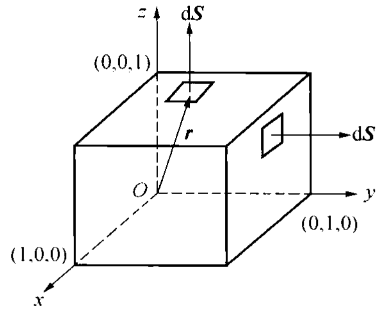


图 1-5 正方体积分面

在正方体的六个表面上分别做 $\int \boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的积分,则

$x = 0$ 面: $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{a}_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\int_{x=0}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$;

$x = 1$ 面: $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a}_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\int_{x=1}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\mathrm{d}z = 1$;

$y = 0$ 面: $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{a}_y\mathrm{d}x\mathrm{d}z$, $\int_{y=0}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$;

$y = 1$ 面: $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a}_y\mathrm{d}x\mathrm{d}z$, $\int_{y=1}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}z = 1$;

$z = 0$ 面: $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\int_{z=0}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$;

$z = 1$ 面: $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a}_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\int_{z=1}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y = 1$。

故 $\oint_S \boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 = 3$。

(b)对于积分 $\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}$,在六个表面上 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的表达式如上所述,故有

$$\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{a}_x\int_{x=0}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \boldsymbol{a}_x\int_{x=1}\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \boldsymbol{a}_y\int_{y=0}\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \boldsymbol{a}_y\int_{y=1}\mathrm{d}x\mathrm{d}z - \boldsymbol{a}_z\int_{z=0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \boldsymbol{a}_z\int_{z=1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0。$$

2. 标量和矢量函数的微分以及"∇"算符的应用

对标量函数的偏微分运算如同高等数学中的微分运算。对矢量函数的偏微分应注意在三个常用坐标系中,除 $\boldsymbol{a}_x$、$\boldsymbol{a}_y$、$\boldsymbol{a}_z$ 以外,其余的坐标单位矢量都不是常矢量,这些非常矢量对有些坐标变量的微分是不为零的,例如,在圆柱坐标系中,

$$\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{a}_x\cos\varphi + \boldsymbol{a}_y\sin\varphi,\ \boldsymbol{a}_\varphi = -\boldsymbol{a}_x\sin\varphi + \boldsymbol{a}_y\cos\varphi,$$

则

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{a}_r}{\partial\varphi} &= \boldsymbol{a}_x\frac{\partial\cos\varphi}{\partial\varphi} + \boldsymbol{a}_y\frac{\partial\sin\varphi}{\partial\varphi} = -\boldsymbol{a}_x\sin\varphi + \boldsymbol{a}_y\cos\varphi = \boldsymbol{a}_\varphi,\\ \frac{\partial \boldsymbol{a}_\varphi}{\partial\varphi} &= -\boldsymbol{a}_x\cos\varphi - \boldsymbol{a}_y\sin\varphi = -\boldsymbol{a}_r。\end{aligned}\right\} \tag{1-21}$$

同理,在球坐标系(其 $\boldsymbol{a}_r$ 用 $\boldsymbol{a}_R$ 表示)中有:

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_R}{\partial\theta} = \boldsymbol{a}_\theta,\ \frac{\partial \boldsymbol{a}_R}{\partial\varphi} = \boldsymbol{a}_\varphi\sin\theta, \tag{1-22a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_\theta}{\partial\theta} = -\boldsymbol{a}_R,\ \frac{\partial \boldsymbol{a}_\theta}{\partial\varphi} = \boldsymbol{a}_\varphi\cos\theta, \tag{1-22b}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_\varphi}{\partial\varphi} = -\boldsymbol{a}_R\sin\theta - \boldsymbol{a}_\theta\cos\theta。 \tag{1-22c}$$

当微分号后有这些单位矢量时，有时也可以将其换成用 $\boldsymbol{a}_x$、$\boldsymbol{a}_y$、$\boldsymbol{a}_z$ 表示的式子，然后再进行积分。

在场论微分中常用到的"∇"算符是一个微分矢性算符。作为微分运算符号，∇只作用于位于其后的函数；作为矢量算符，∇可当作普通矢量进行矢量代数运算及恒等变换，只是在运算中不能把∇算符后面的函数搬到∇前面，除非此函数被视作常数。

例如，在圆柱坐标系中，矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 的散度展开公式可用圆柱坐标系中的∇算符与 $\boldsymbol{A}$ 点乘而得：

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \left(\boldsymbol{a}_r\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{a}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\boldsymbol{a}_rA_r+\boldsymbol{a}_\varphi A_\varphi+\boldsymbol{a}_zA_z)\\
&=\boldsymbol{a}_r\frac{\partial}{\partial r}\cdot(\boldsymbol{a}_rA_r+\boldsymbol{a}_\varphi A_\varphi+\boldsymbol{a}_zA_z)+\boldsymbol{a}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\cdot(\boldsymbol{a}_rA_r+\boldsymbol{a}_\varphi A_\varphi+\boldsymbol{a}_zA_z)+\\
&\quad\boldsymbol{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\cdot(\boldsymbol{a}_rA_r+\boldsymbol{a}_\varphi A_\varphi+\boldsymbol{a}_zA_z)\\
&=\boldsymbol{a}_r\cdot\left(\boldsymbol{a}_r\frac{\partial A_r}{\partial r}+A_r\frac{\partial\boldsymbol{a}_r}{\partial r}+\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\partial A_\varphi}{\partial r}+A_\varphi\frac{\partial\boldsymbol{a}_\varphi}{\partial r}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial A_z}{\partial r}+A_z\frac{\partial\boldsymbol{a}_z}{\partial r}\right)+\\
&\quad\boldsymbol{a}_\varphi\frac{1}{r}\cdot\left(\boldsymbol{a}_r\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}+A_r\frac{\partial\boldsymbol{a}_r}{\partial\varphi}+\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+A_\varphi\frac{\partial\boldsymbol{a}_\varphi}{\partial\varphi}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}+A_z\frac{\partial\boldsymbol{a}_z}{\partial\varphi}\right)+\\
&\quad\boldsymbol{a}_z\cdot\left(\boldsymbol{a}_r\frac{\partial A_r}{\partial z}+A_r\frac{\partial\boldsymbol{a}_r}{\partial z}+\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}+A_\varphi\frac{\partial\boldsymbol{a}_\varphi}{\partial z}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial A_z}{\partial z}+A_z\frac{\partial\boldsymbol{a}_z}{\partial z}\right)\\
&=\boldsymbol{a}_r\cdot\left(\boldsymbol{a}_r\frac{\partial A_r}{\partial r}+A_r\cdot0+\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\partial A_\varphi}{\partial r}+A_\varphi\cdot0+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial A_z}{\partial r}+A_z\cdot0\right)+\\
&\quad\boldsymbol{a}_\varphi\frac{1}{r}\cdot\left(\boldsymbol{a}_r\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}+A_r\boldsymbol{a}_\varphi+\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+A_\varphi(-\boldsymbol{a}_r)+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}+A_z\cdot0\right)+\\
&\quad\boldsymbol{a}_z\cdot\left(\boldsymbol{a}_r\frac{\partial A_r}{\partial z}+A_r\cdot0+\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}+A_\varphi\cdot0+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial A_z}{\partial z}+A_z\cdot0\right)\\
&=\frac{\partial A_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(A_r+\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z},
\end{aligned}\tag{1-23}$$

上式结果便是表 1－2 中圆柱坐标系的 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 的展开式。

又例如，在以下的恒等式的证明中，可以体会到"∇"算符既具有微分性又具有矢量性的运算特性。

例 1－3　证明恒等式

①$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$；　(1－24)

②$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$。　(1－25)

证　①先根据∇算符的微分性质，按乘积的微分法则，有

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}_c)+\nabla\cdot(\boldsymbol{A}_c\times\boldsymbol{B})。\tag{1-26}$$

其中，$\boldsymbol{A}_c$ 和 $\boldsymbol{B}_c$ 在微分中被看作常矢，∇ 算符的微分运算不再对其起作用。

再根据 ∇ 算符的矢量性质，将式(1－26)右端两项看成是三个矢量的混合积，并据矢量混合积运算规则

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})$$

将式(1－26)右端两项中的常矢都换到 ∇ 的前面，并把变矢留在 ∇ 的后面，即可证

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})&=\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}_c)+\nabla\cdot(\boldsymbol{A}_c\times\boldsymbol{B})\\&=\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}_c)-\nabla\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}_c)\\&=\boldsymbol{B}_c\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}_c\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})\\&=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})。\end{aligned}$$

②同理,有

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\nabla\times(\boldsymbol{A}_c\times\boldsymbol{B})+\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}_c), \tag{1-27}$$

根据三个矢量的二重矢量积运算规则

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}, \tag{1-28}$$

有

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}_c\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}_c(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}_c\cdot\nabla)\boldsymbol{B},$$
$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}_c)=(\boldsymbol{B}_c\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}_c(\nabla\cdot\boldsymbol{A}),$$

则

$$\begin{aligned}\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})&=\boldsymbol{A}_c(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}_c\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}_c\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}_c(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\\&=\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\end{aligned}$$

成立。

在电磁场量的矢量微积分中,除了在主教材《电磁场与电磁波》附录里所列举的矢量恒等式外,还常用到下列有关算符 ∇ 对位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 或距离矢量 $\boldsymbol{R}$ 的运算的恒等式。

在以下恒等式中假设:

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'=(x-x')\boldsymbol{a}_x+(y-y')\boldsymbol{a}_y+(z-z')\boldsymbol{a}_z=R\boldsymbol{a}_R;$$

$$\nabla=\boldsymbol{a}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial}{\partial z};\quad \nabla'=\boldsymbol{a}_x\frac{\partial}{\partial x'}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial}{\partial y'}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial}{\partial z'};$$

$f(R)$表示f为R的函数,$f'(R)$表示$f(R)$对宗量(R)的导数。

$$\nabla R=\boldsymbol{a}_R, \tag{1-29}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{R}=3, \tag{1-30}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{R}=0, \tag{1-31}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}_R=\frac{2}{R}, \tag{1-32}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{a}_R=0, \tag{1-33}$$

$$\nabla f(R)=f'(R)\boldsymbol{a}_R=-\nabla'f(R), \tag{1-34}$$

$$\nabla R^n=nR^{n-1}\boldsymbol{a}_R, \tag{1-35}$$

$$\nabla\cdot[f(R)\boldsymbol{a}_R]=\frac{2}{R}f(R)+f'(R)=-\nabla'\cdot[f(R)\boldsymbol{a}_R], \tag{1-36}$$

$$\nabla\times[f(R)\boldsymbol{a}_R]=0, \tag{1-37}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}=\frac{-\boldsymbol{a}_R}{R^2}=-\nabla'\left(\frac{1}{R}\right), \tag{1-38}$$

$$\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\right)=-\nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\right)=0\quad(R\neq0), \tag{1-39}$$

$$\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\right)=0\qquad(R\neq0), \tag{1-40}$$

$$(\boldsymbol{k}\cdot\nabla)\boldsymbol{R}=\boldsymbol{k}\qquad(\boldsymbol{k}\text{ 为常矢}), \tag{1-41}$$

$$\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R})=\boldsymbol{k}\qquad(\boldsymbol{k}\text{ 为常矢}), \tag{1-42}$$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)=\nabla'^2\left(\frac{1}{R}\right)=0\qquad(R\neq0), \tag{1-43}$$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')。\tag{1-44}$$

3. 梯度、散度和旋度的意义及其应用

电磁场量一般是三维空间变量及时间 t 的函数，标量的梯度、矢量的散度和旋度是从空间的角度来研究场量的，即如何用场量的空间变化率（对坐标变量的偏导数）来描述其空间分布特性。

（1）标量场 u 的梯度场

标量场 u 的梯度场 ∇u 是矢量场。如式（1－3）所示，∇u 的量纲为场量"单位长度上的增量"，它在空间某点的模是 u 在该点对空间长度的最大变化率（即最大方向导数），它的方向是取得此最大变化率的方向。由 ∇u 不仅可以得到 u 在空间任一点的最大增长率及最大增长的方向，而且还可以计算出 u 在其他方向（如任意 $\boldsymbol{a}_l$）上的增长率，即方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}\left(\frac{\partial u}{\partial l}=\nabla u\cdot\boldsymbol{a}_l\right)$。另外，空间任一点处的 ∇u 的方向垂直于过该点的 u 的等值面。梯度场 ∇u 的这些特性描述了 u 在空间的变化趋势，∇u 确定，则 u 可完全确定。

（2）矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度场

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 是标量场。如式（1－4）所示，$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 的量纲是"单位体积内发出的 $\boldsymbol{A}$ 的通量"，即"$\boldsymbol{A}$ 的通量体密度"。（面积分 $\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 穿出闭面 S 的通量）在物理学中，研究矢量场 $\boldsymbol{A}$ 时常常可以借助所谓的矢量线来形象地描述 $\boldsymbol{A}$ 的分布情况。如果在作 $\boldsymbol{A}$ 矢量线时，选择在垂直某点 $\boldsymbol{A}$ 的方向的单位面积上穿过的矢量线的根数等于该点的模 $|\boldsymbol{A}|$，那么积分值 $\int_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 就是穿过面 S 上的 $\boldsymbol{A}$ 的矢量线的总根数，如图 1－6 所示，即

$$\int_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S A\cos\theta\mathrm{d}S = \int_{S_\perp}A\mathrm{d}S_\perp \quad (\boldsymbol{S}_\perp /\!/ \boldsymbol{A})。\tag{1-45}$$

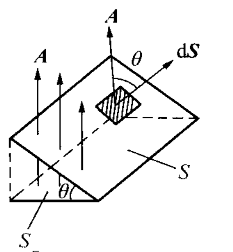
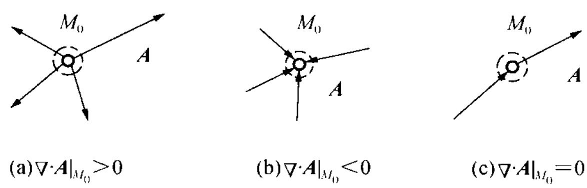


图 1－6　S 面上矢量 $\boldsymbol{A}$ 的通量



(a) $\nabla\cdot\boldsymbol{A}|_{M_0}>0$　(b) $\nabla\cdot\boldsymbol{A}|_{M_0}<0$　(c) $\nabla\cdot\boldsymbol{A}|_{M_0}=0$

图 1－7　$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的源点

（a）正源点 M_0；（b）负源点 M_0；（c）非源点 M_0

若 S 为闭面，且 $\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}>0$，则闭面 S 内穿出的 $\boldsymbol{A}$ 矢量线比穿入的多，亦即 S 内必有发出 $\boldsymbol{A}$ 矢量线的地方。如图 1－7 所示，若 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}|_{M_0}>0$，则点 M_0 必是 $\boldsymbol{A}$ 矢量线发生之点，这样的点称为 $\boldsymbol{A}$ 的正源点；若 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}|_{M_0}<0$，则点 M_0 必定是 $\boldsymbol{A}$ 矢量线的终止点，亦称之为 $\boldsymbol{A}$ 的负源点；若 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}|_{M_0}=0$，则点 M_0 不是 $\boldsymbol{A}$ 的源点。$\nabla\cdot\boldsymbol{A}|_{M_0}$ 的量值的大小，还正比于点 M_0 发出（或终止）的 $\boldsymbol{A}$ 矢量线根数的多少，也即正比于点 M_0 处 $\boldsymbol{A}$ 的源的强度。也就是说，若已知 $\boldsymbol{A}$ 的散度场 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$，则发出（或终止）$\boldsymbol{A}$ 通量（矢量线）的源点的有、无、在何处以及其强度等问题都能解决，故对矢量取散度运算有"验源"的作用。由于散度是标量，这种"源"也称为标量源或