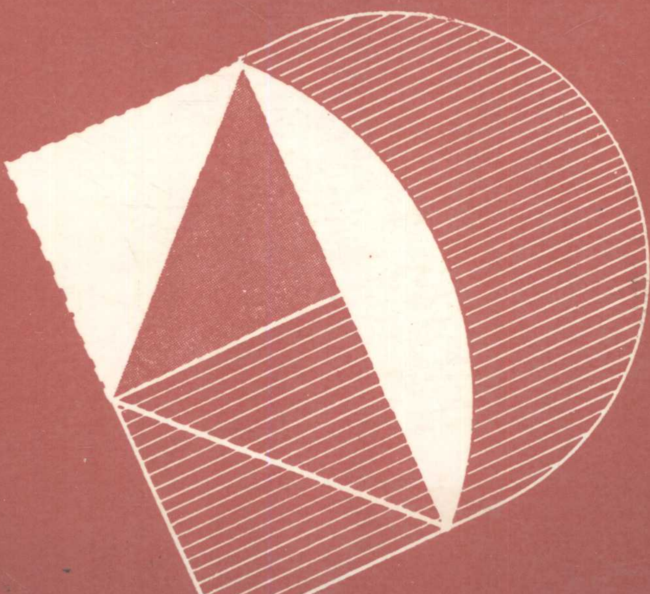
現代數學入門

（下）

戴久永 著



現代數學入門

（下）

現代數學入門（下）

發　行：凡　異　出　版　社
郵　撥：0 1 1 4 2 2 1～5
門　市：六　藝　圖　書　中　心
地　址：新竹市光復路二段460號
電　話：0 3 5－7 1 6 7 5 3
總經銷：學英文化事業有限公司

中華民國 76 年 1 月　1 版
定價：125 元

目　　錄

機　　率

統　　計

計 算 機

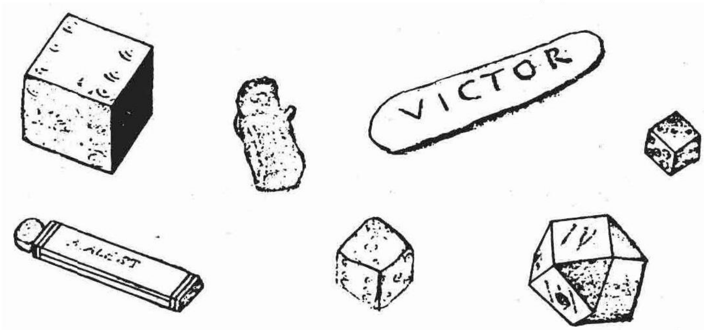
線性規劃

作業研究

對 局 論

I、機率簡史

機率理論就是討論各種偶然事件的數學理論，尋求偶然事件所應遵守的規則。嚴格地說起來，機率的數學觀念應算起源於十七世紀。機率觀念的發展與一般的數學系統不同的是它似乎是很自然的產生，然而在十七世紀以前却沒有太多的進展。但是雖然不曾得到眞正數學上的解答，有關機率的問題却經常在歷史上出現。假如：沒有人知道機遇遊戲到底至今已有多少年代了，而在古希臘和埃及的墓中曾發現與現代骰子非常類似的賭具，這些古代機遇遊戲的近似優勝率顯然是由經驗中求得的，並且在西元前 1150 年左右，中國人就曾討論過相當於尋找在投擲兩個或三個硬幣時各種不同的可能發生的排列問題。大約在同時希伯來僧侶賓・伊茲拉（Ben Ezra）曾以「排列」的方法解決占星術上的問題，他是十二世紀那些深信可由星辰來預卜未來的神靈學家之一。他們認爲當兩個行星彼此接近時，乃是上天顯示出各種重要事件前的一種徵兆。伊茲拉計算出當兩個或兩個以上的行星（日、月、金星、土星、木星、水星、火星）互相接近的可能狀況共有 120 種，正如往後我們看到的。「排列」和「組合」的各種情況經常都被視爲機率的問題來計算，但是伊茲拉和中國人所獲得的結果都缺乏足夠的深度和重大的意義，因此還不能算得上機率理論的先驅。



圖一　古希臘和羅馬的骰子

義大利人傑羅密・卡登（Jerome Cardan 1501～1576 或作Jerolamo Cardano）可以說是創造機率論的先驅人物，他寫了一本The Book on Game of Chance 是第一本有關機率的著作，卡登除了是占星家、哲學家和醫師外，他還是個數學家和賭徒。他的書是本賭經，它甚至透露了如何在賭博中作假和如何視破郎中動手脚的秘訣，他正確的指出投擲兩粒骰子時所可能發生的各種情形，並且也提及擲三粒骰子的可能結果。卡登也討論了其他的機率觀念，例如期望值。在他很多的絕技中有一項是正確的預言自己的死期，雖然他的預言是以自殺的手段實現的。他是個神秘的人物，雖然如此，他仍是個大怪傑。

齊瓦利爾・密爾（Chevalier de M′ere′）是另一個

懂得把數學應用於賭博贏錢的職業賭棍，但是他自己在數學方面的知識不夠廣博，因此他就把一些有關骰子的問題寄給巴斯卡（Blaise Pasal）研究，其時為1653年。巴斯卡依次地把問題記下來，並且開始和皮爾·費瑪（Pierre de Fermat）頻繁地書信往還，他們共同創造了機率理論的先聲。以下這賭注分配問題是研究機率理論的起點。甲乙二人玩遊戲，兩人獲勝的機會均等，約定誰先勝三局可獲得一筆賭注，進行至甲勝兩局，乙勝一局時，因為緊急事故遊戲必須中止，因此應該依照一種公平的原則分賭金，巴斯卡與費瑪依照各人先勝三局的機會主張甲應分得賭金的$\frac{3}{4}$，乙應得$\frac{1}{4}$，其解答如下：甲勝二局，乙勝一局，如果再繼續比賽以決定甲乙之勝負則可分為下列三種情形即①甲②乙甲③乙乙。則①②情形為甲勝，若③情形則乙勝。然而兩人之能力相當，於一局比賽中甲乙得勝之機率各為$\frac{1}{2}$，因此①②及③之機率各為$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$，因此甲先勝三局的機率為$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，乙為$\frac{1}{4}$。

布萊士·巴斯卡（Blaise Pascal 1623～1662）生於法國的Clermont Auvergne 地方，在早年已顯現他的天份，他的父親是一個有數學天賦的人，在他七歲的時候開始教育他，由於他的父親怕他這天才兒子過份用功，因此故意避口不談數學，但這反而引起了巴斯卡對數學的好奇心，在他十二歲的時候他堅持要學幾何學，由於和幾何學的接觸引起了他在數學方面的強烈興趣和才能。十六歲時他寫了一篇非常出色的有關圓錐曲線的創作，從十七歲一直到他在三十九歲去世為止，巴斯卡一直被嚴重的胃病糾纏著，但終日不斷

的病痛和失眠並不能使巴斯卡放棄他的工作。三十歲時他和費瑪共同研究發展機率理論，在這機率理論中，巴斯卡慢慢的把表面上看來似乎雜亂無章，無跡可尋的各種機遇（Chance）整理出一套秩序來，並將它演成理論。1662 年他把房子送給一個貧病交迫的家庭後，就去世了，死時方 39歲。

費瑪（1601～1665）生在法國的Beaumont-de-Lomagne。對於他早年學生時代的資料早已散失，綜觀他一生是相當寧靜平淡的。在他從事工作的三十四年中，他都是在公家機關中供職。他的職位大約是請願會的委員（Commissioner of requests）和議會中國王的顧問（King's councillor in the local parliament），數學只是他的消遣，他把大部分的休閑時間都花在發展數論，微積分和座標幾何等之創新的數學觀念及和巴斯卡一起研究機率問題。

巴斯卡和費瑪二人，對於把他們在機率上所研究出的成果出版成書並不感興趣，在他們兩人頻繁通信的數年之後，克利斯提・惠更斯（Christian Huygens）出版了On Reasoning in Games of Dice 一書，緊接著是瑞士的數學家亞可伯・柏努利（Jacob Bernoulli）對於發展機率理論所作的貢獻。柏努利提出一個非常有名的定理說：「設一事件在一連串足夠多次的獨立試驗中出現的機率爲一定值，對一任意小的正數，其相對次數和此定機率之差必小於此小正數」，若用數學式子表示即「設 n 爲獨立試驗的次數，m 爲事件出現的次數，對任意小數值 $\varepsilon>0$，當 $n\to\infty$，$\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon$」。這裡有個例子可幫助我們了解柏努利的意思。當我們擲銅板時，出現正面的機率應該是百分之五十。假設在10次的投擲中有 4 次正面，6 次反面則在此情形下，正面出

現的機率只有百分之四十，但這種情況並不認爲是不尋常，假如在 100 次的投擲中出現 56 次的正面，則正面出現率佔投擲次數的56％，在柏努利的定理中，當我們投擲 1,000 次時，則正面的出現率會越來越接近50％。有興趣的學生如要證實本定理不妨自己實際的去投擲一枚銅板 10 次、50 次、100 次、200 次，……等之，並且計算出各種情況下出現正的百分比，當投擲次數增加時正面出現的相對次數應該越來越接近 50％。

在柏努利之後的是亞伯拉漢・棣美弗（Abraham De Moivre），棣美弗曾有一段很長的時間與倫敦的賭徒混在一起，他寫了Doctrine of chances 一書，也是一本供賭博參考用的書。一如卡登他也預測了他自己的死期，棣美弗得了場重病，他發現每天睡眠時間比前一天多 10 分鐘，他預估自己將死於睡23小時45分鐘的那一天。自從拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace）在 1812 年寫了Analytic Theory of Probability 一書後，機率就開始脫離了賭博的範疇。機率理論轉而在科學方面發展，並且經由人們的努力而應用到非常廣範的界域。例如拉普拉斯把機率理率應用到天文學上。爲了求得天文學上精確的數據，必定要運用到機率理論。拉普拉斯了解其所測量出的結果只是近似值，是故還須利用機率理論來估計其可靠度。有了這些計算的結果，他就能據以判斷其所觀測出的是隨機的抑或是有必定的原因。機率理論的起源乃是爲了賭博，時至今日它却成爲天文學上有用的工具，在統計技巧的發展上也同時需要機率理論的應用。1982 年約翰・馮紐曼（John von Neumann）發表了一篇有關撲克牌策略的論文。參與蘭德計劃（Project Rand）的

人員研習這論文後將它應用到軍事戰略上。如今機率理論已被廣泛應用在保險、生物學、教育測度、物理學、心理學、經濟學、製造業、社會科學和政治學等等方面了。

II、機　率

定義：假設有一實驗能產生 n 種不同的結果，且每一結果發生的機會相等。假如有一單獨的事件 A 在 n 次的試驗中發生 s 次，則此事件 A 的機率爲 s／n，我們以 P(A) 來表示之。

$$P(A)=\frac{\text{A 事件成功的次數}}{\text{所有可能出現結果的總數目}}$$

例 試求投擲一銀幣時出現正面的機率爲多少。

解 投擲一銀幣有兩種可能的情形，正面、反面。將其中的一個結果（正面）視爲成功的結果，則 P（正面）$=\frac{1}{2}$。

例 從一副已經洗過的撲克牌中抽出 A 的機率爲多少？

解 此事件有 4 個成功的結果，

1. 黑桃 A，
2. 紅心 A，
3. 方塊 A，
4. 黑梅 A，

而這副牌可有 52 個不同的結果，因此

$$P(A)=4/52=1/13$$

例 找出穿越過日落大道（ Sunset Boulevard ）而不被車撞死的機率？

解 本題共有兩種可能的結果：穿越過日落大道而不

，穿越過日落大道被車撞死。由上有人或許會

爲½，但½不正確，在這個例題中兩種可能

其發生的機會並不一樣大。穿越過大道不

能性比可能被車撞武的機會顯然要大得

們在這時候還無法解它。在應用 P(A)

我們必須確定每一結果出現的機會要

例 找出一對夫婦有三個孩子而有下列情

的機率：

1. 三個孩子全是男孩，
2. 三個中至少有一男孩，
3. 三個中至少有兩個女孩，

解 在本題中假設生男生女的機

現的結果其機會相等。

表一

第一個孩子	第二個
男	
女	
男	
男	
男	
女	
女	
女	

原破頁，85.4.15

[illegible]

列出之各種可能情況必須注意孩子排行次序的問題，
女孩子再生兩個男孩子的事件和先有兩個男孩再生
事件是有分別的。
出的八種可能的結果中，只有一結果符合全是
P（三個男孩）＝1／8 。
結果中，只有一種情況少於一個男孩，P（
＝7／8 。
中，有四種包含至少有兩個女孩的情況
孩）＝4/8＝1／2 。
爲奇數的機率爲多少？
體，在它的6個面上分別有點，以
，是故有6個可能的結果：1，2
6個結果中有3個是奇數：1，

＝1／2。
的機率爲多少？
：1，2，3，4，5，6。
與9相符因此P(9)＝0 。
」
的機率爲多少？
，2，3，4，5，6，。
結果小於10 點，所以有
於10點）＝6／6 ＝1 。

難以決定。譬如有賭博遊
人對於這類遊戲不十分清

楚，我們特此把美國一種擲雙骰子的遊戲介紹出來，這種遊戲稱為「Craps」。通常是兩個或兩個以上的人來玩。參加的人中的一個作莊，先把他要下的賭注放在中間。例如10根火柴棒，然後其他人可任其所欲下賭注，為原賭注的任意倍數（例如$\frac{2}{5}$），沒有被押上的部份得歸還莊家，莊家開始擲兩個骰子。

1. 假如第一次擲出的點數是7或11，則莊家獲勝。
2. 假如第一次擲出的點數是2，3或12，則莊家輸。
3. 假如第一次擲出的點數是4，5，6，8，9或10則勝負不分。

在這情形下莊家還須繼續擲骰子，一直到他擲得7點或是又擲得他第一次擲到的點數。假如他是先擲得7點他就輸了，假如他在擲得七點之前得到和第一次所擲的點數相同時則就算他贏。莊家獲勝的五個例子如下：

7.

11.

8,8.

4,5,8,9,11,2,4.

6,2,3,3,5,9,8,8,8,11,6.

莊家輸的五個例子如下：

2.

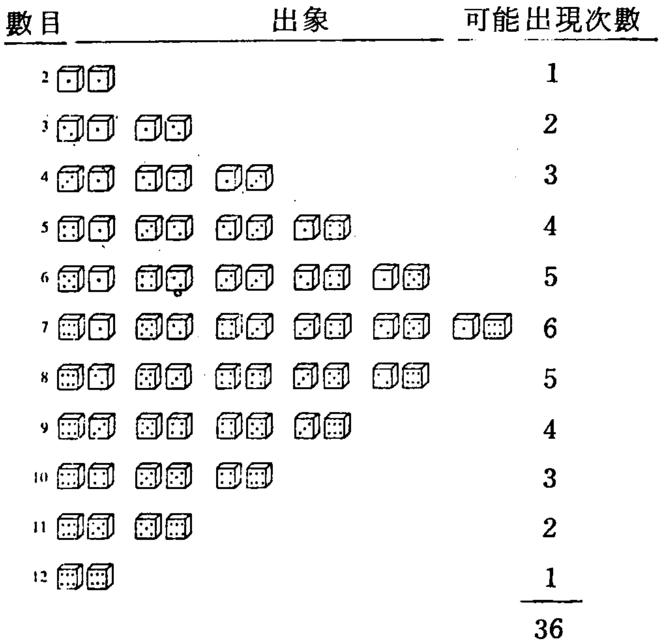
3.

12

4,5,5,11,7.

8,9,11,2,3,5,5,6,9,3,2,10,7.

現在讓我們看看擲兩個骰子得到 7 點的機率爲多少？我們可能擲出 11 種不同點數：2 ，3 ，4 ，5 ，6 ，7 ，8 ，9 ，10 ，11 ，12，而 7 點是其中之一，那麼我們就可說擲得 7 點的機率爲 1/11 ，但這是錯誤的。錯誤即在於對擲雙骰子所得之結果沒有正確的認識。其實它共產生36種不同的可能結果而不是11 種。在圖二中可以注意到擲得 7 點時有 6 種不同的方式。而在計算機率時每一個可能的方式都要分別予以計入。



圖二　擲二骰子所可能出現的各種情形

例 找出擲兩個骰子時得到 7 點的機率。

解 擲得 7 點有 6 種方法，而共有 36 種可能的結果，因此

$$P(7) = 6/36 = 1/6.$$

例 在上述「Craps」的遊戲中，莊家在第一次的投擲能贏得的機率爲多少？

解 在第一次投擲中要得到 7 點或 11 點才能獲勝，而在 36 個可能的結果中，有 8 個是可擲出 7 或 11 點的。6-1, 1-6, 3-4, 4-3, 5-2, 2-5, 6-5, 5-6 因此其獲勝的機率爲 8／36 或是 2／9。

例 例若莊家在第一次擲得 10 點，那麼他贏的機會爲多少？

解 如果在第一次投擲得 10 點，那麼此遊戲還要進行如下：莊家繼續擲骰子，一直到擲得 7 點或 10 點爲止。如是先得到 7 點他就輸了。假如他在擲得 7 點之前先得到 10 點他就贏了。已知在每一次的投擲中，$P(7) = 1/6$，$P(10) = 1/12$。

因此得到 7 點而輸的機率是爲得到 10 點而贏的機率的兩倍。因此莊家擲得 10 點之後，此遊戲公平的賭注應該是 $ 2 對莊家的 $ 1，莊家一定會贏或輸，也就是說 P（贏或輸）＝1，因爲 P（贏或輸）＝1 而 P（輸）＝2·P（贏），我們可以得到 P（輸）＝2／3，P（贏）＝1／3。這機率是在第一次投擲得到 10 點的最初假設之下而求得的。在已發生事件之條件下所求得之機率稱爲條件機率（Conditional probability）。

在上面最後一個例題中，指出擲得 7 點的機率爲 1／6，

而擲得 10 點的機率爲 1/2 ，那麼它的眞正意義是什麼呢？那就是說依平均數觀之，7 點出現的機會爲 1/6 ，10 點出現的機會爲 1/12，假如投擲一骰子 1200 次我們希望能得到 200 次 7 點和 100 次 10 點。可是這也許會有些誤差，例如我們可能會得到 187 次 7 點和 108 次 10 點。但一如亞可伯．柏努利所指出的，當我們增加投擲次數和作愈多次的實驗時所得的結果，將會愈接近我們計算出來的機率。對於「大數法則」（Law of large numbers）的誤解往往會導致錯誤的發生，它並不是意味著在拿到一連串的輸牌之後，就會緊接著拿到好幾副的贏牌而使得每件事都能求得其平均數。它不是意味著在連投 9 次銅板得 9 次反面時，則第 10 次投擲得正面的機會將會比較大。它也不是暗示在一連串的輸之後，一個賭徒應該下更高的賭注，希望能幸運的平衡勝負次數的比率。縱然事實證明贏的總百分比會越來越接近我們所計算出的機率，但一位賭徒如運用這種戰術，他可能會輸得更慘。表二說明了爲什麼會發生這種情形。

上表乃是兩個人玩擲銅板遊戲的例子，每一個人獲勝的機會應該是 50 %。

在賭博中連續輸掉 10 次之後（見表二），賭徒基於獲勝的機會應該愈來愈接近其所期望的 50 % ，因此在第 11 次的賭博中開始下雙倍的賭注如表所示，他贏的百分比是增加了，但在此同時他輸掉的錢仍繼續在增加。如果他不把賭注加倍那麼他輸的錢只有 $ 12 ，而不是 $ 14 ，假如他繼續把賭注加倍，這位賭徒獲勝的百分比很可能會爬升到49.%，但他也很可能在此過程中輸掉了好幾千元。