国内外
数学竞赛题解

（上）

陕西师范大学图书馆
《国内外数学竞赛题解》编辑组　编

说　明

在党的十一届三中全会精神鼓舞下，为了积累资料，帮助中学提高数学教学质量，为实现科学技术现代化创造条件，我们特搜集整理了国内外中学数学竞赛试题和解答。其中：国内部分，包括全国和各省、市、自治区以及其所在地的历届中学数学竞赛试题及其解答；国外部分，主要有国际中学生数学奥林匹克竞赛试题和美苏等国中学生数学竞赛试题及部分题解。试题共计1600余个，分上、中、下三册。国内部分，文化大革命前为一册，文化大革命后为一册；国外部分，全一册。仅供内部参考。

本书在汇编过程中，得到不少大、中学校的数学老师和数学专业工作者的热情帮助和积极支持，乾县印刷厂承担了全部印刷任务，我们在此一并表示深切的感谢！

由于我们水平所限，加之时间仓促，书中一定会有不少缺点错误，希望同志们批评指正。

编　者

一九七九年五月

目　　录

（国内部分）

一九六四年

一、一九五六年北京市中学数学竞赛试题和解答

第 一 试

1.证明$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$对任何正整数n都是整数，并且用3除时余2。

证明： $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}-1$

$$=\frac{n(n+1)}{2}(2n+1)-1 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

对任何整数n，$\frac{n(n+1)}{2}$为整数，故原式为整数。(1)式末端又可以写作$\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{8}-1$，而$2n, 2n+1, 2n+2$中至少有一个是3的倍数，又3与8互质，所以$\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{8}$是能被3整除的整数．于是原式等于3的整数倍减去1，因而用3除它时必余2．

2.设方程$x^2-px+q=0$的两根为r和s，且它都不等于0。求以$r^2+\frac{1}{s^2}$和$s^2+\frac{1}{r^2}$为根的方程（不必解出原方程）。

解： 所求方程应为$\left[x-\left(r^2+\frac{1}{s^2}\right)\right]$

$$\left[x-(s^2+\frac{1}{r^2})\right]=0$$

即 $x^2-(r^2+s^2+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{s^2})x+(r^2s^2+2+\frac{1}{r^2s^2})=0\cdots(1)$

但是r、s是$x^2-px+q=0$ 的两根，由根与系数的关系知道 $r+s=p$，$r\cdot s=q$，所以

$$r^2+s^2+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{s^2}=\frac{(r^2s^2+1)(r^2+s^2)}{r^2s^2}$$

$$=\frac{(q^2+1)(q^2-2q)}{q^2},\quad r^2s^2+2+\frac{1}{r^2s^2}$$

$$=q^2+2+\frac{1}{q^2}=(q+\frac{1}{q})^2.$$

将以上结果代入（1），得方程

$$x^2-\frac{(q^2+1)(p^2-2q)}{q^2}x+(q+\frac{1}{q})^2=0\ .$$

3．试证恒等式

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots\cdots+\cos nx=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

证：$\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin(n-\frac{1}{2})x=2\sin\frac{1}{2}x\cos nx,$

$$\sin(n-\frac{1}{2})x-\sin(n-\frac{3}{2})x=2\sin\frac{1}{2}x\cos(n-1)x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{1}{2}x=2\sin\frac{1}{2}x\cos x$$

$$\sin\frac{1}{2}x = 2\sin\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{2}\right),$$

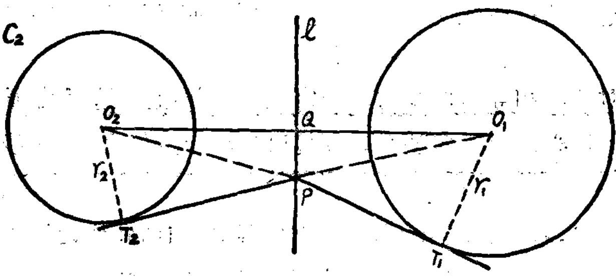
将上面所有等式的两边分别相加，则得

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x = 2\sin\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots\cdots\right.$$
$$\left.+\cos nx\right),$$

所以$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots\cdots+\cos nx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

4．设C_1、C_2是给定的两个圆，又C_1，C_2不相交，并且一个在另一个的外部，由一点p作C_1、C_2的切 线pT_1、pT_2，设$pT_1 = pT_2$，求p点的轨迹。

解：设C_1，C_2的圆心分 别 为O_1、O_2，作$pQ \perp O_1O_2$（或其延长线）交O_1O_2于Q，



则　$$O_1p^2 = pT_1^2 + O_1T_1^2 = pT_1^2 + r_1^2,$$

$$O_2p^2 = pT_2^2 + O_2T_2^2 = pT_2^2 + r_2^2,$$

两式相减，得：

$$O_1p^2 - O_2p^2 = pT_1^2 + r_1^2 - pT_2^2 - r_2^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

然而　$O_1p^2 - O_2p^2 = (O_1Q^2 + Qp^2) - (O_2Q^2 + Qp^2)$
$= O_1Q^2 - O_2Q^2$，

所以　$O_1Q^2 - O_2Q^2 = r_1^2 - r_2^2$。

或者　$(O_1Q + O_2Q)(O_1Q - O_2Q) = r_1^2 - r_2^2$。

若两圆互不包含，则Q在O_1、O_2之间，而

$$O_1Q + O_2Q = O_1O_2 = d.$$

于是$O_1Q - O_2Q = \frac{r_1^2 - r_2^2}{d}$。

这说明Q内分O_1O_2之分比为常数，若C_1包含C_2，则Q在O_1O_2之延长线上，而

$$O_1Q - O_2Q = O_1O_2 = d,$$

于是$O_1Q + O_2Q = \frac{r_1^2 - r_2^2}{d}$。

这说明Q外分O_1O_2之分比为常数．两种情形都表示Q为定点，与p点的选取无关。所以

对两圆相等的切线的点一定在一直线l上，这直线垂直两圆的连心线于一定点Q，而Q以$(r_1^2 - r_2^2)/d$之比分线段O_1O_2……………………………………………………（1）

反之，若在直线l上任取一点R，再由p向两圆作切线RS_1，RS_2，则$RS_1^2 = RO_1^2 + r_1^2 = RQ^2 + O_1Q^2 + r_1^2$。

$$RS_2^2 = RO_2^2 + r_2^2 = RQ^2 + O_2Q^2 + r_2^2.$$

根据（1）又知道$O_1Q_2 + r_1^2 = O_2Q^2 + r_2^2$。所以$RS_1^2 = RS_2^2$，因此知道：

从直线l上任意一点到两圆的切线必然长度相等。…(2)

总结（1）和（2）即知p点的轨迹是直线l。

第 二 试

1.有一群儿童，他们的年龄之和50岁，其中最大的13岁，有一个是10岁；除去10岁的这个儿童之外，其余儿童的年龄恰好组成一个等差数列。问有几个儿童？每个儿童几岁？

解：把最大儿童的年龄记作a，即是$a=13$。

设除去10岁的那个儿童之外，还有$b+1$个儿童，并设他们岁数的公差为d，则这$b+1$个儿童的岁数为

$$a,\ a-d,\ a-2d,\ \cdots\cdots,\ a-bd.$$

于是 $$a+(a-d)+(a-2d)+\cdots\cdots+(a-bd)$$

$$=(b+1)a-\frac{b(b+1)d}{2}=50-10=40$$

或者$(b+1)(2a-bd)=80$

可见$(b+1)$能整除80，但$2a-bd=a+(a-bd)>13$，故$b+1<\frac{80}{13}$，又$2a-bd<2a=26$，故$b+1>\frac{80}{26}$。将这两方面结合起来，就知道$b+1$只能是4或5。

当$b+1=4$时，$4(26-3d)=80$，所以$d=2$，将b、d之值代入（1）得到：13、11、9、7。所以一共$4+1=5$个儿童，他们的年龄分别为：13，11，10，9，7。

当$b+1=5$时，$5(26-4d)=80$，所以d为非整数。所以这种情况不可能，于是解是唯一的。

2. 证明$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=1$这里的两个三次根都取实数。

证明：设$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=x$，则

$$x^3=1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}+1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$+3\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)}$$

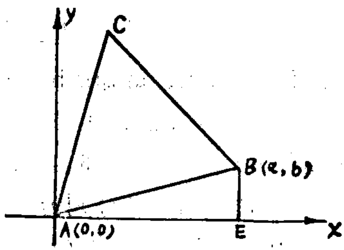
$$\cdot\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}\right)$$

$$=2+3\sqrt[3]{1-\frac{4}{9}\cdot\frac{7}{3}}\cdot x=2-x.$$

于是 $x^3+x-2=0$，这方程的唯一实数根是$x=1$，故命题得证。

3．在平面上任取三点其坐标为整数（正整数、负整数或零），证明此三点不能组成正三角形。

证明：经过平移，可取一顶点为原点A（o、o），而其余两顶点的坐标仍为整数。



设第二顶点为B(a、b)，而C在AB之上方．若△ABC为正三角形，则$AC=AB=\sqrt{a^2+b^2}$，并且C的位置完全确定了．现在把C的坐标计算一下，为此先求∠EAC的余弦与正弦：

$$\cos\angle EAC=\cos(\angle EAB+60^\circ)=\frac{a-\sqrt{3}b}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

同理

$$\sin\angle EAC=\frac{\sqrt{3}a+b}{2\sqrt{a^3+b^2}}.$$

用$AC=\sqrt{a^2+b^2}$乘$\angle EAC$的余弦与正弦，便得C的坐标$(\frac{a-\sqrt{3}b}{2},\ \frac{\sqrt{3}a+b}{2})$，要这坐标是整数，只有$a=0$，$b=0$。

所以坐标为整数的三点不能组成正三角形。

4．证明：在空间中不可能有这样的多面体存在，它们有奇数个面，而它们的每个面又都有奇数条边。

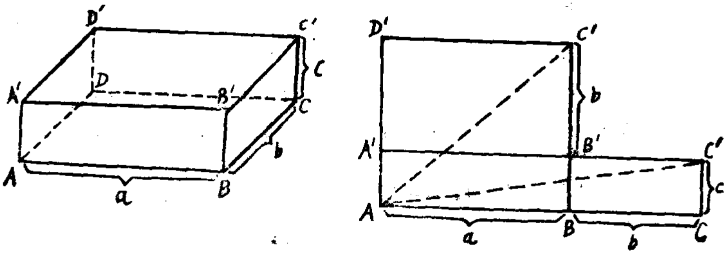
证明：设有n个面，n为奇数，而每个面又有奇数条边

S_1，S_2，S_3，……，S_n。

则多面体的总棱数为$S=\frac{S_1+S_2+\cdots\cdots+S_n}{2}$（因为每边都是两个面公用的），但等式右边分子是奇数（奇数个奇数的和），因此右边不是整数，而左边是整数，所以不可能。

5．已给一个长方体，三棱不等。现在要由一顶点沿表面到对角顶点，求最短的路线。

解：设长方体的三棱长为a，b，c而且$c<b<a$，从立体几何知道，假定要由图中的A角顶到C'角顶（左图），相对短的路线有两条，一条要跨过$A'B'$棱，路线之长是（右图）$\sqrt{a^2+(b+c)^2}$，



另一条要跨过BB'棱，路线之长为（右图）。

$$\sqrt{(a+b)^2+c^2},$$

由假设，$c<a$，所以

$$\sqrt{a^2+(b+c)^2}<\sqrt{(a+b)^2+c^2}$$

可见，最短路线相当于右图中AC'的路线，其长是

$$\sqrt{a^2+(b+c)^2}$$

6．解方程组：
$$\begin{cases} x^2=6+(y-z)^2 \\ y^2=2+(z-x)^2 \\ z^2=3+(x-y)^2. \end{cases}$$

解：改写原方程组为：

$$\begin{cases} 6=x^2-(y-z)^2=(x-y+z)(x+y-z) & (1) \\ 2=y^2-(z-x)^2=(y-z+x)(y+z-x) & (2) \\ 3=z^2-(x-y)^2=(z-x+y)(z+x-y) & (3) \end{cases}$$

（1）×（2）×（3）得：

$$36=(x-y+z)^2(y+z-x)^2(y+x-z)^2 \qquad (4)$$

故有 $(x-y+z)(y+z-x)(y+x-z)=\pm 6$ （5）

（5）÷（1）得 $y+z-x=\pm 1$ （6）

（5）÷（2）得 $x-y+z=\pm 3$ （7）

（5）÷（3）得 $y+x-z=\pm 2$ （8）

（6）+（7）+（8）得 $x+y+z=\pm 6$ （9）

（9）-（6）得 $2x=\pm 5$　　$x=\pm\frac{5}{2}$.

（9）-（7）得　$2y=\pm 3$　　$y=\pm\frac{3}{2}$.

（9）-（8）得　$2z=\pm 4$　　$z=\pm 2$.

故得二组解 $\begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \\ z=2 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} x=-\dfrac{5}{2} \\ y=-\dfrac{3}{2} \\ z=-2. \end{cases}$

7．求 $x^2-2x\sin\frac{\pi x}{2}+1=0$ 的所有实根。

解：设x为实数，则 $\sin\frac{\pi x}{2}\leqslant 1$，$(\sin\frac{\pi x}{2})^2\leqslant 1$ （1）

又x为实数，则所给二次方程之判别式应大于或等于零：

$$(2\sin\frac{\pi x}{2})^2-4\geqslant 0 \quad 即 \quad (\sin\frac{\pi x}{2})^2\geqslant 1 \qquad (2)$$

比较以上两式，就知 $(\sin\frac{\pi x}{2})^2=1$

从而 $\sin\frac{\pi x}{2}=\pm 1$

故 $x=\pm 1，\pm 3，\pm 5，\cdots\cdots$

代入原式，只有 $x=\pm 1$ 满足，所以，所求实根为 $x=\pm 1$。

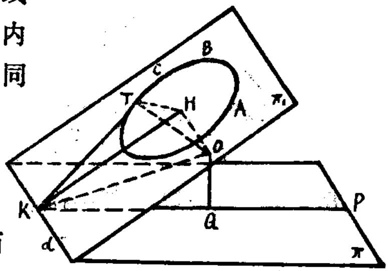
8．在已知平面的一侧有不共线的三个定点。如果有一个球通过这三点，并且与平面相切，求这切点的位置。

〔注〕本题只限用元规和直尺。

解：设三定点A、B、C决定的平面 π_1，与所设的平面 π 交于直线d，过A、B、C的圆的中心为H，过H作垂直于d的平面，与d交于K，与 π 交于KP。设K在圆H之外，

作KT切圆H与T。在直线KP上取线段$KQ=KT$，则Q为所求的切线。

证明：在过H、K、Q的平面内，过H作KH的垂线，过Q作KQ的垂线，设两垂线的交点为O，OQ垂直于π内的d及KP，所以垂直于π。同理$OH\perp\pi_1$。



因为$OH\perp KT$，$HT\perp KT$，所以KT垂直于平面OHT，$KT\perp OT$，因而$\triangle OKT$是直角三角形。

在两直角三角形OKT与OKQ中，因为OK是它们的公共斜边，$KT=KQ$，所以这两个直角三角形全等，从而$OQ=OT$。

因为$HA=HB=HC=HT$，$OH\perp\pi_1$，所以$OA=OB=OC=OT$，再根据前边的结果$OQ=OT$，即得$OA=OB=OC=OQ$。

以O为圆心，OQ为半径作球，这球一定通过A、B、C三点，而且切平面π于Q，所以Q是所求的点。

讨论：$\pi_1//\pi$时一解；π_1与π相交，而交线d在园H之外时两解；若d切圆H于K，则当$\pi_1\perp\pi$时一解，否则无解。

二、1956年上海中学数学竞赛试题和解答

复　赛

1．（a）设n为正整数，证明$13^{2n}-1$是168的倍数。

解：∵ a^n-1 能被 $a-1$ 整除又∵ $13^{2n}-1=(13^2)^n-1$，$13^2-1=168$ 而 $(13^2)^n-1$ 能被 13^2-1 整除，故 $13^{2n}-1$ 能被168整除

∴ $13^{2n}-1$ 是168的倍数。

(b) 问：具有那种性质的自然数n，能使 $1+2+\cdots\cdots+n$ 整除

$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots\cdots n$?

解：由等差数列求和公式得 $1+2+3+\cdots\cdots+n$

$$=\frac{n(1+n)}{2}，\text{而 } 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots\cdots n=n!\ .$$

$\dfrac{n!}{\frac{n}{2}(1+n)}$ 是否整数，可以从下列情况讨论：

(1) 当n是奇数　即 $n=2k+1$ 时（K为正整数）则

$$\frac{n!}{\frac{n}{2}(1+n)}=\frac{(n-1)!}{\left(\frac{1+n}{2}\right)}=\frac{(2k)!}{(k+1)}$$

∴ $2k\geq k+1$ 故 $k+1$ 必可整除 $(2k)!$ 如 $k=0$，即 $n=1$，只要假定 $0!=1$，亦不例外。

(2) 当n是偶数，即 $n=2k$ 时（k为正整数），分两种情况讨论：

①当 $n=2k$，$1+n=2k+1$，而 $2k+1$ 为合数时。

设 $2k+1=a\cdot b$，$a\neq b$，则a，b必为奇数，均不大于 $\dfrac{2k+1}{3}$.

$$\therefore\ \frac{n!}{\frac{n}{2}(1+n)}=\frac{2(n-1)!}{1+n}=\frac{2(2k-1)!}{2k+1}$$

$$=\frac{2(2k-1)!}{a\cdot b}$$

$$=\frac{2[1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots(2k-4)(2k-3)(2k-2)(2k-1)]}{a\cdot b}$$

$$=2\left[\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(2k-3)(2k-1)}{a}\right]\cdot$$

$$2\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(k-2)(k-1)}{b}\right]$$

但 $2k-1\geqslant\frac{2k+1}{3}$和 $k-1\geqslant\frac{2k+1}{3}$($k\geqslant 4$)

∵$k<4$就不适合所设的条件，在$1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2k-3)\cdot(2k-1)$中，必能找到一个与a相同的奇数；同理，在$1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(k-2)(k-1)$中，也能找到一个与b相同的奇数。故在原式中，$\frac{2(2k-1)}{a\cdot b}$必为整数。

同理当$a=b$，或a、b再可分解时，所得的结论一样。

②当$n=2k$而$1+n=2k+1$，而$2k+1$为质数时。

因$n+1$大于$(n-1)!$中每一个数，因此$2(n-1)!$不可能被$1+n$整除。

∴本题结论：n为一个自然数，当$n+1$不是质数时(但是2除外)，则$1+2+3+\cdots\cdots n$能整除$1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n$。

2．解不等式$10^{2\lg x}+4x-\log_2 32>0$

解：∵$10^{2\lg x}=10^{\lg x^2}=x^2$，及$\log_2 32=5$

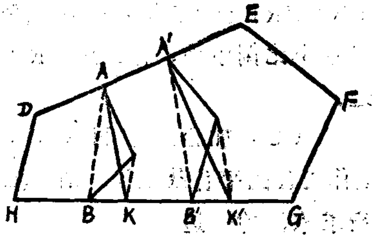
∴$x^2+4x-5>0$，得$x>1$或$x<-5$

∵$x<-5$时，$\log x$无意义。∴本题的解为$x>1$。

3．两块水田之间有一条曲折的水沟（如图），今要把水沟的两岸变成直线而每块水田的面积不变，

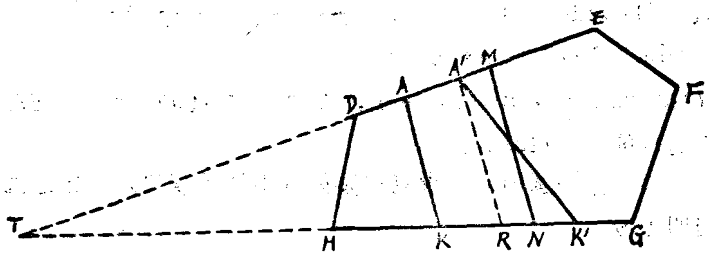
(a) 如A，A′两点不变，则水沟应如何配置？

(b) 如A点不变，而要求水沟两岸平行，则水沟又应如何配置？各说明其方法。



解：(a) 它的要求是把多边形变成边数少2的等积多边形，而A，A′两点不变，作法：联AB，作CK//AB，联AK，仿此作出A′K′。

(b) 它的要求可从(a)所得的四边形AA′K′K变成一等积的梯形AKNM使NM//AK。



分析：令MN为所求作的线

(1) 如DA′不平行于HK′，则延长A′D及K′H使相交于T，作A′R∥AK，△TA′R∽△TMN，∴△TA′R的面积：△TMN的面积＝$TR^2:TN^2$ 但△TMN＝△TA′K′，∴△TA′R的面积：△TA′K′的面积＝$TR^2:TN^2$，又△TA′R与△TA′K′若分别以TR与TK′为底时，则为等高的三角形，∴△TA′R的面积：△TA′K′的面积＝TR:TK′

因此得$TR^2:TN^2=TR:TK^2$　∴$TN=\sqrt{TR\cdot TK'}$

作法：延长A′D与K′H相交于T，作A′R∥AK，交