



面向 21 世纪 课程 教材
Textbook Series for 21st Century

线性代数

第三版

主 编 张良云

副主编 毕守东



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面向 21 世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

线性代数

X i a n x i n g D a i s h u

第三版



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内 容 提 要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材,第一版是面向 21 世纪课程教材。本书突出了矩阵的作用,强调了线性变换思想,力求在处理上深入浅出。全书共六章,分别为矩阵,行列式,向量组的线性相关性,线性方程组,特征值、特征向量与二次型,线性空间与线性变换。

本书是高等院校农林类、水产类各专业教材,也可作为教学要求相近的工科类学生或科研人员的教材、教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/张良云主编.—3版.—北京:高等教育出版社,2010.7

ISBN 978-7-04-030067-3

I. ①线… II. ①张… III. ①线性代数-高等学校-教材 IV. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第091514号

策划编辑	李蕊	责任编辑	李蕊	封面设计	张楠
版式设计	余杨	责任校对	姜国萍	责任印制	韩刚

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120

购书热线 010-58581118
免费咨询 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 廊坊市科通印业有限公司

网上订购 <http://www.landrac.com>
<http://www.landrac.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

开 本 787×960 1/16
印 张 10.5
字 数 190 000

版 次 2001 年 1 月第 1 版
2010 年 7 月第 3 版
印 次 2010 年 7 月第 1 次印刷
定 价 15.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 30067-00

第三版前言

自 2001 年出版以来,本书得到了全国许多高等学校师生的关心和帮助,他们提出了许多有益的意见和建议。本次修订在第二版的基础上,修改了书中一些不确切之处;同时根据教学需要,增加了三套模拟试题及答案。

作为普通高等教育“十一五”国家级规划教材,编者感到责任重大,尽力把它编写好,奉献给读者。同时,作为系列教材之一,该教材被列入江苏省立项精品教材项目,在此向关心和支持本书工作的广大教师表示衷心的感谢。

本次修订由张良云定稿。参加修订的有南京农业大学的张良云(第一章、第六章)、安徽农业大学的毕守东(第四章)、南京林业大学的杨明辉(第五章)、上海水产大学的郑奕(第二章)和南京农业大学的周小燕(第三章及模拟试题)。

由于水平有限,不妥之处在所难免,恳请读者和使用本教材的教师及专家批评指正。

主编

2010 年 3 月于南京

第二版前言

本书第一版自 2001 年出版以来,得到了全国许多高等院校师生的关心和帮助,他们提出了很多有益的意见和建议。在教材使用过程中,我们也发现了一些问题和需要进一步充实完善的地方。本次修订在保持原貌的基础上,修改了原书中一些不确切之处;根据教学需要,补充了一些例题和习题,增强了教学适应性。

2002 年,本书被评选为普通高等教育“十五”国家级规划教材,这对我们的修订工作提出了更高的要求。作为系列教材之一,该教材于 2002 年又荣获了江苏省优秀课程群奖,在此向关心和支持本书工作的广大教师表示衷心的感谢。

主编

2002 年 12 月于南京

第一版前言

线性代数是大学数学教育中一门主要基础课程,对于培养面向 21 世纪人才起着重要的作用。本书是编者在进行多年教学实践和改革探索的基础上,为适应不同层次线性代数教学要求而编写的。

作为面向 21 世纪高等农林院校本科数学(含生物统计)系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践(项目编号为 04-6)的系列教材之一,本书主要适用于农、林、水产等高等院校各专业使用,课内学时为 36 至 54 学时的都可选用。同时还可作为教学要求相近的工科类学生及农、林、水产等科技人员的教材或参考书。

根据教学改革的精神和本科各专业对线性代数内容的不同要求,我们在内容、结构等方面做了精心选择和编排,具有如下几个方面的特点。(1) 凯莱(Cayley)在 1885 年的一篇文章中指出:在逻辑上,矩阵概念先于行列式,而在历史上,两者次序正好相反。在本书中,我们正是根据逻辑发展,先讲矩阵,后讲行列式,并且巧妙地处理好这两部分的内容与结构。(2) 为了帮助学生更好地学习并了解线性代数,我们有选择地介绍了矩阵、行列式以及克拉默(Cramer)法则等重要概念的数学历史,这样可以培养他们的学习兴趣,从而激发他们在学习线性代数的热情。(3) 在第三章,我们用较少的篇幅介绍了向量组的线性相关性,既简捷又突出重点,易教又易学,使读者在学习中能一气呵成。(4) 引入矩阵的特征值和特征向量,是为了讨论矩阵的对角化问题(主要是实对称矩阵的对角化)。把二次型化为标准形,就是把实对称矩阵对角化。鉴于此,我们把这两部分内容安排在第五章讲授,以便读者系统地学习。(5) 对本书习题安排,我们进行了精心设计:每节安排了比较简单的练习题,使初学者在学完本节之后,就能做这些题目,从而加深对所学概念的理解,达到初学的目的;在每章之后,我们精选了部分习题,题型是根据近几年考研情况而定的,但难度适宜,具有一定的层次与坡度;选题新颖,尽管有的题目乍看上去比较熟悉,但解起来需要一定的灵活技巧;并在书后附上习题解答。

随着计算机的日益普及与应用的深入,我们深深感到计算机对现代数学教育的重要作用。本书作为系列教材之一,我们把这部分内容安排在《数学实验》一书中编写,由专业教师统一讲授。

本书由张良云任主编,毕守东任副主编。参加编写工作的有南京农业大学的张良云(第一章、第六章)、安徽农业大学的毕守东(第四章)、南京林业大学的

杨明辉(第五章)、上海水产大学的郑奕(第二章)和南京农业大学的许爱娟(第三章)。全书由毕守东、张良云统稿(部分由许爱娟统稿),最后由张良云定稿。特别值得一提的是,编委荣幸邀请到复旦大学李大潜院士作为本书的主审,在此表示诚挚的谢意。同时我们衷心感谢杨崇瑞教授对本书的关心与鼓励,以及王凯捷教授和编委会对本书的有益建议。

由于水平有限,不妥或谬误之处在所难免,恳请读者和使用本教材的教师及专家批评指正。

主编

2000年8月于南京

目 录

第一章 矩阵	1
§ 1.1 矩阵的概念	1
§ 1.2 矩阵的运算	3
1.2.1 加法运算	3
1.2.2 数乘运算	4
1.2.3 乘法运算	5
1.2.4 矩阵的转置	8
§ 1.3 方阵的逆阵	10
§ 1.4 矩阵的分块	12
§ 1.5 初等变换与初等矩阵	15
1.5.1 矩阵的初等变换	15
1.5.2 初等矩阵	17
习题一	21
第二章 行列式	24
§ 2.1 行列式及其性质	24
§ 2.2 行列式的应用	37
2.2.1 伴随矩阵	37
2.2.2 矩阵的秩	40
2.2.3 克拉默 (Cramer) 法则	44
习题二	47
第三章 向量组的线性相关性	51
§ 3.1 n 维向量及其运算	51
§ 3.2 线性相关性	53
3.2.1 线性组合	53
3.2.2 线性相关性	55
§ 3.3 极大线性无关组	60
习题三	63
第四章 线性方程组	67
§ 4.1 线性方程组的基本概念	67
§ 4.2 高斯消元法	69

§ 4.3 齐次线性方程组	72
§ 4.4 非齐次线性方程组	76
习题四	83
第五章 特征值、特征向量与二次型	86
§ 5.1 正交矩阵	86
5.1.1 向量的内积	86
5.1.2 向量组的正交化	87
5.1.3 正交矩阵	90
§ 5.2 特征值和特征向量	91
§ 5.3 实对称矩阵的对角化	96
§ 5.4 二次型	103
5.4.1 二次型的矩阵表示	103
5.4.2 化二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为标准形	105
5.4.3 正定二次型	110
习题五	113
第六章 线性空间与线性变换	116
§ 6.1 线性空间及其性质	116
§ 6.2 线性空间的基、维数和坐标	119
§ 6.3 线性变换	123
6.3.1 线性变换及其性质	124
6.3.2 线性变换的矩阵表示式	125
习题六	127
模拟试题	130
习题及模拟试题答案	137

第一章 矩 阵

矩阵是线性代数的主要研究对象,是求解线性方程组的一个有力工具.它在许多数学分支中都有重要作用,许多实际问题还可以用矩阵表达并用有关理论得到解决.

§ 1.1 矩阵的概念

先看如下的一个例子.

例 1 某产品从产地 A_1, A_2, A_3 运到销地 B_1, B_2, B_3, B_4 , 其运输数量如下表所示.

运 输 量 产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}
A_2	s_{21}	s_{22}	s_{23}	s_{24}
A_3	s_{31}	s_{32}	s_{33}	s_{34}

其中 s_{ij} 表示从产地 A_i 运到销地 B_j 的产品数量, 那么这个调运方案可用如下数表表示:

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \end{pmatrix},$$

这个数表我们称之为矩阵.

定义 1 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$) 排成 m 行 n 列数表

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

叫做 m 行、 n 列矩阵, 简称为 $m \times n$ 矩阵^①.

这 $m \times n$ 个数叫做矩阵 A 的元素, a_{ij} 叫做矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素. 元素都是实数的矩阵叫做**实矩阵**, 元素都是复数的矩阵叫做**复矩阵**. 本书中的矩阵除特别说明外, 均指实矩阵.

一般地, 我们用黑体大写字母 $A, B, C, \dots$ 来表示矩阵.

上述矩阵 A 可简记为 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 或 (a_{ij}) , 也可记为 $A_{m \times n}$.

当 $m=1$ 时, A 成为 $(a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n})$, 称为行矩阵.

当 $n=1$ 时, A 成为

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

称为列矩阵.

当 $m=n$ 时, $m \times n$ 矩阵 A 称为 n 阶方阵.

对于两个矩阵, 如果它们的行数、列数分别相等, 则称它们为**同型矩阵**. 对于两个同型矩阵 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$, 如果它们的对应元素都相等, 即 $a_{ij} = b_{ij}$ ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$), 则称 A 和 B 是**相等矩阵**, 记为 $A=B$.

下面介绍常用的几个特殊矩阵.

元素都是零的矩阵称为**零矩阵**, 记作 O .

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 n 阶方阵, 如果当 $i \neq j$ 时, $a_{ij} = 0$, 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

则称 A 为**对角矩阵**.

如果对角矩阵 A 中的 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$, 则称 A 为**单位矩阵**, 记为 I 或 I_n , 即

① 矩阵这个词是西尔维斯特 (James Joseph Sylvester, 1814—1897) 于 1850 年首先使用的.

西尔维斯特是犹太人, 从 1841 年起他接受过一些较低的教授职位, 经过一些年的努力, 他终于成为霍布金斯 (Hopkins) 大学的教授, 并于 1883 年 70 岁时重返英格兰成为牛津大学萨维尔 (Sawilian) 几何学教授. 他是美国纯数学研究的创始人之一, 并创办了美国历史上第一种数学杂志《美国数学杂志》.

西尔维斯特一生致力于纯数学的研究. 他的成就主要在代数方面, 他同凯莱 (Cayley) 一起发展了矩阵和行列式理论, 共同奠定了不变量的理论基础.

$$I = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 n 阶方阵, 如果当 $i > j$ 时 $a_{ij} = 0$, 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

则称 A 为上三角形矩阵; 类似可定义下三角形矩阵

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ b_{21} & b_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

上三角形矩阵和下三角形矩阵统称为三角形矩阵.

练习 1.1

1. 设 A 为 4×5 矩阵, 若其元素 $a_{ij} = i - j$, 试求出 A .
2. 在下列矩阵中, 指出对角矩阵、三角形矩阵、单位矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

§ 1.2 矩阵的运算

1.2.1 加法运算

定义 2 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 与 $B = (b_{ij})_{m \times n}$ 是两个同型矩阵, 矩阵 A 与 B 的和定义为

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

简记为 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m \times n}$.

注意:只有当两个矩阵为同型矩阵时这两个矩阵才能进行加法运算.

不难证明,矩阵加法满足下面的运算律:

- (1) 交换律 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$;
- (2) 结合律 $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$;
- (3) $\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A}=\mathbf{O}+\mathbf{A}$, 其中 $\mathbf{O}$ 为零矩阵.

设矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})$, 记 $-\mathbf{A}=(-a_{ij})$, 则称 $-\mathbf{A}$ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的负矩阵. 显然有

- (4) $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{O}$.

由此,我们可规定矩阵的减法为

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B}).$$

例 2 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, 则

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.2.2 数乘运算

定义 3 数 k 与矩阵 $\mathbf{A}$ 相乘定义为

$$k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

简记 $k\mathbf{A}=(ka_{ij})_{m \times n}$.

矩阵的加法与数乘运算称为矩阵的线性运算,它们满足下面的运算律:

- (1) 结合律 $(kl)A = k(lA)$;
 (2) 分配律 $k(A+B) = kA + kB$;
 $(k+l)A = kA + lA$;
 (3) $1A = A$; $0A = O$,

其中 k, l 均为实数, A, B 均为 $m \times n$ 矩阵.

例 3 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, 且 $3A - 2X = B$, 求矩阵 X .

解 在 $3A - 2X = B$ 两端同时加上 $-3A$ 得

$$-2X = B - 3A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

两端再乘以 $-\frac{1}{2}$ 得

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.2.3 乘法运算

定义 4 设 $A = (a_{ij})_{m \times s}$ 与 $B = (b_{ij})_{s \times n}$, A 与 B 的乘积定义为

$$C = AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

其中 $c_{ij} = \sum_{l=1}^s a_{il}b_{lj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj}$, 即乘积矩阵 C 的第 i 行第 j 列的元素等于矩阵 A 的第 i 行元素与矩阵 B 的第 j 列对应元素的乘积之和, 如下式所示:

$$\begin{array}{c} \text{第 } i \text{ 行} \end{array} \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{第 } j \text{ 列} \\ \text{第 } j \text{ 列} \end{array} \begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{sj} & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{第 } i \text{ 行.} \end{array}$$

从上述定义可以看出, 只有当矩阵 A 的列数等于矩阵 B 的行数时, 两矩阵乘积 AB 才有意义, 且乘积矩阵 C 的行数与矩阵 A 的行数相同, C 的列数与矩阵 B 的列数相同. 例如, 设 A 是 2×3 矩阵, B 是 3×4 矩阵, 则 AB 为 2×4 矩阵, 但 BA 无意义.

一般地,矩阵的乘法运算律与数的乘法运算律有如下区别:

(1) 矩阵乘法不满足交换律. 一般地, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (见下面的例 4), 这样, 在进行乘法运算时, 注意矩阵的前后位置不要任意调换, 否则会出错. 特别地, 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, 我们就说 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 可交换.

(2) 在数量乘法运算中, 若 $ab=0$, 则 $a=0$ 或 $b=0$. 但在矩阵乘积运算中, 若 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$, 则未必有 $\mathbf{A}=\mathbf{O}$ 或 $\mathbf{B}=\mathbf{O}$. 例如

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}.$$

但

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O}.$$

(3) 若 $\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$, 则未必有 $\mathbf{B}=\mathbf{C}$, 即对矩阵乘法消去律一般不能成立.

例如

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

则有 $\mathbf{AB}=\mathbf{AC}=\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, 但 $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$.

容易证明, 矩阵乘法满足下面运算律:

- (1) 结合律 $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$;
- (2) 左分配律 $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$;
右分配律 $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A}=\mathbf{BA}+\mathbf{CA}$;
- (3) $k(\mathbf{AB})=(k\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(k\mathbf{B})$;
- (4) 设 $\mathbf{A}$ 是 $m \times s$ 矩阵, 则 $\mathbf{I}_m \mathbf{A}=\mathbf{A}, \mathbf{A} \mathbf{I}_s=\mathbf{A}$;
- (5) $\mathbf{AO}=\mathbf{O}, \mathbf{OA}=\mathbf{O}$.

由上面运算律我们知道, 在矩阵乘法中, 单位矩阵及零矩阵有类似于数字乘法中数“1”和“0”的作用.

有了矩阵乘法, 我们就可以定义 n 阶方阵的幂. 设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵, 定义

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n, \mathbf{A}^1 = \mathbf{A}, \mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}, \dots, \mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k \mathbf{A},$$

其中 k 为正整数. 这就是说 $\mathbf{A}^k$ 是 k 个 $\mathbf{A}$ 连乘.

由这个定义, 我们有如下指数律:

$$\mathbf{A}^k \mathbf{A}^l = \mathbf{A}^{k+l}, (\mathbf{A}^k)^l = \mathbf{A}^{kl},$$

其中 k, l 皆为非负整数.

必须注意, 在一般情况下 $(\mathbf{AB})^k \neq \mathbf{A}^k \mathbf{B}^k$, 只有当 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 可交换时, 才有

$$(AB)^k = A^k B^k.$$

例4 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(1) 求 AB 和 BA ; (2) 设 $C = BA$, 求 C^n (n 为正整数).

解 (1) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times (-1) + 2 \times 1 + 3 \times 0 = 1.$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad C^n &= (BA)^n = (BA)(BA) \cdots (BA) \\ &= B(AB)(AB) \cdots (AB)A \\ &= B(AB)^{n-1}A \\ &= BA \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

即对任意的正整数 $n \geq 1$, $C^n = BA$.

例5 某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计,然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部门,其缺额由招收新的非熟练工补齐.新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工.设第 n 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n ,记成向量 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 的关系式,并写成矩阵形式: $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$;

(2) 若 $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$, 求 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

解 (1) 由题意得

$$x_{n+1} = \frac{5}{6}x_n + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}x_n + y_n\right),$$

$$y_{n+1} = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}x_n + y_n\right),$$

故

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

(2) 由(1)知

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

由于 $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{17}{20} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{20} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$, 所以

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{20} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{20} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

故有方程组

$$\begin{cases} \frac{17}{20}x_1 + \frac{3}{5}y_1 = \frac{4}{5}, \\ \frac{3}{20}x_1 + \frac{2}{5}y_1 = \frac{1}{5}, \end{cases}$$

解得 $x_1 = \frac{4}{5}, y_1 = \frac{1}{5}$, 即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

1.2.4 矩阵的转置

定义 5 把 $m \times n$ 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的行与列互换后得到一个 $n \times m$ 矩阵, 称为 A 的转置矩阵, 记为 A' 或 A^T .

如果记 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 则由定义可知 $A' = (a_{ji})_{n \times m}$ (与 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 相对应).

例如, $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}.$