JINGJI YINGYONG SHUXUE JICHUER XIANXINGDAISHU QUANCHENG XUEXI ZHIDAO YU XITIJINGJIE

智文天下

经济应用数学基础二

线性代数 全程学习指导与习题精解

（人大四版）

主编◎滕加俊　寇冰煜　颜　超　吴　欧

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a_1 & a_1-a_2 & a_2-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ 0 & x-a_2 & a_2-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ 0 & 0 & x-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n)$$

重点难点提示
典型例题分析
课后习题全解
考研真题精解
同步测试检验
权威全面全能
考试考研无敌

$$\begin{vmatrix} a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

东南大学出版社
Southeast University Press

经济应用数学基础(二)

线 性 代 数

全程学习指导与习题精解

人 大 四 版

滕加俊　寇冰煜
颜　超　吴　欧　编著

东南大学出版社

·南京·

内容提要

《线性代数》是大学工学、经济学、管理学等专业学生必修的一门重要基础课，也是硕士研究生入学考试必考科目，赵树嫄编写的《经济应用数学基础（二）—线性代数》（第四版）反映了该学科前沿的最新动态，广受好评。为了帮助在校广大同学及考研的同学能更好地学习线性代数，我们编写了本辅导教材。本书由以下几个部分组成：1. 基本要求、重点与难点；2. 主要概念与公式；3. 重、难点解答；4. 典型例题分析；5. 课后习题全解；6. 考研真题精解；7. 同步测试题。本书内容编排合理，实用性强，是广大线性代数学习者不可或缺的一本参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学基础(二)线性代数全程学习指导与习题精解：人大四版/滕加俊等编著. —南京：东南大学出版社，2010.8

ISBN 978-7-5641-2401-4

Ⅰ.①经… Ⅱ.①滕… Ⅲ.①经济数学—高等学校—教学参考资料 ②线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①F224.0 ②O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 166833 号

经济应用数学基础(二)线性代数全程学习指导与习题精解(人大四版)

编　　著	滕加俊 等	责任编辑	刘　坚
电　　话	(025)83793329/83362442(传真)	电子邮件	liu-jian@seu.edu.cn
出版发行	东南大学出版社	出 版 人	江　汉
社　　址	南京市四牌楼2号	邮　　编	210096
销售电话	(025)83793191/57711295(传真)		
网　　址	www.seupress.com	电子邮件	press@seu.edu.cn
经　　销	全国各地新华书店	印　　刷	南京新洲印刷有限公司
开　　本	718mm×1005mm　1/16	印　　张	14　字　数　350千
版　　次	2010年9月第1版第1次印刷		
书　　号	ISBN 978-7-5641-2401-4		
定　　价	20.00元		

前　言

《线性代数》是大学工学、经济学、管理学等专业学生必修的一门重要基础课，也是硕士研究生入学考试必考科目，在全国统一的硕士研究生入学考试试题中，《线性代数》内容约占25%左右。

线性代数具有理论上的抽象性、逻辑推理的严密性和应用的广泛性，大多数同学在学习过程中感到线性代数抽象难懂，对基本概念及定理结论在理解上感到困难，具体解题时，缺乏思路，难以下手，赵树嫄编写的《经济应用数学基础(二)—线性代数》(第四版)反映了该学科前沿的最新动态，广受好评。为了帮助在校广大同学及考研的同学能更好地学习线性代数，克服以上困难，我们编写了本辅导教材。

本辅导教材由以下几个部分组成：

1. 基本要求、重点与难点：给出了每一章的基本要求及该章的重点和难点内容；

2. 主要概念与公式：列出了每一章的基本概念、重要定理和重要公式，突出必须掌握或考试中出现概率较高的核心内容；

3. 重、难点解答：列出每一章的重点、难点内容，并对重点、难点内容给出了详细的归纳和解释，以帮助广大同学对相应内容理解得更加透彻；

4. 典型例题分析：精选每一章内容所涉及的重要题型，并进行了详细的分析和解答，以帮助广大同学更好地掌握和理解相关题型的解法，达到举一反三、触类旁通的效果；

5. 课后习题全解：对教材中课后每一道习题均给出了详细的解答，以帮助广大同学回顾、巩固、深化每一章的内容讲解；

6. 考研真题精解：精选历年硕士研究生入学考试试题中具有代表性的题目并进行了详细的分析和解答。这些题目涉及内容广、题型多、解题技巧强，可以进一步帮助广大同学举一反三、触类旁通、开拓解题思路，更好地掌握线性代数的基本内容和解题方法；

7. 同步测试题：根据线性代数课程考试和考研内容，在每一章设计了二套同步自测题，目的是给广大同学提供练习机会，帮助广大同学进一步消化知识、夯实基础、提高能力，同时检验自己的线性代数知识的掌握程度，找出差距，以便更好地学习线性代数。

本书由滕加俊、寇冰煜、颜超、吴欧、毛磊、滕兴虎、张瑰、王璞、戴义等同志编写。全书由滕加俊教授编稿，在本书的策划、编写、审稿等方面得到了东南大学出版社的大力支持和热情帮助，在此表示感谢。由于作者的水平有限，加之时间仓促，书中不足之处敬请广大同行和读者批评指正。

编　者

2010.8.10

目　录

第一章　行列式

第二章　矩阵

第三章　线性方程组

第四章　矩阵的特征值

第五章　二次型

第一章　行列式

基本要求、重点与难点

基本要求：

(1) 理解排列、对换、逆序数的定义，掌握逆序数的计算方法；

(2) 了解二阶、三阶行列式的定义，掌握用对角线法计算二、三阶行列式的方法；

(3) 理解 n 阶行列式的定义；

(4) 掌握 n 阶行列式的性质，会用行列式的性质来计算行列式；掌握行列式按行(列)展开公式；

(5) 熟练掌握克莱姆法则，掌握 n 个方程的 n 元齐次线性方程组只有零解和有非零解的判断方法.

重点： n 阶行列式的定义、性质、高阶行列式的计算，齐次线性方程组有无非零解的判断方法.

难点： 高阶行列式的计算.

主要概念与公式

1. 排列及逆序的定义

n 级排列：由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 级排列，n 个数组成的所有 n 级排列共有 $n!$ 个.

逆序：在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中，若数 $i_t>i_s$，则称这两个数构成一个逆序.

逆序数：一个 n 级排列中所有逆序的总数，称为该排列的逆序数，记为 $N(i_1i_2\cdots i_n)$.

奇排列：逆序数是奇数的排列称为奇排列.

偶排列：逆序数是偶数的排列称为偶排列.

对换：在排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中，交换任意两个数 i_t 和 i_s 的位置，称为一次对换.

2. 排列的性质

(1) 对换改变排列的奇偶性；

(2) 在全部 n 级排列中($n\geqslant2$)，奇偶排列各占一半；

(3) 任意一个 n 级排列可经过一系列对换变成自然排列，并且所作对换次数的奇偶性与这个排列的奇偶性相同.

3. n 阶行列式的定义

$$n\text{阶行列式}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(i_1i_2\cdots i_n)}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

这里 $\sum\limits_{(i_1i_2\cdots i_n)}$ 表示对所有 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 求和，故 n 阶行列式等于 $n!$ 项取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 的代数和. 每一项的正负号由该项 n 个元素的列下标排列的逆序数决定，当 $i_1i_2\cdots i_n$ 为偶排列时，对应项取正号，为奇排列时，对应项取负号.

4. 行列式的性质

性质 1：行列式的行列互换后，行列式的值不变.

性质 2：行列式的两行(列)互换，行列式仅仅改变符号，特别如果行列式有两行(列)对应元素相同，则行列式为零.

性质 3：将行列式的某一行(列)的所有元素同乘以某一数 k，等于此数 k 乘以此行列式，或如果行列式某一行(列)的所有元素有公因子，则公因子可以提到行列式符号外面.

性质 4：若行列式中有两行(列)元素对应成比例，则该行列式的值为零.

性质 5：如果行列式的某一行(列)的元素是两组数之和，则此行列式可写成两个行列式之和，这两个行列式分别以两组数为行(列)，其余各行(列)与原行列式相同.

性质 6：将行列式中某行(列)的 k 倍加到另外一行(列)上去，行列式的值不变.

5. 行列式按行(列)展开公式

余子式:在 n 阶行列式中去掉元素 a_{ij} 所在的行和列后,余下的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij}.

代数余子式:a_{ij} 的余子式前加上符号 $(-1)^{i+j}$,称为 a_{ij} 的代数余子式,记为 A_{ij},即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

行列式按行(列)展开定理:行列式 $D=|a_{ij}|$ 等于它任意一行(列)的元素与其代数余子式乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

或
$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad (j=1,2,\cdots,n).$$

行列式的任何一行(列)元素与另外一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和为零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j)$$

或
$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0(i\neq j).$$

6. 克莱姆法则

(1) 如果 n 个方程的 n 元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

其系数行列式 $D\neq 0$,则该线性方程组有且仅有一个解 $x_i=\dfrac{D_i}{D}(i=1,2,\cdots,n)$,其中 D_i 是系数行列式 D 中的第 i 列元素换以常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 而得到的行列式.

(2) n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是其系数行列式为零,若系数行列式不等于零,则该方程组只有零解.

重、难点解答

1. 排列的逆序数的计算

排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 逆序数 $N(i_1i_2\cdots i_n)$ 计算有两种方法:

(1) $N(i_1i_2\cdots i_n)=$(i_2 前边比 i_2 大的数的个数)+(i_3 前边比 i_3 大的数的个数)$+\cdots+$(i_n 前边比 i_n 大的数的个数).

(2) $N(i_1i_2\cdots i_n)=$(i_1 后面比 i_1 小的数的个数)+(i_2 后面比 i_2 小的数的个数)$+\cdots+$(i_{n-1} 后面比 i_{n-1} 小的数的个数).

因此为了找出排列$(i_1i_2\cdots i_n)$所有的逆序而不遗漏,必须对此排列的 n 个数从左到右顺序地考察.

2. 理解 n 阶行列式定义的关键

(1) 行列式是 $n!$ 个乘积项的代数和,其计算结果是一个数值.

(2) 每个乘积项有 n 个元素构成,它们是来自行列式中不同的行不同的列的元素,而从 n 个不同的行和 n 个不同的列中取 n 个元素共有 $n!$ 种取法,所以行列式中的乘积项共有 $n!$ 项.

(3) 每个乘积项前的符号由该乘积项各元素的行标构成的排列的逆序数及相应的列标构成的排列的逆序数共同决定,特别当乘积项中各元素的行标按 $1,2,\cdots n$ 排列时,因 $N(1,2,3\cdots n)=0$,因而其符号只由相应的列标构成的排列的逆序数决定.

3. 几个重要的行列式

下面几个特殊的行列式很重要,我们要牢记,并能直接应用于行列式的计算.

(1) 上三角形行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\0&0&a_{33}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3) 对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(4) 对称和反对称行列式

① 对称行列式　$D^{T}=D$，满足　$a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$

② 反对称行列式　$D^{T}=-D$，满足 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$

特别当反对称行列式的阶数为奇数时，行列式为零.

4. 计算行列式的方法

(1) 利用对角线法则计算：这种方法只适合于二阶、三阶行列式的计算，对于四阶以上的行列式是不适用的，但二阶、三阶行列式的计算是计算行列式的基础，一般我们通常利用行列式的性质和展开公式将高阶行列式化为二阶、三阶的行列式来计算，这是计算行列式最基本的思路.

(2) 利用行列式的定义计算：这种方法只适用于一些特殊的行列式或有大多数元素为零的行列式的计算.

(3) 利用行列式的性质计算：利用行列式的性质将行列式化为上(下)三角行列式来计算，这是计算行列式最常用的方法.

(4) 利用行列式展开公式计算：利用按行(列)展开公式将高阶行列式化为低阶行列式来计算，该方法适用于大多数元素为零的行列式计算.

(5) 利用递推关系计算：利用行列式的性质或展开公式找出递推关系来进行计算，该方法一般适用于高阶且元素有规律的行列式的计算.

(6) 利用升阶法计算：在行列式值不变的情况下，加上特殊的一行和一列再利用行列式的性质进行化简后计算.

(7) 利用分解之积法计算：设 A、B 为 n 阶方阵，则 $|AB|=|A||B|$，但 $|A+B|\neq|A|+|B|$. 此方法需要利用矩阵的知识，将在第二章学习，这种方法常见于证明中，具体计算行列式也很少用到.

5. 关于克莱姆法则的说明

克莱姆法则是求系数行列式不等于零的 n 个方程的 n 元线性方程组解的一种方法. 克莱姆法则清楚地揭示了这类线性方程组的解与它们的系数及常数项之间的关系. 但是由于要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式，工作量较大，因而在求解方程的阶数较高时一般很少应用克莱姆法则，而是利用在第三章介绍的消元法来求解或通过求系数矩阵的逆矩阵来求其解. 但克莱姆法则在理论上是很有意义的，对求二元、三元线性方程组的解还是较方便的.

6. 判断 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组有无非零解的关键是看它的系数行列式是否为零；若为零，则有非零解，若不为零，则无非零解，即只有零解，任何一个齐次线性方程组它至少有一个解，事实上零解就是它的解.

典型例题分析

【例题 1】 按自然数从小到大为标准次序求排列 $1,3,5,\cdots,(2n-1);2,4,\cdots,(2n)$ 的逆序数.

【分析】 *逆序数的计算方法有两种. 一般来讲用下述方法较多：$N(i_1 i_2\cdots i_n)=i_1$ 后面比 i_1 小的数的个数 $+i_2$ 后面比 i_2 小的数的个数 $+\cdots+i_{n-1}$ 后面比 i_{n-1} 小的数的个数. 其中 $N(i_1 i_2\cdots i_n)$ 代表排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 的逆序数，因此求排列的逆序数只要从第一个元素起依次用上述方法来计算即可.*

解　对于 1 来讲，后面无比 1 小的数，对于 3 来讲，后面有一个数 2 比它小，对于 5 来讲，后面有 2 个数比它小，…，而对于 $(2n-1)$ 来讲，后面有 $(n-1)$ 个数比它小，故

$$N[1\ 3\ 5\cdots(2n-1)2\ 4\cdots(2n)]=0+1+2+3+\cdots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

【例题 2】写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

【分析】由行列式的定义知 $D=\sum(-1)^t a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4}$，其中 $i_1i_2i_3i_4$ 是 1,2,3,4 的某个排列，本题中 $i_1=1, i_2=3$，所以 i_3, i_4 分别为 2,4，故 $i_1i_2i_3i_4$ 为 1324 或 1342. 注意行列式中的项不仅仅有数值还应有符号 $(-1)^{N(i_1i_2i_3i_4)}$.

解 四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项有

$$(-1)^{N(1324)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$$

和

$$(-1)^{N(1342)}a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}=a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}.$$

【例题 3】计算行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

【分析】计算行列式的方法有多种，计算三阶以下的行列式可以用对角线法，而计算 4 阶以上行列式的值一般常用的方法是利用行列式的性质，将行列式化为上(下)三角行列式来求.

解
$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-10\times r_1]{r_2-4\times r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+7\times r_2]{r_3+15\times r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{vmatrix} = 17\times 9 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

【例题 4】计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

【分析】计算 n 阶行列式的值一般都是利用行列式的性质将行列式降阶或化为上(下)三角形来计算. 对于该行列式，我们观察发现此行列式各行(列)元素之和相等. 若将各行都加到第一行，则第一行的元素均为 $(n-1)a+x$，提取公因子 $(n-1)a+x$ 后，第一行的所有元素均为 1，从而可利用行列式的性质将其化为上(下)三角行列式，计算就简单了. 该方法是求这一类行列式的常用方法.

解
$$D_n \xlongequal{\text{各行均加到第一行}} \begin{vmatrix} (n-1)a+x & (n-1)a+x & \cdots & (n-1)a+x \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[(n-1)a+x]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{从第二行起每一行均加上}(-a)\text{乘以第一行}}[(n-1)a+x]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)^{n-1}[(n-1)a+x]$$

注:类似地，下列常见的行列式都可用此方法来计算.

(1) $\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$.

【例题 5】设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$，$D$ 的 (i,j) 元的代数余子式记为 A_{ij}，求 $A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$.

【分析】对于 D 来讲，我们可以分别求出式子中的 A_{ij}，然后再求和，但这样做工作量较大，观察一下所求式子发现，式子中的代数余子式是第三行对应元素的代数余子式，但前面的系数并不是 D 中第三行代数余子式所对应的系数. 若是，则所求式子之值就是行列式 D 的值. 由于行列式中的元素的代数余子式与该位置的元素无关，故我们可以将 D 中第三行的对应元素换成所求式子之中代数余子式对应的系数，从而可得到一个新的行列式，求出该行列式的值即求出所求式子之值，这是求解这类问题常用的方法. 另外若所求式子给出的是余子式 M_{ij}，则必须将 M_{ij} 换成代数余子式再按上述方法来求即可.

解　$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{44}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\substack{r_3-3r_1\\ r_4+5r_1}]{r_2-r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+2r_2]{r_3-r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4+2r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=-(-8)\times(-3)\times(-1)=24.$$

【例题 6】用克莱姆法则解下列线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1+6x_2=1 \\ x_1+5x_2+6x_3=0 \\ x_2+5x_3+6x_4=0 \\ x_1+5x_4=1 \end{cases}$$

【分析】用克莱姆法则求解 n 元线性方程组，关键是求相应的 $(n+1)$ 个行列式，但具体解题时应先求方程组的系数行列式. 若 $D=0$，则方程组无解，此时无需再求其余行列式. 若 $D\neq0$，再计算其余 n 个行列式，利用克莱姆法则求出方程组的解.

解　$D=\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}=5\times65-6\times19=211$

$D\neq0$，故方程组有唯一解

$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}=-151$，$D_3=\begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}=-109$

$$D_2=\begin{vmatrix}5&1&0&0\\1&0&6&0\\0&0&5&6\\0&1&1&5\end{vmatrix}=161,D_4=\begin{vmatrix}5&6&0&1\\1&5&6&0\\0&1&5&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=64$$

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=-\dfrac{151}{211},x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{161}{211},x_3=-\dfrac{109}{211},x_4=\dfrac{64}{211}$

【例题 7】已知齐次线性方程组$\begin{cases}(3-\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\(2-\lambda)x_2-x_3=0\\4x_1-2x_2+(1-\lambda)x_3=0\end{cases}$有非零解,求 λ 的值.

【分析】齐次线性方程组有无非零解,取决于其系数行列式的值.若系数行列式的值为零,则该齐次线性方程组有非零解,若系数行列式的值非零,则该齐次线性方程组只有零解,所以该题实际上是一个行列式的计算和解代数方程问题.

解 因齐次线性方程组有非零解,故方程组的系数行列式应该为零,即

$$\begin{vmatrix}3-\lambda&1&1\\0&2-\lambda&-1\\4&-2&1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

由于 $\begin{vmatrix}3-\lambda&1&1\\0&2-\lambda&-1\\4&-2&1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2}\begin{vmatrix}3-\lambda&3-\lambda&0\\0&2-\lambda&-1\\4&-2&1-\lambda\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_2-c_1}\begin{vmatrix}3-\lambda&0&0\\0&2-\lambda&-1\\4&-6&1-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1)$$

故有

$$(3-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1)=0$$

解得 $\lambda=3,4$ 或 -1.

即当 λ 取值为 3,4 或 -1 时,所给齐次线性方程组有非零解.

课后习题全解

(A)

1. 计算下列二阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix}2&1\\-1&2\end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix}6&9\\8&12\end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix}a&b\\a^2&b^2\end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix}x-1&1\\x^2&x^2+x+1\end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix}\dfrac{1-t^2}{1+t^2}&\dfrac{2t}{1+t^2}\\\dfrac{-2t}{1+t^2}&\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{vmatrix}$ (7) $\begin{vmatrix}1&\log_b a\\\log_a b&1\end{vmatrix}$

解 (1) 本题中行列式各元素较简单,直接采用对角线法则求解.

$$\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}=4\times1-3\times1=1$$

(2) 本题的特点与上题类似,直接采用对角线法则计算.

$$\begin{vmatrix}2&1\\-1&2\end{vmatrix}=2\times2-(-1)\times1=5$$

(3) 本题第一行有公因子 3,第二行有公因子 4,故先利用行列式的性质将公因子提到行列式符号外面,再按对角线法则进行计算.

$$\begin{vmatrix}6&9\\8&12\end{vmatrix}=3\times4\times\begin{vmatrix}2&3\\2&3\end{vmatrix}$$

发现新行列式两行对应元素相同,故行列式值等于零,从而原行列式值为零,即

$$\begin{vmatrix}6&9\\8&12\end{vmatrix}=3\times4\times0=0$$

(4) 本题第一列有公因子a，第二列有公因子b，故先利用行列式的性质将公因子提到行列式符号外面，再按对角线法则进行计算. 由于本题数据简单，也可直接用对角线法则计算.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = a\times b\times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = a\times b\times(b-a) = ab^2-a^2b$$

(5) 本题直接利用对角线法则计算.

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix} = (x-1)(x^2+x+1)-x^2 = x^3-1-x^2$$

(6) 为了简化本题的计算，可将本题的行列公因子$\dfrac{1}{1+t^2}$提到行列式符号外面，再利用对角线法则计算.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix} &= \frac{1}{(1+t^2)}\times\frac{1}{(1+t^2)}\times\begin{vmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^2}\times[(1-t^2)^2+4t^2] \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^2}(1+2t^2+t^4) \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^2}\cdot(1+t^2)^2 = 1\end{aligned}$$

(7) 本题数据简单，直接利用对角线法则计算.

$$\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix} = 1-\log_b a\cdot\log_a b = 1-\frac{\ln a}{\ln b}\cdot\frac{\ln b}{\ln a} = 1-1 = 0$$

2. 计算下列三阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$　　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$

解　(1) 本题为数据简单的三阶行列式的计算，可直接采用对角线法进行计算.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= 1\times1\times1+2\times2\times2+3\times3\times3-3\times1\times2-2\times3\times1-1\times3\times2 \\ &= 1+8+27-6-6-6 = 18\end{aligned}$$

(2) 本题将第一列元素乘以(−1)分别加到第二、第三列上之后，得到的行列式第一行只有一个非零元素，从而利用行列式按第一行展开的公式来计算即可.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 8 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 6-1 = 5$$

(3) 本题将第一列元素加到第三列上之后，得到的行列式第一行只有一个非零元素，从而再利用行列式按第一行展开的公式来计算就较为简单.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10-12 = -2$$

(4) 本题第一列只有一个非零元素，直接利用行列式按第一行展开的公式来计算即可.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}\cdot a\cdot\begin{vmatrix} b & c \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3. 证明下列等式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

证明 观察等式两端，发现右端即为左端这个三阶行列式按第一行展开的公式. 另外，本题也可利用对角线法则计算左右两边的值，再看等号两端是否相等.

左端 $= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3$

右端 $= a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)$

$\quad = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3 - c_1b_2a_3$

左端 = 右端，故等式成立

4. $k=?$时，$\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = 0$

解 行列式中含有未知参数k，因此该行列式是一个关于k的多项式，直接采用对角线法则计算行列式，或者按照第三行(或第三列)展开的公式计算行列式，再解方程即可解答此题.

$$\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot k\begin{vmatrix} k & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & 3 \\ -1 & k \end{vmatrix} = k^2 + 3 - 4k = (k-3)(k-1)$$

故当$k=1$或$k=3$时，$\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = 0$

5. 当x取何值时，$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$

解 本题与上题类似，只不过是判断x取何值时，行列式不为0. 同样，我们仍然可以利用对角线法则或者按照第三行(或第三列)展开的公式计算行列式，再解方程即可.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 3x^2 + 1\times 0\times 1 + x\times 4\times 0 - x^2 - 4x - 3\times 0\times 0$$

$$= 2x^2 - 4x = 2x(x-2)$$

故当$x\neq 0$且$x\neq 2$时，$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$

6. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} > 0$的充分必要条件是什么？

解 本题的关键与上两题类似，要先求出行列式，再解不等式.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第二行展开}} (-1)\begin{vmatrix} a & 1 \\ 4 & a \end{vmatrix} = 4 - a^2 > 0$$

故$|a|<2$为$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} > 0$的充分必要条件.

7. 解方程$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

解 本题的关键仍是先求出行列式的值，再解方程

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{加到第三行上}]{\text{将第一行乘以}(-1)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ x^2-3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第三列}} \begin{vmatrix} x & 1 \\ x^2-3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2x - x^2 + 3 = -(x^2 - 2x - 3) = -(x-3)(x+1) = 0$$

故$x=3$或$x=-1$

8. 求下列排列的逆序数.

(1) 4 1 2 5 3 (2) 3 7 1 2 4 5 6 (3) 3 6 7 1 5 2 8 4 (4) $n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1$

解　本题主要考查排列逆序数的计算，直接利用逆序数的计算公式即可.

(1) $N(4\ 1\ 2\ 5\ 3)=1+1+0+2=4$

(2) $N(3\ 7\ 1\ 2\ 4\ 5\ 6)=0+2+2+1+1+1=7$

(3) $N(3\ 6\ 7\ 1\ 5\ 2\ 8\ 4)=0+0+3+2+4+0+4=13$

(4) $N(n\cdot(n-1)\cdots2\cdot1)=1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)=\dfrac{(1+(n-1))(n-1)}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$

9. 在六阶行列式中，下列各元素乘积应取什么符号？

(1) $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$　(2) $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$　(3) $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$

(4) $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$　(5) $a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}$

解　根据行列式的定义，乘积项的符号决定于乘积项中各元素行标排列的逆序数和列标排列的逆序数之和. 因此，只需将行标排列和列标排列的逆序数计算出来，即可确定乘积项前的符号.

(1) 该乘积项行标按从小到大顺序排列，故它前面的符号只取决于列标排列的逆序数. 又

$$N(5\ 3\ 2\ 4\ 1\ 6)=1+2+1+4+0=8$$

故该乘积项前应取正号.

(2) 该乘积项特点与(1) 题相同.

$N(1\ 6\ 2\ 4\ 3\ 5)=0+1+1+2+1=5$

故该乘积项前应取负号.

(3) 该乘积项行标、列标排列都不是从小到大排列，故应计算出行标排列和列标排列的逆序数.

$N(2\ 5\ 1\ 4\ 6\ 3)=0+2+1+0+3=6$　　$N(1\ 3\ 6\ 2\ 5\ 4)=0+0+2+1+2=5$

行、列标排列的逆序之和为奇数，故该项前应取负号.

(4) 该题各元素的列标排列按从小到大排列，故它的符号只取决于行标排列的逆序数.

$N(5\ 3\ 1\ 4\ 6\ 2)=1+2+1+0+4=8$

故该乘积项前应取正号.

(5) 该乘积项的特点与(4) 相同，采用同样的解法即可.

$N(6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1)=1+2+3+4+5=15$

故该乘积项前应取负号.

10. 选择 k, l 使 $a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$ 成为五阶行列式$(a_{ij})(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots5)$ 中前面冠以负号的项.

解　本题主要考查行列式的定义中乘积项的构成及乘积项前符号的取法.

行标排列为 1 2 3 4 5，是从小到大排列，故乘积项符号只取决于列标排列的逆序数.

列标排列为 3 k 4 2 l，又因为乘积项中各元素必须来自于不同的列，故 k 和 l 只能取 1,5 且互不相同.

当 $k=1$, $l=5$ 时，$N(3\ 1\ 4\ 2\ 5)=1+0+2+0=3$，此时，乘积项前取负号，

当 $k=5$, $l=1$ 时，$N(3\ 5\ 4\ 2\ 1)=0+1+3+4=8$，此时，乘积项前取正号，

故当 $k=1$, $l=5$ 时，$a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}a_{55}$ 成为 5 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中带负号的项.

11. 设 n 阶行列式中有 n^2-n 个以上元素为零，证明该行列式为零.

证明　要让一个行列式为零，不是轻而易举的事. 但注意到本题的行列式中的大部分元素都为零，不为零的元素最多有$(n-1)$ 个，因此，在行列式的乘积项中，必然有许多为零，从而要让行列式为零，只需说明每个乘积项都为零即可.

因为行列式中最多有$(n-1)$ 个元素不为零，故该 n 阶行列式中至少有一行的元素全部为零，故行列式的乘积项中至少有一个元素为 0，从而每项均为零，故该行列式为零.

12. 用行列式定义计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

利用行列式的定义计算行列式，主要是将行列式中乘积项为零的项去掉，保留不为零的乘积项，从而得到行列式的值.

解 (1) 该行列式的乘积项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 中，仅当 $j_1=3$, $j_2=2$, $j_3=4$, $j_4=1$ 时，所有元素不为零. 其余情况下，乘积项中至少有一个元素为零，而 $N(3241)=1+0+3=4$.

故 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^4\cdot a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}=1$

(2) 该行列式的一般项 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中，仅当 $j_1=2$, $j_2=3\cdots j_n=n$, $j_n=1$ 时，乘积项不为零，其余情况下，乘积项全为零，而 $N(2\ 3\ 4\ \cdots\ n^1)=0+0+\cdots+0+(n-1)=n-1$.

故 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n=(-1)^{n-1}\cdot n!$

(3) 该行列式的乘积项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$，只有当 $j_1=1$, $j_4=3$ 时，乘积项才非零，否则乘积项中必有一个元素为零. 故 j_2, j_3 只能取 2 和 4，且互不相同. 因此，该行列式的非零项只有两项：$(-1)^{N(1\ 2\ 4\ 3)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$ 和 $(-1)^{N(1\ 4\ 2\ 3)}a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$

而 $N(1\ 2\ 4\ 3)=0+0+1=1$ $\quad N(1\ 4\ 2\ 3)=0+1+1=2$

故 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{N(1\ 2\ 4\ 3)}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1+(-1)^{N(1\ 4\ 2\ 3)}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$

$=-1+1=0$

(4) 该行列式的一般项为 $(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4j_5)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$，由于 $j_1j_2j_3j_4j_5$ 为 1, 2, 3, 4, 5 的一个排列，故 j_3, j_4, j_5 中至少有一个大于等于 3，进而 a_{3j_3}, a_{4j_4}, a_{5j_5} 中至少有一个为零，从而所有乘积项均为零，故 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$

13. 用行列式的性质计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 34215 & 35215 \\ 28092 & 29092 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

解 (1) 第一列有公因子 a，第二行有公因子 b，利用行列式性质可提到行列式号外面.

$\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix}=ab\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}=ab(b-a)$

(2) 观察该行列式，发现将第二行加到第三行上后，得到的元素与第一行相同，

故 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0.$

(3) 观察发现，第二列元素减去第一列元素，可以得到新一列的元素都是1000，从而有公因子1000，可提到行列式符号外面.

$$\begin{vmatrix} 34215 & 35215 \\ 28092 & 29092 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 34215 & 1000 \\ 28092 & 1000 \end{vmatrix}$$

$$= 1000\begin{vmatrix} 34215 & 1 \\ 28092 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1000 \times (34215 - 28092) = 6123000$$

(4) 观察行列式可以发现，后面两行都加到第一行上后得到的新一行的元素有公因式 $2(x+y)$ 然后提出公因式后，将行列式化为上(下)三角行列式计算，或者按照行列式按行或按列展开公式计算.

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(x+y) & 2(x+y) & 2(x+y) \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

$$= 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{第一行乘以}-(x+y)\text{加到第三行}]{\text{第一行乘以}(-y)\text{加到第二行}} 2(xy)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & x-y \\ 0 & -y & -x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第一列展开}} 2(x+y)\cdot\begin{vmatrix} x & x-y \\ -y & -x \end{vmatrix}$$

$$= 2(x+y)[-x^2 + y(x-y)] = -2(x^3+y^3)$$

14. 用行列式的性质证明：

(1) $$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(3) $$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix} = 0\ (n>2)$$

证明　(1) $$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kb_1 & b_1 & c_1 \\ kb_2 & b_2 & c_2 \\ kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kb_1 & c_1 & c_1 \\ kb_2 & c_2 & c_2 \\ kb_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + 0 + k\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$