高等职业教育“十一五”规划教材

21世纪高等职业院校通识教育规划教材

Mathematics

高等数学（经管类）（下）

通识教育规划教材编写组 组 编

周长礼 主 编

蒋辉 韩青山 于峰峰 副主编

人民邮电出版社

POSTS & TELECOM PRESS

高等职业教育“十

21世纪高等职业院校通识教育规划教材

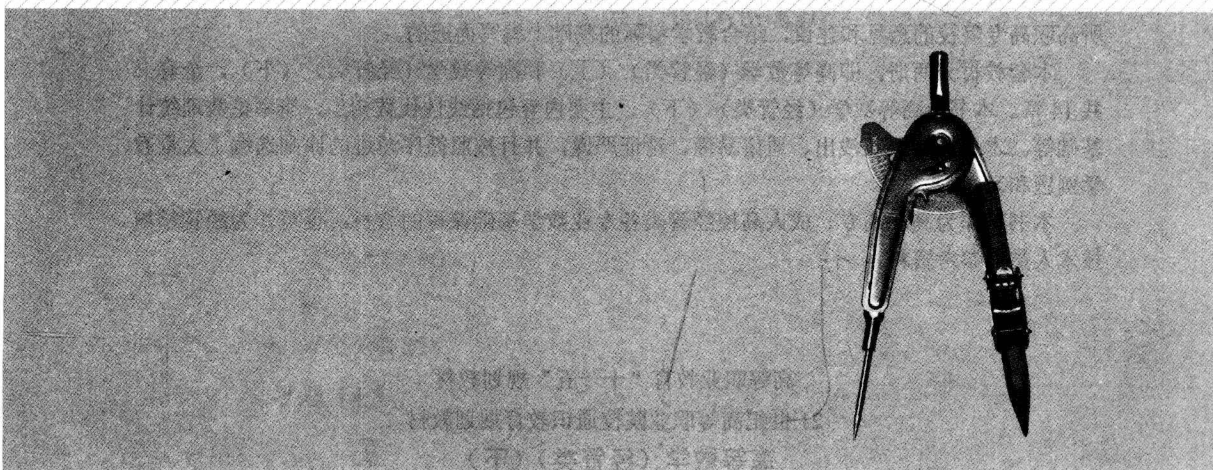
高等数学（经管类）（下）

Mathematics

通识教育规划教材编写组 组 编

周长礼 主 编

蒋辉 韩青山 于峰峰 副主编



人 民 邮 电 出 版 社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 ：经管类. 下 / 通识教育规划教材编写组组编. — 北京 ：人民邮电出版社，2010.5
21世纪高等职业院校通识教育规划教材
ISBN 978-7-115-22571-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①通… Ⅲ. ①高等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第047285号

内 容 提 要

本套教材是根据《高职高专院校经管类专业高等数学课程教学的基本要求》，在听取多所高职高专院校的意见和建议，结合教学实际的基础上编写而成的。

本套教材分两册，即高等数学（经管类）（上）和高等数学（经管类）（下），全套书共 14 章。本书为高等数学（经管类）（下），主要内容包括线性代数初步、概率论数理统计基础等。本书讲解深入浅出、通俗易懂、论证严谨，并且按照循序渐进的原则选编了大量教学例题和习题。

本书可作为高职高专、成人高校经管类各专业数学基础课程的教材，也可作为经管领域技术人员的参考资料。

高等职业教育“十一五”规划教材
21 世纪高等职业院校通识教育规划教材
高等数学（经管类）（下）

◆ 组　　编　通识教育规划教材编写组
主　　编　周长礼
副 主 编　蒋　辉　韩青山　于峰峰
责任编辑　王　威

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编　100061　电子函件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京铭成印刷有限公司印刷

◆ 开本：700×1000　1/16
印张：10.75
字数：209 千字　2010 年 5 月第 1 版
印数：1 – 5 000 册　2010 年 5 月北京第 1 次印刷

ISBN 978-7-115-22571-9

定价：19.00 元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

前言

Preface

本套书是根据《高职高专院校经管类专业高等数学课程教学的基本要求》，在听取多所高职高专院校的意见和建议，结合教学实际的基础上编写而成的。

本套书立足于高职高专院校经管类专业实际需求，以培养学生的数学素养为目的，以“简明、完整、严谨、实用”为准则，对传统的高等数学课程内容进行了适当的精简，力求突出高职高专教育学以致用的特点，从而全面提升学生的数学基础和解决实际问题的能力。

在内容编写上，考虑到便于教师组织教学的同时，又注重满足学生自学和课后的消化吸收，讲解深入浅出，循序渐进；在文字叙述上，力求做到通俗易懂，简明扼要，图文并茂；在例题和习题选取上，既照顾到学生专业的实际需求，又照顾到部分学生专升本的需要。

本套书有以下几个特点。

（1）注重对概念、定理的理解和应用，强化了概念和定理的直观性，尽量借助几何图形和经济实际给出说明，同时注重培养学生的辩证思维能力。

（2）为了突出重点、解释难点，在有些地方给出了相应的注释。

（3）每章前列有学习目标，及时指出知识的要点和大纲要求，以便于自学。

（4）每节都精选了习题，以帮助学生及时对本节内容进行巩固。每章最后都配有难度和技巧稍高的复习题，以启发学生思考，提高对所学知识的灵活运用能力。

（5）内容涵盖了微积分、线性代数和概率统计 3 部分知识，在对传统高等数学课程的内容进行适当精简的同时，又照顾到内容的完整性，便于教学的展开和学生日后的参考查询。

本套书分上下两册，参考学时共 178 学时，其中实践环节为 136 学时。建议按学年排课，每周 6 学时。各章的参考学时参见下面的学时分配表（其中注有“※”的章节为选学内容），使用本套书的教师可根据教学实际灵活安排掌握。

学时分配参考意见

章　节	课程内容	学时分配	
		讲　授	习题课时
第1章	函数	4	0
第2章	极限与连续	10	4
第3章	导数与微分	10	4
第4章	微分中值定理与导数的应用	8	2
第5章	不定积分	8	2
第6章	定积分及其应用	10	4
第7章	多元函数微积分	12	4
第8章	微分方程	8	2
※第9章	无穷级数	10	4
第10章	矩阵及其运算	12	4
第11章	线性方程组	12	4
第12章	概率论	10	2
第13章	随机变量及其分布	12	4
第14章	数理统计	10	2
课时总计		136	42

本书为高等数学（经管类）（下），由周长礼任主编，蒋辉、韩青山、于峰峰任副主编。其中，第10、11章由韩青山（青岛大学）编写，第12、13章由蒋辉（南京航空航天大学）编写，第14章王伟刚（浙江财经学院）编写。

本书由杜守强博士、陈克兵副教授审稿校对，高成修教授、田志远教授、赵凯教授、张玉中教授在本书的编写过程中给予了大力支持，他们对本书的编写进行了指导，并提出了宝贵的意见，在此对他们表示感谢！

参加本书编写工作的还有沈精虎、黄业清、宋一兵、谭雪松、冯辉、郭英文、计晓明、董彩霞、滕玲、田晓芳、管振起、郑晓蕾、牛强、李刚等。由于作者水平有限，书中难免存在疏漏之处，敬请读者批评指正。

编者

2010年1月

目录

Contents

第 10 章　矩阵及其运算

【学习目标】

- 理解矩阵的概念，并掌握几种特殊矩阵的形式。
- 熟练掌握矩阵的线性运算、矩阵的乘法、矩阵的转置等运算。
- 熟练掌握行列式的性质，并能用于行列式的计算，掌握行列式的展开。
- 熟练掌握方阵可逆的充要条件和逆矩阵的性质，能熟练运用初等变换求逆。
- 理解矩阵秩的含义，会用初等变换求秩。

矩阵是线性代数中的一个重要概念和基本的工具，矩阵理论的产生起源于线性方程组的求解，是线性代数主要研究对象之一，在经济管理、系统理论、计算机科学等领域有着广泛的应用。

在下面各节中，我们将介绍矩阵的概念、矩阵的运算、方阵的行列式、矩阵的初等变换以及逆矩阵等关于矩阵的基本理论。

10.1　矩阵的概念与特殊矩阵

在日常生活及工作学习中，为了比较直观地显示数据，人们经常会用表格的形式处理大量的数据。矩阵产生于实际生活，又能服务于生产生活。

10.1.1　矩阵的概念

例 1　某班 3 个同学甲、乙、丙某学期各课程（数学、语文、英语、政治）期末考试成绩可由表 10-1 表示。

表 10-1

成绩 课程 学生	数学	语文	英语	政治
甲	95	90	95	89
乙	88	75	60	76
丙	75	86	74	95

我们把上面表格中的成绩不改变相对位置，构成一个三行四列的数表

$$\begin{bmatrix} 95 & 90 & 95 & 89 \\ 88 & 75 & 60 & 76 \\ 75 & 86 & 74 & 95 \end{bmatrix}$$

这样一个矩形数表就称为一个三行四列或3×4的矩阵，这里这个矩阵可以表示甲、乙、丙 3 人各科期末考试成绩分布情况。

例 2 甲、乙、丙 3 商场销售 A_1、A_2、A_3 3 种类型的手机，第一季度的销量可由一个矩形表表示（单位：百部），如表 10-2 所示。

表 10-2

销量 型号 / 商场	A_1	A_2	A_3
甲	20	22	25
乙	15	12	16
丙	5	8	9

我们同样可以将上述表格简单地表示成如下形式。

$$\begin{bmatrix} 20 & 22 & 25 \\ 15 & 12 & 16 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

这是一个三行三列的矩阵，称为 3 阶矩阵。

例 3 设有线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

将这个方程每个未知量的系数以及方程右侧的常数项按原有相对位置排成一个数表，就得到

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

这个三行四列的矩形数表称为线性方程组的增广矩阵，这一矩阵我们会在后面章节求解线性方程组时用到。

上面的例子说明，在表达一些问题各事物之间关系的时候，这种矩形的数表很

常用，我们由此抽象出矩阵的概念。

定义 由$m\times n$个数$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$排成的$m$行$n$列的矩形数表，称为一个$m$行$n$列的矩阵，或称为$m\times n$的**矩阵**。记作

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} 或 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

其中a_{ij}位于矩阵的第i行第j列，称为矩阵的第i行第j列元素，或(i,j)元。

通常我们用大写字母A,B,C表示矩阵。为了明确矩阵的行数m和列数n，我们可用带下标的大写字母表示矩阵，如$A_{m\times n}$表示一个m行n列的矩阵。另外，还可将矩阵表示成$A=\left(a_{ij}\right)$或$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$的形式，其中$a_{ij}$为矩阵的$(i,j)$元。本书中矩阵中各元素均为实数。

10.1.2 几种特殊矩阵

在以后的学习中，我们经常会用到一些特殊的矩阵，这里我们把这些常用矩阵总结出来。

1. 方阵

行数与列数相等的矩阵称为**方阵**，若行数m等于列数n，通常称为n阶方阵或n阶矩阵，其中行列数n称为此方阵的阶数。如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

是一个n阶方阵，一般表示方阵时我们可以只用一个下标表示其阶数，如A_n表示n阶方阵。

n阶方阵从左上角到右下角的对角线称为主对角线，其上元素$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$称为主对角线元素。对应地，从右上角到左下角的对角线称为副对角线，其上元素称为副对角线元素。

注 只有方阵才有对角线。

2. 上（下）三角形矩阵

如果 n 阶方阵主对角线下方元素都等于零，则称此矩阵为**上三角形矩阵**。

如果 n 阶方阵主对角线上方元素都等于零，则称此矩阵为**下三角形矩阵**。

例如

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

则 A 为 n 阶上三角形矩阵，B 为 m 阶下三角形矩阵。

由以上定义可以看出，上下三角形矩阵是特殊形式的方阵。

3. 对角矩阵

所有非主对角线元素均为零的 n 阶方阵，称为**对角形矩阵**，简称**对角矩阵**。n 阶对角矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} 或 \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

为了表示简便，我们也用 $A=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$ 来表示 n 阶对角矩阵，其中 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 是按顺序表示的对角矩阵的主对角线元素。例如

$$\mathrm{diag}(-2,5,-3)=\begin{bmatrix} -2 & & \\ & 5 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$$

对角矩阵既可以看成上三角形矩阵，又可以看成下三角形矩阵，所以对角矩阵可以说是一种特殊的三角形矩阵。

4. 数量矩阵

主对角线元素都相等的对角矩阵，称为**数量矩阵**。如

$$A_n=\begin{bmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{bmatrix} 或 A_n=\mathrm{diag}(a,a,\cdots,a)$$

为 n 阶数量矩阵。由此可见，数量矩阵又是特殊的对角矩阵。

5. 单位矩阵

如果数量矩阵的主对角线元素都等于 1，我们可以得到**单位矩阵**。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

它是一个 n 阶单位矩阵，记作 E_n 或 E 。

6. 行矩阵与列矩阵

形如 $A=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$，仅有一行的矩阵称为**行矩阵**。

形如 $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$，仅有一列的矩阵称为**列矩阵**。

行矩阵和列矩阵实际就是**行向量**和**列向量**，有关向量的内容将在下章介绍。

7. 零矩阵

如果矩阵的所有元素全是零，我们称这样的矩阵为零矩阵。如

$$\boldsymbol{0}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

零矩阵可以是方阵也可以不是方阵。

8. 负矩阵

设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，称 $-A=\left(-a_{ij}\right)_{m\times n}$ 为矩阵 A 的负矩阵。即将原矩阵所有元素都取相反数所得矩阵为原矩阵的负矩阵。如 $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} -2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ 互为对方的负矩阵。

9. 对称矩阵与反对称矩阵

设 n 阶矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，若 $a_{ij}=a_{ji},(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$，则称此矩阵为**对称矩阵**。例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

是一个3阶的对称矩阵。

若 n 阶矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 的元素满足

$$a_{ij}=-a_{ji}\left(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n\right)$$

称此矩阵为反对称矩阵或反称矩阵。由定义知，反对称矩阵主对角线元素也应满足 $a_{ii}=-a_{ii}\left(i=1,2,\cdots,n\right)$，故 $a_{ii}=0\left(i=1,2,\cdots,n\right)$。例如

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -7 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

是一个3阶的反对称矩阵。

注 对称矩阵与反对称矩阵必须是方阵。

习题 10.1

1. 某石油公司所属的3个炼油厂 A_1,A_2,A_3，在2008年和2009年生产的2种油品 B_1,B_2 的产量如表10-3所示（单位：万吨）。

表 10-3

炼油厂 \ 产量 \ 油品	2008		2009	
	B_1	B_2	B_1	B_2
A_1	35	45	63	66
A_2	55	78	80	82
A_3	49	35	45	48

用矩阵分别表示2008年和2009年3个炼油厂各油品的产量，并指明是几行几列的矩阵。

2. 说明下列矩阵的类型。

（1）$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$　（2）$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

（3）$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$　（4）$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10.2 矩阵的运算

矩阵的意义并不仅仅是将一些数排列成一个数表，而是对其定义了一些具有理论和实际意义的运算，从而应用于理论研究与实际问题的解决。

在介绍矩阵运算之前，我们需要先介绍矩阵相等的概念。

定义 1 设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n},B=\left(b_{ij}\right)_{s\times t}$，若满足 $m=s,n=t$，则称这两个矩阵是**同型矩阵**。若又满足 $a_{ij}=b_{ij}\left(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\right)$，则称这两个**矩阵相等**。即矩阵相等指的是，同型矩阵对应元素相等。

例 1 设

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\3 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}x & -2 & y\\3 & 1 & z\end{bmatrix}$$

已知 $A=B$，则由矩阵相等定义可知，$x=1,y=-1,z=0$。

10.2.1 矩阵的加法

定义 2 设有两个 $m\times n$ 矩阵，$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n},B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$，那么矩阵 A 与 B 的和记作 $A+B$，规定为

$$A+B=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix}$$

即 $A+B=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}+\left(b_{ij}\right)_{m\times n}=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n}$。

矩阵加法的法则为：同型矩阵，对应元素相加。

矩阵减法：$A-B=A+\left(-B\right)$，即同型矩阵，对应元素相减。

例 2 在 10.1.1 的例 2 中 3 个商场甲、乙、丙在第一季度的手机销量用矩阵 A 表示

$$A=\begin{bmatrix}20 & 22 & 25\\15 & 12 & 16\\5 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

在第二季度的手机销量用矩阵 B 表示

$$B=\begin{bmatrix}32 & 25 & 15\\ 22 & 18 & 9\\ 9 & 11 & 13\end{bmatrix}$$

则

$$A+B=\begin{bmatrix}20 & 22 & 25\\ 15 & 12 & 16\\ 5 & 8 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}32 & 25 & 15\\ 22 & 18 & 9\\ 9 & 11 & 13\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}20+32 & 22+25 & 25+15\\ 15+22 & 12+18 & 16+9\\ 5+9 & 8+11 & 9+13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}55 & 47 & 40\\ 37 & 30 & 25\\ 14 & 19 & 22\end{bmatrix}$$

$$B-A=\begin{bmatrix}32 & 25 & 15\\ 22 & 18 & 9\\ 9 & 11 & 13\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}20 & 22 & 25\\ 15 & 12 & 16\\ 5 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}32-20 & 25-22 & 15-25\\ 22-15 & 18-12 & 9-16\\ 9-5 & 11-8 & 13-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 3 & -10\\ 7 & 6 & -7\\ 4 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

容易看出，$A+B$ 表示 3 个商场前两季度各型号手机销售总量，而 $B-A$ 则表示 3 个商场第二季度比第一季度各型号手机增加的销量。

由矩阵加法的定义以及实数加法满足交换律、结合律，我们可得到矩阵加法满足如下运算律。

（1）$A+B=B+A$（交换律）

（2）$(A+B)+C=A+(B+C)$（结合律）

（3）$A+(-A)=A-A=\boldsymbol{0}$

（4）$A+\boldsymbol{0}=A$

10.2.2　数乘矩阵

定义 3　数 k 与矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的乘积，记作 kA 或 Ak，规定为

$$kA=Ak=\begin{bmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}$$