"十一五"规划教材

教育部高等理工教育数学基础课程教学改革与实践项目

西安交通大学对口支援新疆大学系列教材项目

高等数学

(下册)

主编　王大猛　李治明

编者　万传良　阿力木·艾海提

夏米西努尔·阿不都热合曼

茹先·阿合买提

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

“十一五”规划教材

教育部高等理工教育数学基础课程教学改革与实践项目

西安交通大学对口支援新疆大学系列教材项目

高等数学

（下 册）

主编 王大猛 李治明

编者 万传良 阿力木·艾海提

夏米西努尔·阿不都热合曼

茹先·阿合买提

西安交通大学出版社

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书是教育部"高等理工教育数学基础课程教学改革与实践项目"的研究与改革成果，也是西安交通大学对口支援新疆大学系列教材项目之一。本书依据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会新修订的"工科类本科数学基础课程教学基本要求"，结合作者多年的教学经验，以提高民族学生数学素养、培养和提高学生应用数学方法解决问题的能力为目的编写而成。全书分为上下两册出版，下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数共五章。书中每一节的习题分为A、B两组，A组为基本题，B组题虽然适当提高了难度，但不含技巧性过高的题目，便于学生根据自己的程度选择使用；另外，每章后附有少量综合练习题，以便使学生得到综合运用所学知识的训练。

本书主要适合于民族地区理工科非数学类各专业的学生使用，也可作为其他院校非数学类各专业的教材和参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/王大猛等主编.—西安：西安交通大学出版社，2010.2

ISBN 978-7-5605-3450-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第022932号

书　　名　高等数学(下册)

主　　编　王大猛　李治明

责任编辑　张梁　任振国

出版发行　西安交通大学出版社

(西安市兴庆南路10号　邮政编码710049)

网　　址　http://www.xjtupress.com

电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)

(029)82668315　82669096(总编办)

传　　真　(029)82668280

印　　刷　陕西宝石兰印务有限责任公司

开　　本　727mm×960mm　1/16　**印张** 16.75　**字数** 304千字

版次印次　2010年2月第1版　2010年2月第1次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5605-3450-3/O·316

定　　价　25.00元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。

订购热线：(029)82665248　(029)82665249

投稿热线：(029)82664954

读者信箱：jdlgy@yahoo.cn

前　言

高等数学是高等学校的一门重要基础课，它不仅是许多后续课程的基础，而且在现代科学技术和经济建设中的作用越来越重要。在当代大学生的知识能力结构中，数学知识与应用数学解决问题的能力已经成为不可缺少的部分。高等数学这门课程的思想和方法，是人类文明发展史上理性智慧的产物，它不仅提供了解决实际问题的有力数学工具，同时还给学生提供一种思维的训练，帮助学生提高作为复合型、创造型、应用型人才所必需的科学文化素质和修养。

在我国高等教育进入“大众化教育阶段”以后，高等教育在具体培养目标和教学要求等方面呈现出多元化、多层次的新情况。因此，如何根据不同层次高等院校的不同要求，编写出不同层次和要求的教材，是摆在广大教师面前的一项急待完成的重要任务。本教材定位是给民族学生编写的一本要求较低的高等数学教材。由于种种历史原因，从整体上来说，民族学生进入大学时数学知识的起点相对要低一些，而目前流行的本科教材，经过我们多年的使用和比较，都不是很适合民族学生使用。所以，我们根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会新修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，结合编者们多年的教学经验，编写了这本希望能更适合民族学生使用的教材。

本教材以提高民族学生数学素养为目的，着力培养和提高学生应用数学方法解决问题的能力。在内容的选取上，既注重微积分的传统知识内容，又渗透了一些现代数学观点。在叙述上，力求简明扼要、清楚易懂，贴近教学实际，便于教师教和学生学，删去了一些比较繁琐和枝节的内容，而对一些学生理解起来有一定困难的概念和定理，则不惜笔墨加以解释，如教材中详细比较了函数两种定义的异同等。我们还注重从几何直观对概念和定理加以解释说明，便于学生对相关概念和定理的理解和掌握，如从几何直观上讲解函数连续的概念等等。

本教材分为上下两册共九章，上册包括函数、极限和连续，一元函数微分学，一元函数积分学，微分方程等四章；下册包括向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数等五章。本书在习题配备中删去了一些技巧要求偏高的题目，把习题分为 A、B 两组，A 组为基本题，B 组题虽适当提高了难度，但也不含技巧性过高的题目，便于学生根据自己的程度选择使用。另外，每章后还附有少量的综合练习题，以便使学生得到综合运用所学知识的训练。

本书的第1章、第7章、第8章、第9章由王大猛编写，第2章、第3章、第4章由李治明编写，第5章、第6章由万传良编写。本书的作者还有阿力木·艾海提，夏米西努尔·阿不都热合曼，茹先·阿合买提，他们对搜集资料、编选习题、制图排版都做了许多工作。本书由王大猛、李治明对全书进行统稿。

在这里我们要特别感谢西安交通大学的马知恩教授和王绵森教授，他们多次来我校具体指导工作，传授先进的教育思想和理念，对我们的帮助和启发很大。王绵森教授对全部书稿作了认真审阅，提出了许多有价值的、建设性的意见，再次表示衷心感谢！我们还要感谢西安交通大学出版社的郭建忠副社长和任振国主任，在他们的具体帮助下，本书才能较快地出版。

由于编写者水平有限，书中难免有错漏和不妥之处，敬祈专家、读者予以指正。

编　者

2009年5月

目 录

第 5 章　向量代数与空间解析几何

5.1　空间直角坐标系

5.1.1　空间直角坐标系的概念

为了研究空间图形和方程的关系，我们引进空间直角坐标系。首先建立空间的点和有序数组之间的联系，为空间图形的解析化奠定基础。

过空间的一个定点 O，作三条两两互相垂直的数轴（三条数轴取相同的长度单位），它们都以 O 作为原点，分别称这三条数轴为 x 轴、y 轴和 z 轴。它们的正向符合右手法则，即以右手握住 z 轴，右手的四个手指从 x 轴的正向转过 $\frac{\pi}{2}$ 后指向 y 轴的正向，此时竖起的大拇指的指向就是 z 轴的正向（见图 5-1）。这样的三条坐标轴就构成了空间直角坐标系，并用 $Oxyz$ 表示，O 点称为这个坐标系的原点。

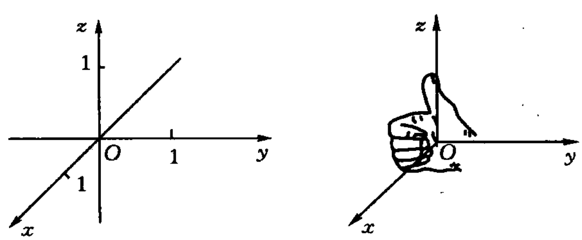

图 5-1

设 M 是空间任意一个点，过 M 点作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，并交这三个轴于 P、Q、R 三个点，这三个点分别称为点 M 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影，三个投影在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标依次记为 x、y、z（见图 5-2），这样，空间的点 M 唯一确定了一个有序数组 x、y、z。反过来，任意给定一个有序数组 x、y、z，可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，再分别过点 P、Q、R 作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的三个平面，这三个平

面的交点 M 就是由有序数组 x、y、z 唯一确定的点。于是我们在空间的点与有序数组 x、y、z 之间就建立了一一对应关系。这一组有序数 x、y、z 称为空间的点 M 的**坐标**,并依次称为 M 的**横坐标**、**纵坐标**、**竖坐标**,记为 $M(x,y,z)$。

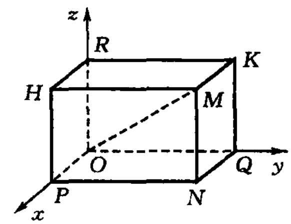

图 5-2

三条坐标轴中每两条坐标轴确定一个平面,称为**坐标平面**。由 x 轴和 y 轴确定的坐标平面称为 xOy 平面,由 y 轴和 z 轴确定的坐标平面称为 yOz 平面,由 z 轴和 x 轴确定的坐标平面称为 zOx 平面。这三个坐标平面把空间分成 8 个部分,每一部分称为一个卦限,分别用罗马字母Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示(见图5-3)。Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限在 xOy 坐标平面的上方,Ⅰ卦限是由坐标 (x,y,z) 满足 $x>0$、$y>0$、$z>0$ 条件的点组成,Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限按逆时针方向排定;Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限在 xOy 坐标平面的下方,Ⅴ卦限的点 (x,y,z) 是由满足 $x>0$、$y>0$、$z<0$ 条件的点组成,Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限依逆时针方向排定。

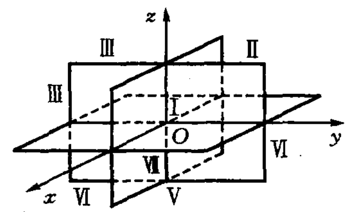

图 5-3

作为练习,请读者分别写出在各坐标轴上、坐标平面上和各个卦限内点 $M(x,y,z)$ 的坐标 x、y、z 满足的条件。

5.1.2 空间两点间的距离

建立了空间直角坐标系后,就可以通过两个点的坐标计算空间两点间的距离。

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间的两个点,过 M_1、M_2 两点分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的六个平面,这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(见图 5-4)。由长方体的对角线与各棱之间的关系可得

$$
\begin{aligned}
|M_1M_2|^2 &= |M_1N|^2+|NM_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2 \\
&= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2
\end{aligned}
$$

于是 $|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ 就是空间两点间的距离公式。

例 5.1.1 求证以 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形。

证明 $|AB|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7$

$|BC|=\sqrt{(2-10)^2+[4-(-1)]^2+(3-6)^2}=7\sqrt{2}$

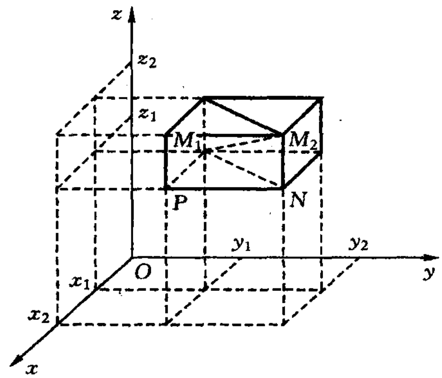

图 5 - 4

$$|CA|=\sqrt{(4-2)^2+(1-4)^2+(9-3)^2}=7$$

$$|AB|=|CA|\text{且}|AB|^2+|CA|^2=|BC|^2$$

所以$\triangle ABC$是等腰直角三角形。

例 5.1.2　空间中所有与点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$的距离为常数 R 的点，应满足什么方程？用集合把这些点表示出来。

解　设 $M(x,y,z)$是满足题设条件的任一点，依题意$|M_0M|=R$，即

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

整理得

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

这即是所求的方程。

设满足这个方程的点的集合为 A，它是以 M_0 为心，R 为半径的球面。

$$A=\{(x,y,z)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2\}$$

习题 5.1

A 组题

1. 写出空间直角坐标系中各个坐标轴及各个坐标平面上的点的坐标特征。

2. 写出空间直角坐标系中八个卦限中点的坐标的符号。

3. 指出下列点在空间直角坐标系中所在的位置：

$A(-3,4,0)$，$B(0,2,0)$，$C(-3,2,4)$，$D(3,1,-3)$，$E(-1,-2,-3)$，$F(4,2,1)$

4. 求点 $M(4,-3,5)$到各坐标轴以及各坐标平面的距离。

5. 过空间的点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 zOx 坐标面的平面,在它们上面的点各有什么特点?

6. 在 z 轴上求与点 $A(-4,1,7)$ 和点 $B(3,5,-2)$ 等距离的点。

B 组题

1. 在 yOz 坐标平面上,求与三个点 $A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点。

2. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上,其底面的中心在坐标原点,底面的顶点在 x 轴和 y 轴上,画图并求这个立方体各顶点的坐标。

5.2 向量及向量的线性运算

5.2.1 向量及向量的几何表示

既有大小、又有方向的量,称为**向量**。

例如物理学中的位移、力、速度、加速度等就是向量。向量常用黑体的单个小写字母(如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{v}$)或 2 个白体的加箭头的大写字母(如 $\overrightarrow{AB}$)等记号表示。

我们可以用一条有向线段来表示向量。如果这条有向线段的起点为 A,终点为 B,那么用 $\overrightarrow{AB}$ 来表示有向线段所确定的向量(见图 5-5)。

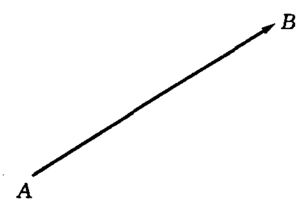

图 5-5

在讨论向量时,我们只考虑向量的方向和大小,与向量的起点无关,这样的向量称为**自由向量**。当两个向量的方向相同、大小相等时,我们把它们看成是同一个向量。经过平移,这两个向量是重合的。

向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小,叫做向量的**模**,用 $|\boldsymbol{a}|$ 表示,向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模 $|\overrightarrow{AB}|$ 就是有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的长度。

零向量 $\boldsymbol{0}$ 是指模等于零的向量,它的起点和终点重合,$\boldsymbol{0}$ 的方向可以是任意的。

模等于 1 的向量,称为**单位向量**,用 $\boldsymbol{e}$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量。

两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,如果它们的方向相同或相反,我们称这两个向量**平行**,记为 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$。因为零向量 $\boldsymbol{0}$ 的方向是任意的,因此 $\boldsymbol{0}$ 与任意向量都是平行的。

任一以原点 O 为起点的**非零向量** OM 称为点 M 的**向径**。在空间直角坐标系中,以原点为起点的向量可以看成是所有与它方向相同、大小相等的一类向量的代表,即为同一向量。这样,空间直角坐标系的点(除原点)的集合与空间的向量集

合之间就建立了一一对应的关系。

5.2.2　向量加、减法的几何表示

与物理学中位移或力的合成类似，我们可以定义向量的加法运算如下：

设有向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，在空间任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，那么以 A 为起点、C 为终点的向量 $\overrightarrow{AC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（见图 5－6），这种方法叫做向量加法的**三角形法则**。

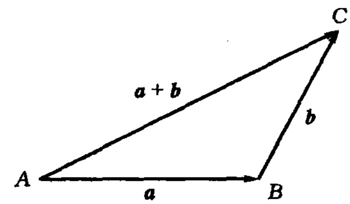

图 5－6

向量相加的**平行四边形法则**：设向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不平行，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB、AD 为邻边作一个平行四边形 $ABCD$，连接对角线 AC（见图 5－7），则向量 $\overrightarrow{AC}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和。

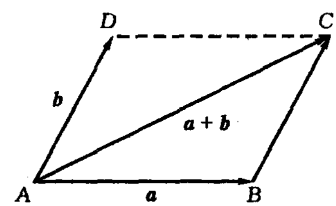

图 5－7

向量的加法运算律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$。

可以通过向量加法的定义，验证这两个运算规则是正确的。

我们可以把两个向量的和推广到任意有限个向量的和上去。例如有 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 相加，从 $\boldsymbol{a}_1$ 开始，以前一个向量的终点作为下一个向量的起点，n 个向量如此首尾相接，以第一个向量 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点作为起点，以最后一个向量的终点作为终点的向量就是这 n 个向量的和（见图 5－8）$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$。

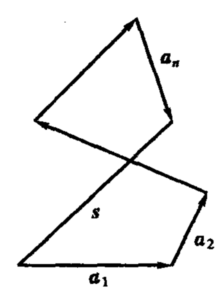

图 5－8

设有向量 $\boldsymbol{a}$，与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{a}$。在这个规定之下，我们可以定义两个向量的差（见图 5－9）：

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$$

请读者用两个向量和的平行四边形法则来表示两个向量的差。

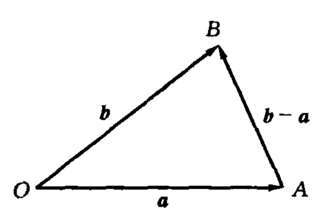

图 5－9

由两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和（或差），根据三角形两边之和大于第三边的原理，有不等式

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,\quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

其中等号在 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立。

5.2.3 向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积(简称数积) $\lambda\boldsymbol{a}$ 也是一个向量，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$。当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$。

向量与数的乘法运算规律：

(1) 结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$。

我们用向量与数的乘法来证明两个向量的平行定理。

定理 5.1　设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，那么向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行的充分必要条件是：存在唯一确定的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$。

证明：条件的充分性是显然的，下面证明条件的必要性。

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，我们取 $\lambda=\pm\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$(当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向时，λ 取正值，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时，λ 取负值)，此时即有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$。这里 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 且 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同方向。

若还有一个 μ(实数)满足 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，我们作 $\lambda\boldsymbol{a}$ 和 $\mu\boldsymbol{a}$ 的减法

$$\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{a}=(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

得 $|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0$，因为 $\boldsymbol{a}\neq 0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$，定理证毕。

例 5.2.1　在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形两条对角线的交点。

解　由图 5-10 知

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

所以

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

$$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

又

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$$

$$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$

$$\overrightarrow{MB}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$

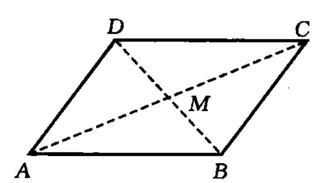

图 5-10