现代数学译丛 12

多尺度计算方法

——均匀化和平均化

〔英〕Grigorios A.Pavliotis　Andrew M.Stuart 著

郑健龙 李友云 钱国平 译

科学出版社
www.sciencep.com

现代数学译丛 12

多尺度计算方法

——均匀化和平均化

〔英〕Grigorios A. Pavliotis　Andrew M. Stuart 著

郑健龙　李友云　钱国平　译

科学出版社

北京

版权登记号 01-2010-2337

内 容 简 介

本书针对各类具有多尺度特性的问题给出简化数学处理方法(平均化和均匀化)，该方法可用于求解偏微分方程、随机微分方程、常微分方程以及 Markov 链.

全书共分三部分，第一部分为背景资料；第二部分为扰动展开，给出此类问题的共性；第三部分阐述了一些证明扰动方法的理论. 每章结束部分的讨论和文献目录中均对本章的一些结论进行了推广和扩展，并附上参考文献. 除第 1 章外，所有章节均提供相应练习.

本书既可作为高等院校本科和研究生教材，也可作为教师、工程技术人员和业余爱好者的自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

多尺度计算方法：均匀化和平均化/(英) Grigorios A. Pavliotis, Andrew M. Stuart 著；郑健龙，李友云，钱国平译. —北京：科学出版社，2010

(现代数学译丛；12)

ISBN 978-7-03-027512-7

Ⅰ. 多… Ⅱ. ①G… ②A… ③郑… ④李… ⑤钱… Ⅲ. 微分方程解法 Ⅳ. O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 094921 号

责任编辑：陈玉琢／责任校对：陈玉凤
责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 6 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010 年 6 月第一次印刷 印张：18 1/2
印数：1—3 000 字数：358 000

定价：56.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

译者的话

多尺度方法是当代科学技术发展的前沿, 在数学科学、力学科学、生物科学、材料科学、化学科学等多种学科中运用越来越广泛. 而此类方法却由于受语言和专业术语的限制而不能够进行推广, 因此译者希望本书的翻译工作有利于多尺度方法在各个领域中的推广和发展.

本书介绍了各类具有多尺度特性的问题并给出了简化数学处理方法 (平均化和均匀化方法), 这些方法可用于求解偏微分方程、随机微分方程、常微分方程以及 Markov 链. 全书共分三部分, 第一部分为背景资料, 给出书中用到的分析方法、概率方法以及随机过程方面的理论知识, 并对常微分方程、Markov 链、随机微分方程以及偏微分方程进行简要介绍; 第二部分为扰动展开, 举例说明从平均化、均匀化方法到研究工程中的常微分方程、Markov 链、随机微分方程以及椭圆型、抛物线型、运输型偏微分方程所用到的思想, 并讨论了不变流型; 第三部分举例说明了用于证明扰动展开正确性的严格方法. 某些章节对一些特殊情形进行了讨论. 当然读者没有必要按照上面的顺序阅读本书, 建议先对本书第二部分的扰动展开问题进行了解, 然后根据需要参考第一部分的背景资料, 针对实际情况, 形成对所研究问题的近似处理, 有必要时再学习其他理论部分. 在每章结束部分的讨论和文献目录中均给出本章一些结论的推广和扩展, 并附上文献参考. 除第 1 章外, 所有章节均提供了相应的练习内容可供读者选择.

此书内容广泛、解释详尽, 书中列举的一些特殊素材对那些数学工作者、科技工作者以及经常使用该方法解决大量应用问题的工程师们具有特别的启发意义. 本书既可作为高等院校本科和研究生教材, 也可作为教师、工程技术人员和业余爱好者的自学用书.

本书的翻译工作及出版, 得到了国家自然科学基金项目 (50808026, 50778026) 及教育部归国人员启动基金, 湖南省教育厅科研项目 (06B008) 资助, 特此鸣谢. 限于水平, 不足之处在所难免, 恳切希望读者不吝惠于批评指正.

译　者

2010 年 5 月

目　　录

译者的话

第 1 章　引言 ······ 1

1.1　概述 ······ 1

1.2　启发例子 ······ 1

1.2.1　例 I：复合材料中的稳态热传导问题 ······ 1

1.2.2　例 II：对流扩散方程的均匀化 ······ 2

1.2.3　例III：平均化、均匀化及动力系统 ······ 4

1.2.4　例IV：动力系统中降维 ······ 5

1.3　平均化对均匀化 ······ 6

1.3.1　线性系统的平均化 ······ 6

1.3.2　线性系统的均匀化 ······ 7

1.4　讨论和参考 ······ 9

第一部分　背　　景

第 2 章　分析 ······ 13

2.1　结构 ······ 13

2.2　记号 ······ 13

2.3　Banach 空间和 Hilbert 空间 ······ 15

2.3.1　Banach 空间 ······ 16

2.3.2　Hilbert 空间 ······ 17

2.4　函数空间 ······ 18

2.4.1　连续函数空间 ······ 18

2.4.2　L^p 空间 ······ 18

2.4.3　Sobolev 空间 ······ 20

2.4.4　Banach 空间值空间 ······ 22

2.4.5　周期函数的 Sobolev 空间 ······ 23

2.5　双尺度收敛 ······ 24

2.5.1　稳态问题的双尺度收敛 ······ 24

2.5.2 时变问题的双尺度收敛 …… 27
2.6 Hilbert 空间中的方程 …… 28
2.6.1 Lax-Milgram 定理 …… 28
2.6.2 Fredholm 性质 …… 29
2.7 讨论和参考 …… 30
2.8 练习 …… 32
第 3 章 概率论和随机过程 …… 34
3.1 格局 …… 34
3.2 概率论、期望和条件期望 …… 34
3.3 随机过程 …… 37
3.4 鞅和随机积分 …… 42
3.4.1 鞅 …… 42
3.4.2 Itô随机积分 …… 44
3.4.3 Stratonovich 随机积分 …… 45
3.5 概率测度的弱收敛 …… 46
3.6 讨论和参考 …… 50
3.7 练习 …… 51
第 4 章 常微分方程 …… 53
4.1 格局 …… 53
4.2 存在性和唯一性 …… 53
4.3 生成子 …… 56
4.4 遍历性 …… 59
4.5 讨论和参考 …… 64
4.6 练习 …… 65
第 5 章 Markov 链 …… 66
5.1 格局 …… 66
5.2 离散时间 Markov 链 …… 66
5.3 连续时间 Markov 链 …… 67
5.4 生成子 …… 69
5.5 存在唯一性 …… 72
5.6 遍历性 …… 73
5.7 讨论和参考 …… 75
5.8 练习 …… 76

第 6 章　随机微分方程 ······ 77
6.1　格局 ······ 77
6.2　存在唯一性 ······ 77
6.3　生成子 ······ 79
6.4　遍历性 ······ 84
6.5　讨论和参考 ······ 90
6.6　练习 ······ 91
第 7 章　偏微分方程 ······ 93
7.1　格局 ······ 93
7.2　椭圆型偏微分方程 ······ 93
7.2.1　Dirichlet 问题 ······ 94
7.2.2　周期问题 ······ 96
7.2.3.　Fredholm 性质 ······ 96
7.2.4　极大值原理 ······ 102
7.3　抛物型偏微分方程 ······ 103
7.3.1　有界域 ······ 103
7.3.2　极大值原理 ······ 104
7.3.3　无界域：Cauchy 问题 ······ 106
7.4　双曲偏微分方程 ······ 106
7.5　半群 ······ 109
7.6　讨论和参考 ······ 110
7.7　练习 ······ 111

第二部分　扰动展开

第 8 章　常微分方程的不变流形 ······ 115
8.1　引言 ······ 115
8.2　完全方程 ······ 115
8.3　简化方程 ······ 116
8.4　推导 ······ 117
8.5　应用 ······ 118
8.5.1　线性快速动力学 ······ 118
8.5.2　长时间动力学 ······ 118
8.5.3　中心流形 ······ 119

8.6 讨论和参考 ······ 120
8.7 练习 ······ 122
第 9 章 Markov 链的平均化 ······ 123
9.1 引言 ······ 123
9.2 完全方程 ······ 123
9.3 简化方程 ······ 125
9.4 推导 ······ 125
9.5 应用 ······ 127
9.6 讨论和参考 ······ 128
9.7 练习 ······ 128
第 10 章 常微分方程和随机微分方程的平均化 ······ 130
10.1 引言 ······ 130
10.2 完全方程 ······ 130
10.3 简化方程 ······ 131
10.4 推导 ······ 131
10.5 确定性问题 ······ 132
10.6 应用 ······ 134
10.6.1 不对称积随机微分方程 ······ 134
10.6.2 Hamiltonian 原理 ······ 135
10.7 讨论和参考 ······ 138
10.8 练习 ······ 139
第 11 章 常微分方程、随机微分方程的均匀化 ······ 141
11.1 引言 ······ 141
11.2 完全方程 ······ 141
11.3 简化方程 ······ 143
11.4 推导 ······ 144
11.5 简化方程的性质 ······ 146
11.6 确定性问题 ······ 146
11.7 应用 ······ 149
11.7.1 快速 Ornstein-Uhlenbeck 噪声 ······ 149
11.7.2 快速混沌噪声 ······ 152
11.7.3 Stratonovich 修正 ······ 152
11.7.4 Stokes 定理 ······ 154

11.7.5 Green-Kubo 公式 ······ 156
11.7.6 非 Itô, Stratonovich 情形 ······ 157
11.7.7 Lévy 面积修正 ······ 159
11.8 讨论和参考 ······ 160
11.9 练习 ······ 163
第 12 章 椭圆型偏微分方程的均匀化 ······ 165
12.1 引言 ······ 165
12.2 完全方程 ······ 165
12.3 简化方程 ······ 166
12.4 推导 ······ 167
12.5 简化方程的性质 ······ 170
12.6 应用 ······ 172
12.6.1 一维情形 ······ 172
12.6.2 层状材料 ······ 174
12.7 讨论和参考 ······ 176
12.8 练习 ······ 180
第 13 章 抛物型偏微分方程的均匀化 ······ 183
13.1 引言 ······ 183
13.2 完全方程 ······ 183
13.3 简化方程 ······ 185
13.4 推导 ······ 186
13.5 简化方程的性质 ······ 187
13.6 应用 ······ 189
13.6.1 梯度向量场 ······ 189
13.6.2 无散场 ······ 194
13.7 随机微分方程的联系 ······ 200
13.8 讨论和参考 ······ 201
13.9 练习 ······ 203
第 14 章 线性双曲型和抛物型偏微分方程的平均化 ······ 206
14.1 引言 ······ 206
14.2 完全方程 ······ 206
14.3 简化方程 ······ 207
14.4 推导 ······ 208

14.5 运输方程：$D = 0$ ········ 209
14.5.1 一维例子 ········ 210
14.5.2 无散度速度场 ········ 211
14.6 常微分方程和随机微分方程的联系 ········ 212
14.7 讨论和参考 ········ 214
14.8 练习 ········ 214

第三部分 理 论

第 15 章 常微分方程的不变流形：收敛性定理 ········ 219
15.1 引言 ········ 219
15.2 定理 ········ 219
15.3 证明 ········ 221
15.4 讨论和参考 ········ 222
15.5 练习 ········ 223
第 16 章 Markov 链的平均化：收敛性定理 ········ 224
16.1 引言 ········ 224
16.2 定理 ········ 224
16.3 证明 ········ 225
16.4 讨论和参考 ········ 226
16.5 练习 ········ 226
第 17 章 随机微分方程的平均化：收敛性定理 ········ 228
17.1 引言 ········ 228
17.2 定理 ········ 228
17.3 证明 ········ 229
17.4 讨论和参考 ········ 231
17.5 练习 ········ 232
第 18 章 随机微分方程的均匀化：收敛性定理 ········ 233
18.1 引言 ········ 233
18.2 定理 ········ 233
18.3 证明 ········ 235
18.4 讨论和参考 ········ 238
18.5 练习 ········ 239

第 19 章 椭圆型偏微分方程的均匀化：收敛性定理 ········ 240
19.1 引言 ········ 240
19.2 定理 ········ 240
19.3 证明：L^2 上的强收敛 ········ 241
19.4 证明：H^1 上的强收敛 ········ 245
19.5 讨论和参考 ········ 247
19.6 练习 ········ 248
第 20 章 抛物型偏微分方程的均匀化：收敛性定理 ········ 250
20.1 引言 ········ 250
20.2 定理 ········ 250
20.3 证明 ········ 251
20.4 讨论和参考 ········ 254
20.5 练习 ········ 254
第 21 章 线性双曲方程和抛物型偏微分方程的平均化：收敛性定理 ········ 256
21.1 引言 ········ 256
21.2 定理 ········ 256
21.3 证明：$D > 0$ ········ 257
21.4 证明：$D = 0$ ········ 259
21.5 讨论和参考 ········ 261
21.6 练习 ········ 261
参考文献 ········ 263
《现代数学译丛》已出版书目 ········ 284

第 1 章　引　　言

1.1　概　　述

本章介绍了书中所要研究问题的类型以及要采用的研究方法. 1.2 节中包含的 4 个例子说明了在偏微分方程、确定性动力系统、随机动力系统中这一系列的相关问题; 1.3 节将讨论平均化和均匀化方法, 这些方法适用于解决奇异扰动线性微分方程, 本书第二部分将通过扰动展开式重点阐述其在材料中的应用; 1.4 节给出了本章引用到的参考文献和讨论.

2.2 节将对本章所用到的记号加以说明. 本章中将对 ODEs, PDEs 以及 SDEs 这些理论在概念上进行了介绍, 并在后面的章节中给出其更为详尽、全面的阐述, 而且也认为有必要在本章中对本书主题进行介绍, 因为这样可以减轻读者在建立数学模型时的负担.

1.2　启 发 例 子

本节叙述了 4 个例子, 这些例子阐述了在本书中需要研究的一系列问题. 第 1 个例子是在二阶线性一致椭圆型偏微分方程情况下的均匀化问题; 第 2 个例子阐述了在抛物型时变偏微分方程 (对流扩散方程) 情况下的相关思想; 通过双曲型偏微分方程和常微分方程之间的转化、特征线法、抛物型微分方程和随机微分方程之间的转换以及 Itô公式, 已经知道通过降低维数来解决线性偏微分方程的平均化和均匀化方法同样也适用于解决常微分方程和随机微分方程, 这方面的内容将在第 3 个例子中阐述; 关于动力学系统中的消元法将在第 4 个例子中阐述.

1.2.1　例 I : 复合材料中的稳态热传导问题

为了引入均匀化的思想, 考虑复合材料的稳态热传导问题, 相对于材料的宏观尺度, 这种复合材料的特性变化得更快. 如果用 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 表示材料的区域, 则区域尺寸定义为材料的宏观尺度 L(如: 可以通过定义 $\mathrm{vol}(\Omega) = L^d$ 定义 L). 另外, 定义非匀质性材料的特征长度为该类问题的微观尺度 ε, 假设当 $\varepsilon \ll 1$ 时, $L = O(1)$. 稳态导热现象可由下面的椭圆边值问题描述: 温度场设为 $u^\varepsilon(x)$,

$$-\nabla \cdot (A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f, \quad x \in \Omega, \tag{1.2.1a}$$

$$u^\varepsilon = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.2.1b}$$

这里假定当 $\varepsilon > 0$ 时, A^ε 一致正定.

为了解决具体问题以及便于分析计算, 假设 $A^\varepsilon = A(x/\varepsilon)$ 和热导率张量矩阵 $A(y)$ 在所有 d 方向上都是 1 周期的并具有正定性. 均匀化理论的目的是为了研究 $u^\varepsilon(\varepsilon \to 0)$ 的极限. 特别地, 再找到 u^ε 的极限所满足的方程就更可取了. 从物理学角度来说, 极限 $\varepsilon \to 0$ 对应于不均匀性会逐渐消失. 这样目标就是用具有常系数 $\bar{A}$ 的有效均匀化材料来代替原始的、振荡系数为 $A(x/\varepsilon)$ 的高度非均质材料, 称这个过程为**均匀化**.

在第 12 章和第 19 章中, 对 $A(y), f(x)$ 和 Ω 作适当假设可以得到其均匀化方程为

$$-\nabla \cdot (\bar{A}\nabla u) = f, \quad x \in \Omega, \tag{1.2.2a}$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.2.2b}$$

用如下公式表示常数**均匀化导率张量** $\bar{A}$:

$$\bar{A} = \int_{\mathbb{T}^d} A(y)\left(I + (\nabla\chi(y))^{\mathrm{T}}\right)\mathrm{d}y. \tag{1.2.3}$$

(一阶) 校正量 $\chi(y)$ 是一个向量场, 它是如下周期性**单胞问题**的解:

$$-\nabla_y \cdot \left(\nabla_y \chi A^{\mathrm{T}}\right) = \nabla_y \cdot A^{\mathrm{T}}, \quad y \in \mathbb{T}^d, \tag{1.2.4}$$

其中定义 $\mathbb{T}^d$ 为 d 维单胞, 并且偏微分方程 (1.2.4) 具有周期边界条件.

计算有效系数 $\bar{A}$ 包括在单胞体上求解偏微分方程以及计算 (1.2.3) 的积分. 因此, 找到一个均匀化解 u 需要解两个椭圆型偏微分方程: 周期性单胞问题 (1.2.4), 它允许通过 (1.2.3) 来构造 $\bar{A}$ 以及 Dirichlet 问题 (1.2.2). 重要的是这些椭圆方程并不依赖于小尺度 ε. 在这些例子中, 这两个椭圆型偏微分方程可以用显示格式进行求解, 甚至当不是这些例子时, 它们也符合严密的分析或者能获取直接的数值解; 因为其没有迅速变化的系数, 因此, 它的计算量远远少于直接求解 (1.2.1) 的计算量.

除了通过扰动展开推导均匀化方程, 还将证明在某种意义下, 当 $\varepsilon \to 0$ 时, (1.2.1) 的解 $u^\varepsilon(x)$ 收敛于均匀化方程 (1.2.2) 的解 $u(x)$. 在第 12 章中通过扰动展开将得到均匀化方程. 有关具有高速振荡系数的二次椭圆型偏微分方程的均匀化理论将在第 19 章中给出严格的证明.

1.2.2 例 II: 对流扩散方程的均匀化

现在给出如何将均匀化的思想运用到进化偏微分方程这一类的抛物型方程中去. 考虑在一种不可压缩流中的化学浸泡, 如空气中的工业废物或水中的染料 ①.

① 事实上, 许多试验都是采用这种方法来使流体运动更加形象化.

假定工业废物或染料不影响流体的速率 $v(x,t)$, 随流体传输且服从分子碰撞, 其浓度场 $T(x,t)$ 服从下面的对流扩散方程:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \nabla T = D\Delta T, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,T), \tag{1.2.5a}$$

$$T = T_0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \{0\}, \tag{1.2.5b}$$

其中 $D > 0$ 是分子扩散系数, 并且 Laplacian 项捕捉到在这个不移动扩散例子中工业废物或染料的传播. 第一导数项捕捉到了由流体运动引起的工业废物或染料的对流, 希望研究对流和扩散的相互作用.

假定流体速率是光滑、稳定的, 在各个方向是 1 周期的且流体不可压缩 (或者是无散), 则 $v(x,t) = -b(x)$, 其中 $\nabla \cdot b(x) = 0$ ①.

注意到如果 T_0 是一个常数, 则 T 常数是方程的解. 设想 $T_0(x) = g(\varepsilon x)$ 时, 使得开始时浓度在空间中慢慢变化, 因此, 期望浓度只在大尺度和时间尺度上显著变化是有道理的. 如果 b 在单位立方体中均值为 0, 则均匀化技巧能找到改变尺度后的浓度场 $T(x/\varepsilon, t/\varepsilon^2)$, 使得浓度的一阶变量随 ε 趋于 0 而收敛于如下扩散方程的解 $\bar{T}$:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \mathcal{K} : \nabla\nabla\bar{T}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,T),$$

$$\bar{T} = g, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \{0\}.$$

因此, 其有效行为是完全扩散的. 此处, $\mathcal{K}$ 为**有效扩散张量**,

$$\mathcal{K} = DI + \int_{\mathbb{T}^d} b(y) \otimes \chi(y) \mathrm{d}y.$$

向量校正场 $\chi(y)$ 是如下**单胞问题的解**:

$$-D\Delta_y \chi(y) - b(y) \cdot \nabla_y \chi(y) = b(y), \quad y \in \mathbb{T}^d,$$

并具有周期性.

例 I 中所作的论述同样适用于如下情形: 找到均质场需要解两个偏微分方程 (一个是具有周期边界条件的椭圆型偏微分方程, 另一个是抛物型偏微分方程). 由于该方程不受 ε 影响, 则易于分析和得到解析解或数值解. 此外, 在运用该均匀化思想解决类似问题时, 容易得到近似解并能发现误差. 在第 13 章中, 运用扰动展开可以得到均匀化方程. 对于具有快速振荡系数的抛物型偏微分方程的均匀化问题, 其严格的理论将在第 20 章中给出.

---

① 选择这种记号是为了与第 13 章和第 20 章中使用的记号一致.

1.2.3　例III：平均化、均匀化及动力系统

当速度场 $v(x,t)=-b(x)$ 是稳定的并具有周期性, 但在区域内其平均值不等于零时, 考虑方程 (1.2.5). 令 $x\to x/\varepsilon$ 和 $t\to t/\varepsilon^{\alpha}$, 方程 (1.2.5) 变为

$$\frac{1}{\varepsilon^{2-\alpha}}\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{1}{\varepsilon}b^{\varepsilon}\cdot\nabla T=D\Delta T,\quad (x,t)\in\mathbb{R}^d\times(0,T), \tag{1.2.6a}$$

$$T=f,\quad (x,t)\in\mathbb{R}^d\times\{0\}, \tag{1.2.6b}$$

其中 $b^{\varepsilon}=b(x/\varepsilon)$. 当 $D=0$ 时, 选择 $\alpha=1$, 这时可用特征线法求解此方程; 特征线可通过求解如下常微分方程得到:

$$\frac{\mathrm{d}x^{\varepsilon}}{\mathrm{d}t}=b\left(\frac{x^{\varepsilon}}{\varepsilon}\right).$$

由于 $b(x)$ 具有周期性, x/ε 随周期尺度迅速变化, 为了消除迅速振荡因素, 通常会采用平均的思路, 这样可以看出在时变偏微分方程中快速消除尺度与常微分方程的平均化密切相关. 它们之间更深层次的联系将在第 14 章和第 21 章中给出. 显然, 当 b 的均值为零或不为零 (在某种意义上) 时, 要求在不同时间尺度 (当 a 的选取不同时) 下对 (1.2.6) 进行研究来观察有趣的动态行为, 这个问题在第 14 章中讨论.

当 $D>0$ 且向量场 b 的均值为零时, 通常选择 $a=2$. 方程 (1.2.6) 就是向后 Kolmogorov 方程, 这时需要求解随机微分方程①

$$\frac{\mathrm{d}x^{\varepsilon}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\varepsilon}b\left(\frac{x^{\varepsilon}}{\varepsilon}\right)+\sqrt{2D}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}, \tag{1.2.7}$$

其中 $W(t)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的标准 Brownian 运动. 这意味着对于 $x^{\varepsilon}(0)=x$, (1.2.6) 中 $T^{\varepsilon}(x,t)$ 的解析式可记为

$$T(x,t)=\mathbb{E}\left(f\left(x^{\varepsilon}(t)\right)|x^{\varepsilon}(0)=x\right),$$

其中 $\mathbb{E}$ 为运用 Brownian 运动测度 (Wiener 测度) 求得的平均值. 对于上述问题, 同样能够消除快速变化量 x/ε. 如果 b 是周期的、无散的且平均等于 0, 则前面例子的结果表明随着 $\varepsilon\to 0$, $x^{\varepsilon}(t)$ 收敛于 $X(t)$, 其中 $X(t)$ 服从扩散系数为 $\sqrt{2\mathcal{K}}$ 的 Brownian 运动,

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=\sqrt{2\mathcal{K}}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}.$$

① 实际上, 此处是将平流扩散方程 (1.2.5) 看成一个平流和扩散量的密度场方程, 其从本质上讲就是向前 Kolmogorov(Fokker-Planck) 方程. 但是, 由于 $v(x,t)$ 是无散的, 所以只能根据平流项来区别 Kolmogorov 方程, 并且 (1.2.6a) 实际上是与随机微分方程 (1.2.7) 对应的向后 Kolmogorov 方程.

此外, 如果 $K \geqslant DI$(在矩阵意义下), 通过给出无散对流场, 这种扩散相对分子扩散得到了加强. 抛物型偏微分方程均匀化和随机微分方程均匀化之间的联系将在第 11 章和第 13 章进行讨论. 在第 18 章和第 20 章分别给出了严格的随机微分方程均匀化理论和抛物型偏微分方程均匀化理论.

1.2.4 例Ⅳ: 动力系统中降维

推导均匀化椭圆型偏微分方程和抛物型偏微分方程的方法也同样适用于推导常微分方程和随机微分方程系统中的平均化或均匀化. 这样做导致有效方程不包含小尺度参数 ε, 因此, 更加有利于获取数值解并进行分析. 如下形式的动力系统就是一个典型的例子:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x,y),$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\varepsilon} g(x,y).$$

在这种情况下, 当 $\varepsilon \ll 1$ 时, 就使得这里存在一个尺度分离, 也就可以消除 y 和找到控制进化量 x 的近似方程

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F(X).$$

通过一个**不变流形**来消除 y 是最简单的情况, 情况更加复杂时是通过**平均**来消除 y 的.

在一些 $F \equiv 0$ 的情况下, 有必要延长方程的时间尺度: $t \to t/\varepsilon$, 以便于找到其中的非零影响, 则开始点的方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\varepsilon} f(x,y),$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\varepsilon^2} g(x,y).$$

在这种情况下, 当消除 y 并且拉伸 x 的尺度来得到满足 x 的方程, 从而找到 f 的起伏量时, f 的平均必须等于 0. 如果 y 的行为比较强, 则近似方程可采用如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F(X) + A(X)\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t},$$

其中 W 是标准单元内的 Brownian 运动. 这种对方程的推导过程称为**均匀化**.

在第 8, 10, 11 章中详述了基于这种思想的扰动展开. 至于线性偏微分方程, 运用分析技巧证明了原始方程与简化方程之间的误差估计, 将在第 15, 17, 18 章中给出严格的结论. 类似常微分方程和随机微分方程的 Markov 链的平均化结论将在第 9 章和第 16 章中给出.

1.3　平均化对均匀化

本书中, 为了获取线性算子方程的扰动展开, 根据统一性原理采用如下形式:

$$\mathcal{L}^{\varepsilon}u^{\varepsilon}=f \tag{1.3.1}$$

或

$$\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}=\mathcal{L}^{\varepsilon}u^{\varepsilon}. \tag{1.3.2}$$

特别地, 将对如下形式的算子 $\mathcal{L}^{\varepsilon}$ 更感兴趣:

$$\mathcal{L}^{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_1 \tag{1.3.3}$$

或

$$\mathcal{L}^{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon^2}\mathcal{L}_0+\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2. \tag{1.3.4}$$

在上述两个例子中, 假定 $\mathcal{L}_0$ 是非零空间, 并且在它的子空间中能捕捉到解的形态. 例如, (1.3.3), 这个例子就是**平均化**或是**一次扰动理论**, 它给出的是大数定理的一种形式. 第二个例子 (1.3.4) 就是**均匀化**或是**二次扰动理论**, 它给出的是中心极限定理的一种形式.

下面来看进化方程 (1.3.2). 这个例子将有助于研究抛物型偏微分方程和双曲型偏微分方程的平均化和均匀化, 并且借助于随机微分方程 Kolmogorov 方程和变异型也有利于研究常微分方程、Markov 链以及随机微分方程的平均化和均匀化 (Markov 链的向前方程和常微分方程的特征线方法). 同时也会研究在椭圆型偏微分方程均匀化问题中出现的方程 (1.3.1). 在这个例子中, 将会出现二次时间导数 (波动方程), 在这里叙述不是很详细, 但是发展的技巧的确可以运用, 并会给出这一类问题的参考文献. 当实施这一类展开式时, 重点阐述平均化和均匀化之间的区别以及证明这个 Fredholm 性质的重要性. 本书中也把这类方法运用到线性常微分方程的奇异扰动系统中, 不过只是简单地介绍了一些关键思想. 接下来的两小节说明了在第二部分中还要重复阐述的扰动展开.

1.3.1　线性系统的平均化

考虑如下线性常微分系统:

$$\frac{\mathrm{d}u^{\varepsilon}}{\mathrm{d}t}=\mathcal{L}^{\varepsilon}u^{\varepsilon}, \tag{1.3.5a}$$

$$\mathcal{L}^{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_1. \tag{1.3.5b}$$