

配套人教版现行教材 体现新课改教育理念

2004 修订版

互动

New 新课堂
高一数学

丛书主编 师 达
学科主编 乔家瑞



首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

王兴福 著



浙江太平天国史论考

浙江人民出版社

《互动新课堂》丛书 编委会

丛书主编	师 达
学科主编	数学 \ 乔家瑞 语文 \ 程汉杰 物理 \ 叶禹卿 英语 \ 齐平昌 化学 \ 魏大彭
本册作者	彭 林 孙一凡 隋丽丽 夏 雨 欧阳秋 艾 雪

图书在版编目(CIP)数据

互动新课堂·高一数学/师达,乔家瑞主编. -北京:首都师范大学出版社,
2002.6(2004修订)

ISBN 7-81064-381-9

I. 互… II. ①师…②乔… III. 数学课-高中-教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 026735 号

- 书 名** 互动新课堂·高一数学(2004修订版)
责任著者 乔家瑞
责任编辑 刘小峰
标准书号 ISBN 7-81064-381-9/G·251
出版发行 首都师范大学出版社(68418523 68982468)
地 址 北京西三环北路 105 号
网 址 www.cnup.cnu.cn
印刷单位 北京嘉实印刷有限公司
开 本 890×1240 1/32 13.5 印张 432 千字
2004年6月第三版 2004年6月第一次印刷
印 数 47,001~62,000 册
定 价 21.00 元

序

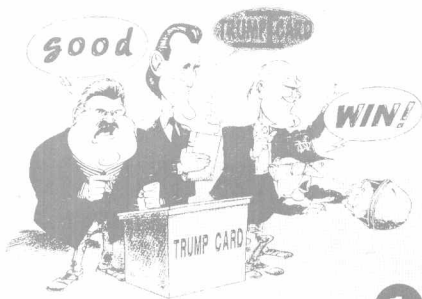
(2004修订版)

互动新课堂

在互动中学会思考、学会学习

《互动新课堂》丛书于2002年出版后，得到了广大师生的充分肯定。对书中呈现的教育理念表示极大认同；对书中高水平的知识解析和学习能力指导给予极大赞许；对书中“双栏互动”“双专题”设计所蕴含的魅力和启迪表示极大的兴趣。为回报广大师生的厚爱，我们在认真研讨师生意见的基础上，对本丛书进行了精心修订，从而使书的特点更加凸显，更具指导性，更实用，更好用。

(1)正确诠释和处理知识、能力的辩证关系，在知识的掌握和能力的培养上给学生以高层次指导。知识是人类认知世界的成果，它包括经验和系统的科学理论两个层面；能力则是指一个人顺利完成某种活动任务的个性心理品质和基本条件。一方面，知识为能力的发展提供基础。另一方面，掌握知识的速度与质量依赖于能力的发展。一个知识渊博的人，其见解往往深刻，其思考和处理问题的能力肯定比一个没有知识或知识面狭窄的人强得多。从一定意义上讲，能力的实质是能根据现实的新情况，对既有的知识进行重组或充实新的知识，继而对知识做出正确的选择并及时转化为合理的操作程序，从而实现问题从初始状态向目标状态转化，最终得以顺利解决。总而言之，大量的知识的占有是能力形成的基础，特别是在进入知识经济的21世纪更是如此。我们之所以强调这个问题，目的就是告诉中学生朋友们，在知识与能力的关系上；在“素质教育”与所谓“应试教育”问题上；在课堂教学与课外活动关系上；在培养能力、素质与提高高考成绩关系上不可偏废，不要走极端。从心理学上讲，中学阶段是感知发展，求知欲极为强烈的人生阶段。青少年朋友要充分利用这一黄金时段，注意课堂学习，注重知识积累，为成功打下坚实的知识基础。我们在编写本丛书时，首开“双专题”（知识专题、能力专题）设计之先，解析知识、能力、素质的辩证关系。重知识，又重能力。重知识，关键是抓核心知识点，打下牢固的基础；重能力，关键是掌握解决问题的思路、方法、规律，培养学会学习的能力。



(2)首开“双栏互动学习新方式”，在互动中思考，在互动中碰撞出思维火花。编精品教辅书，必须改变传统的教学模式和教辅书的传统内容体例结构模式。中国是一个文明古国，成形的学校教育，从孔子算起也有2500多年的历史了。教育历史悠长，这对知识的传承、文化的积累，对中华民族博大精深传统文化形成具有决定性意义。但同时其负面影响也显而易见，这就是中国教育的“师道尊严”和缺乏创新能力。本书在倡导新的学习方式上做了大胆探索。一改以往教辅书老师(作者)一讲到底，学生(读者)被动接受的局面，而采用互动双栏结构，一边讲“是什么?”，一边解析“为什么?”，分别设置了“命题意图”、“解题思路”、“解后反思”、“方法技巧归纳”等栏目，以及“提示”、“评点”、“注意”“想一想”等启示性警句，引导学生(读者)在思考中步步深入，在探究中品味顿悟的喜悦。师生互动，双向沟通，方寸图书宛如一个启发式大课堂。而双色印刷，用色彩凸显知识的重点、难点、考点；用色彩凸显对解题思路、方法、程序、规律的总结和归纳，使这个大课堂更加精彩靓丽。

(3)编精品教辅书，既要帮助学生摆脱“题海”战术纷扰，但也不要走向另一个极端。适度做题训练是非常必要的，做练习题是提高学科水平的重要环节。做题时往往会遇到一些“难题”、“怪题”，“怪题”、“偏题”是不可取的，对“难题”则应当下功夫研究。所谓难题有两种，一种是综合性强的题目，另一种是与实际联系比较密切的题目。在前一种题目中，需要使用多个概念、规律，需要把所学过的知识有机地联系在一起，有时还需要用到其他学科的知识进行整合。在后一种题目中，需要分析研究实际问题，从大量事实中找出事物所遵循的规律，用已知的概念、原理通过知识迁移、推导、拓展，去解决未知问题。对于这两种难题，必须下功夫研究，逐步提高自己的能力。

(4)编精品教辅书，应该告诉学生一个根本的学习方法，就是要学会思考，学会学习。毛主席说：要想知道梨子的滋味，你就必须亲自尝一尝。但是要想知道天下梨子的滋味，并不需要，也不可能把天下的梨子都尝一尝。怎么办呢?这就掌握学习的方法，培养学习能力。掌握知识的速度和质量依赖于能力的发展，能力可使知识迁移，知识迭加。知识获得也好，能力获得也好，主要不是老师教会，而是自己学会的，自己思考会的。“才以用而日生，思以行而不竭”，“学而不思则罔”。本书着重于体现能力中心、能力立意，力求做到明确目的、探索规律、分析原因、培养能力、适当练习，通过典型例题的示范解析，演示规律、演示方法，培养学生学会学习，提高学习能力。这也是本书的匠心所在。

本书以教育部制订的现行全日制中学教学大纲为依据，配套人教版现行教材。按学科分年级编写，计有：初一数学、语文、英语，初二数学、语文、英语、物理，初三数学、语文、英语、物理、化学；高一数学、语文、英语、物理、化学，高二数学、语文、英语、物理、化学，高三数学、语文、英语、物理、化学总复习，总计27册。每年6月份出版发行。

参与从本书编写的还有：张盛如、陈图麟、郝克亮、祝晔、李兆宜、王世武、董锋、孟晓琳、李葆芬、张虹、吴锁红、曹强利、许立群、何梅、姚蓉、吴娅茹、侯会兰、李绍珍、王萍、王玉昆、齐先代、孙晓华、王立红。

本丛书主编、学科主编及部分编者均为北京市的特级教师或教授。本书的出版，我们不敢妄言其好，因为它最终要接受市场的检验，接受中学师生朋友们的检验。但我们可以无愧地说，我们是以老师的良知，尽心尽力去做这套书的。我们相信修订版一定会继续得到广大师生的喜欢。

编委会



第1章

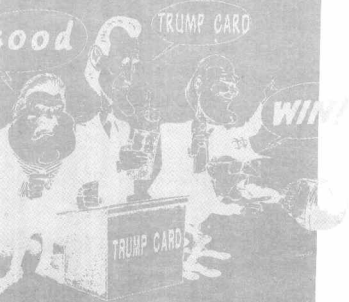
集合与简易逻辑

【图解知识结构】	1
【点击重点难点】	1
一、知识专题	2
专题一 集合的概念	2
专题二 集合与集合的关系	7
专题三 集合的运算	10
专题四 含绝对值不等式的解法	13 ✓
专题五 一元二次不等式的解法	19 ✓
专题六 逻辑联结词	25
专题七 四种命题	28
专题八 充分条件和必要条件	31
二、能力专题	35
专题一 解答集合问题应注意的几点	35
专题二 集合与不等式	39
专题三 命题的否定与否命题	45
三、学习效果评价	48
参考答案	54

第2章

函数

【图解知识结构】	57
【点击重点难点】	57
一、知识专题	58
专题一 映射的概念	58
专题二 函数的三要素	62
专题三 函数的单调性	70
专题四 函数的奇偶性	75
专题五 指数	81
专题六 反函数	85
专题七 指数函数	90
专题八 对数	98
专题九 对数函数	104
专题十 建立函数模型解应用题	110



第3章

数列

二、能力专题	116
专题一 函数图象的几何变换	116
专题二 复合函数的单调性	123
专题三 利用函数性质求函数最值	126
专题四 三个二次问题的内在联系	134
专题五 抽象型函数问题的解题策略	143
专题六 分段函数问题的类型及解法	150
专题七 分类讨论在研究函数问题中的运用	159
三、学习效果评价	164
参考答案	168

【图解知识结构】	171
【点击重点难点】	171
一、知识专题	172
专题一 等差数列的定义	172
专题二 等差数列的通项公式、求和公式	175
专题三 等比数列的定义	191
专题四 等比数列的通项公式、求和公式	194
二、能力专题	206
专题一 通项公式的求法	206
专题二 数列求和	209
专题三 数列应用题	215
专题四 数列研究中的数学思想	224
三、学习效果评价	241
参考答案	245

第4章

三角函数

【图解知识结构】	250
【点击重点难点】	250
一、知识专题	251
专题一 角的概念的推广	251
专题二 弧度制	256



专题三	任意角的三角函数	262
专题四	单位圆中的三角函数线	267
专题五	同角三角函数的基本关系式	272
专题六	诱导公式	287
专题七	正弦函数、余弦函数的图象和性质	293
专题八	函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 与图象变换	308
专题九	两角和与差的三角函数	321
专题十	二倍角的正弦、余弦和正切	331
二、能力专题		337
专题一	三角函数性质研究中的数学思想方法	337
专题二	三角函数最值问题的两种基本类型	345
三、学习效果评价		350
参考答案		357

第5章 平面向量

【图解知识结构】	361
【点击重点难点】	362
一、知识专题	362
专题一	向量的概念 362
专题二	向量的加法和减法 365
专题三	实数与向量的积 369
专题四	平面向量的坐标运算 373
专题五	线段的定比分点 378
专题六	平面向量的数量积 386
专题七	平移 393
专题八	正弦定理 余弦定理 397
专题九	解斜三角形应用举例 407
二、能力专题	413
专题一	向量的综合应用 413
三、学习效果评价	416
参考答案	422

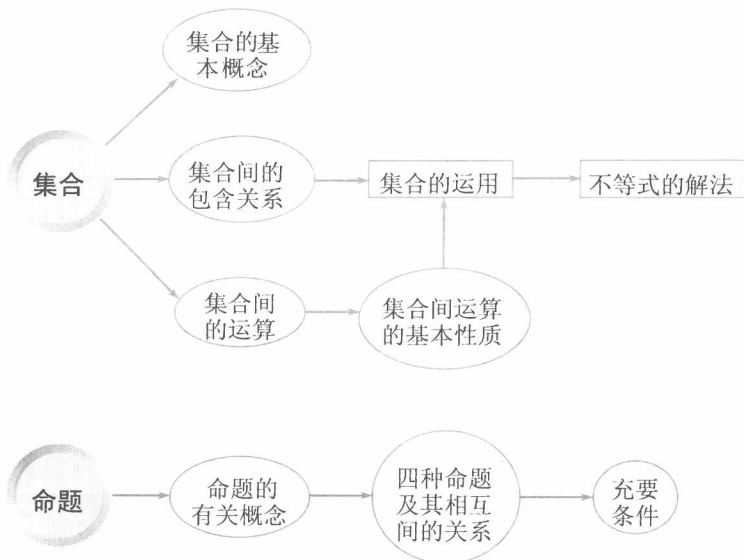


第1章

集合与简易逻辑



图解知识结构



点击重点难点

本章的重点是：

(1) 有关集合的基本概念(集合、全集、子集、交集、补集、并集)及其表示方法(包括集合的思想、术语、符号、表示法、运算)；

(2) $|x| < a$ 与 $|x| > a$ ($a > 0$) 型不等式的解法，一元二次不等式的解法；

(3) 逻辑联结词“或”、“且”、“非”与充要条件(包括利用这些词语进行判断和简单推理)。

本章的难点是:

- (1)有关集合概念的含义以及这些概念相互之间的区别与联系;
- (2)对绝对值意义的理解;
- (3)对一元二次方程、二次函数、一元二次不等式的关系的认识和理解;
- (4)对一些代数命题真假的判断,关于充要条件和反证法的运用.

一、知识专题

题解

:关键是抓核心知识点,即:重点、难点、考点.



专题一 集合的概念

专题内涵解读

集合的概念与特征

集合是数学中不定义的原始概念,只作描述.它具有如下三个特征:

确定性:对于任何一个对象,都能确定它是不是某一给定集合的元素.如:三内角分别为 $20^\circ, 70^\circ, 90^\circ$ 的三角形是{直角三角形}的元素;三内角分别为 $30^\circ, 80^\circ, 70^\circ$ 的三角形则不是{直角三角形}的元素.

互异性:一个给定集合中所含的任何两个元素都是不同的对象(即在一个集合中,元素没有重复现象).如:方程 $(x-1)^2(x-2)=0$ 的解集应表示为: $\{1, 2\}$,而不应该写成 $\{1, 1, 2\}$.

无序性:在一个集合里,不考虑元素之间的顺序.如:集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 与 $\{2, 4, 1, 3\}$ 是表示同一个集合.为了易于观察和应用,我们习惯上常用一般顺序规律表示集合.

集合的分类

含有有限个元素的集合叫做有限集;含有无限个元素的集合叫做无限集.

集合的表示法

列举法:把集合中的元素一一列举出来,写在大括号内表示集合的方法.如:不大于10的正偶数集合,可表示为: $\{2,4,6,8,10\}$.其特点是元素表示完整、清楚,但较繁琐,有局限性.

描述法:把集合中的元素的公共属性描述出来,写在大括号内表示集合的方法.具体形式为 $\{\text{元素的一般形式}|\text{元素所具有的公共属性}\}$.如:不大于10的正偶数集合,可表示成 $\{x|2\leq x\leq 10, x \text{ 是偶数}\}$.其特点是简洁明了,便于运算,应用范围广.

集合与元素的符号

集合符号:常用大写的拉丁字母表示(A、B、C、……).

元素符号:常用小写的拉丁字母表示(a、b、c、……).

其中, \mathbf{N} —自然数集(非负整数集); \mathbf{N}^* 或 \mathbf{N}_+ —正整数集; \mathbf{Q} —有理数集; \mathbf{R} —实数集.要防止用 $\{\mathbf{R}\}$ 表示实数集的错误写法.

元素与集合的关系

元素与集合的关系有属于(\in)与不属于(\notin)两种,有且仅有这两种关系.

典型例题示范解析

例 1 用列举法表示下列集合:

(1)不大于10的非负偶数集; $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

(2) $\{15$ 的正约数 $\}$; $\{1, 3, 5, 15\}$

(3) $\{$ 两边分别在坐标轴的负半轴上,且边长为1的正方形顶点 $\}$.

(4) $A = \left\{ x \in \mathbf{N} \mid \frac{9}{9-x} \in \mathbf{N} \right\}$

(5) $B = \left\{ \frac{9}{9-x} \in \mathbf{N} \mid x \in \mathbf{N} \right\}$

(6) $C = \{ y \mid y = x^2 + 6, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N} \}$

(7) $D = \{ (x, y) \mid y = -x^2 + 6, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N} \}$

(8) $E = \left\{ x \mid \frac{m}{n} = x, m+n=5, m \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}^* \right\}$

互动

解: (1) ∵ 不大于 10 是小于等于 10; 非负是大于等于零的意思, ∴ 不大于 10 的非负偶数集是 $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.

(2) ∵ 1 和自然数本身是当然约数, ∴ 答案是 $\{1, 3, 5, 15\}$.

(3) $\{(0, 0), (-1, 0), (0, -1), (-1, -1)\}$.

(4) 当 $x=0, 6, 8$ 这三个自然数时, $\frac{9}{9-x}$
 $=1, 3, 9$ 也是自然数

$$\therefore A = \{0, 6, 8\}$$

(5) 由 (4) 知: $B = \{1, 3, 9\}$

(6) 由 $y = -x^2 + 6 \quad x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}$ 得: $y \leq 6$

∴ $x=0, 1, 2$ 时, $y=6, 5, 2$, 符合题意

$$\therefore C = \{2, 5, 6\}$$

(7) 点 (x, y) 满足条件 $y = -x^2 + 6$,

$x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}$, 则有 $\begin{cases} x=0 \\ y=6 \end{cases}, \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

$$\therefore D = \{(0, 6), (1, 5), (2, 2)\}$$

(8) 依题意知: $m+n=5, m \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}^*$,

则 $\begin{cases} m=0 \\ n=5 \end{cases}, \begin{cases} m=1 \\ n=4 \end{cases}, \begin{cases} m=2 \\ n=3 \end{cases}, \begin{cases} m=3 \\ n=2 \end{cases}, \begin{cases} m=4 \\ n=1 \end{cases}, x$

要满足条件: $x = \frac{m}{n}$,

$$\therefore E = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4\right\}$$

解题点拨:

列举法就是将集合中的元素不重复、不计次序、不遗漏地列出, 且元素与元素之间用“,”(逗号)隔开.

提示: 注意小括号的使用

提示: 集合 A 中的元素是自然数 x , 它必须满足

条件 $\frac{9}{9-x}$ 也是自然数,

可以列表:

x	$\frac{9}{9-x}$
0	1
6	3
8	9

注意: (6)和(7)中代表元素的区别. 集合 C 中的元素是 y , C 集合表示函数 $y = -x^2 + 6$ 函数值 y 的取值范围; 而集合 D 的元素是点 (x, y) , 集合 D 表示二元方程 $y = -x^2 + 6$ 的解集, 或者理解为抛物线 $y = -x^2 + 6$ 上的点组成的集合.

例 2 用描述法表示下列集合:

- (1) 正偶数集;
- (2) 被 3 除余 2 的正整数集合;
- (3) 使 $y = \frac{1}{x^2 + x - 6}$ 有意义的实数 x 的集合;
- (4) 坐标平面内坐标轴上的点集;
- (5) 坐标平面内在第二象限内的点所组成的集合;
- (6) 坐标平面内,不在第一、三象限的点的集合.

互动

解: (1) $\{x | x = 2n, n \in \mathbf{N}^*\}$.

(2) $\{x | x = 3n + 2, n \in \mathbf{N}\}$.

(3) $\{x | x \neq 2 \text{ 且 } x \neq -3, x \in \mathbf{R}\}$.

(4) $\{(x, y) | xy = 0\}$.

(5) $\{(x, y) | x < 0 \text{ 且 } y > 0\}$.

(6) $\{(x, y) | xy \leq 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$.

提示: 注意说明 n 的含义.

提示: 注意“且”的使用.

提示: 注意“且”的使用.

解后反思:

需要多层次描述属性时,可选择逻辑连结词“且”、“或”等连结,若描述部分出现元素记号以外的字母时,要进一步对新字母说明其含义或指出其取值范围.

例 3 试指出集合 M 与 P 表示的集合的含义,并说明哪些集合 M 与集合 P 表示同一集合:

(1) $M = \{(1, -3)\}, P = \{(-3, 1)\}$;

(2) $M = \{1, -3\}, P = \{-3, 1\}$;

(3) $M = \left\{\frac{1}{3}, 0\right\}, P = \{0, 3\}$;

(4) $M = \{(3, -7)\}, P = \{(x, y) | x = 3 \text{ 且 } y = -7\}$.

解: (1) M 是含有一个坐标为 $(1, -3)$ 的点集, P 也是单元素点集,但是所含元素是点 $(-3, 1)$. 显然, M 与 P 不是同一点集.

(2) M 是含有 1, -3 两个元素的数集, P 也是含有 1, -3 两个元素的数集,由集合中元素的无序性知, M 和 P 是同一数集.

提示: 集合元素具有无序性

(3) M 是含有 $0, \frac{1}{3}$ 两个元素的数集, 而 P 是含有 $0, 3$ 两个元素的数集, 显然, M 和 P 不是同一数集.

(4) M 和 P 是同一点集.

提示: 集合 M 用的是描述法, 集合 P 用的是列举法

例 4 用符号 \in 或 \notin 填空

(1) 0 _____ \mathbf{N} , 0 _____ \mathbf{N}^* , $\sqrt{2}$ _____ \mathbf{Z} , 0.5 _____ \mathbf{R} ;

(2) $\frac{1}{3}$ _____ \mathbf{Q} , -3 _____ \mathbf{N} , $\sqrt{3}$ _____ \mathbf{Q} , 0 _____ \mathbf{Z} ;

(3) 0 _____ \mathbf{R}^* , $-\frac{1}{2}$ _____ \mathbf{Q} ;

(4) $\sqrt{12}$ _____ $\{x|x \leq \sqrt{11}\}$;

(5) 3 _____ $\{x|x = n^2 + 1, n \in \mathbf{N}^*\}$;

(6) 2 _____ $\{x|x^2 - 2x = 0\}$;

(7) $(1, 1)$ _____ $\{(x, y) ||x| = 2 \text{ 且 } |y| = 1\}$;

(8) $(0, 1)$ _____ $\{y|y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$.

解: (1) \in, \notin, \notin, \in .

(2) \in, \notin, \notin, \in .

(3) \notin, \in .

(4) \notin .

(5) $\notin, \because n^2 + 1 = 3, n \in \mathbf{N}^*$ 时无解.

(6) $\in, \because 2^2 - 2 \cdot 2 = 0$.

(7) \notin .

(8) $\notin, \because (0, 1)$ 是点, 而 $\{y|y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$ 是数集, 若将 $x = 0, y = 1$ 代入 $y = x^2 + 1$, 会误认为 $(0, 1) \in \{y|y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$.

互动

提示: 在(5)~(8)题中, 要认真观察集合中代表元素的特征. 第(5)和第(6)题中, “ x ”的含义是不一样的.

互动

提示: 你答对了吗? 这道题很容易答错.

例 5 方程组 $\begin{cases} x+y=1, \\ x-y=-1 \end{cases}$ 的解集是().

(A) $\{x=0, y=1\}$ (B) $\{0, 1\}$

(C) $\{(0,1)\}$

(D) $\{(x,y) | x=0 \text{ 或 } y=1\}$

互动

$$\text{解:} \because \left\{ (x,y) \mid \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-1 \end{cases} \right\} = \left\{ (x,y) \mid \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \right\},$$

\therefore 选择(C).

提示:想一想,方程组的解集还有别的表示方法吗?

解后反思:

因为方程组的解是一对有序实数对 $(0,1)$,所以用列举法表示解集应是 $\{(0,1)\}$.而 $\{x=0,y=1\}$ 不符合集合表示法的基本模式,即既不是列举法也不是描述法. $\{0,1\} \neq \{(0,1)\}$,集合 $\{0,1\}$ 中包含 $0,1$ 两个元素,集合 $\{(0,1)\}$ 是单元素集合.集合 $\{(x,y) | x=0 \text{ 或 } y=1\}$ 的元素是 $(0,y)$ 或 $(x,1)$,其中 x,y 是实数,这个集合有无限多个元素.如果用描述法表示解集应是: $\{(x,y) | x=0 \text{ 且 } y=1\}$.



专题二 集合与集合的关系

专题内涵解读

子集:如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 叫做集合 B 的子集,记作 $A \subseteq B$.

真子集:若 $A \subseteq B$,且存在 $b \in B$ 但 $b \notin A$,称 A 是 B 的真子集,记作 $A \subsetneq B$.

集合的相等:若 $A \subseteq B$,且 $B \subseteq A$,则称 A 与 B 相等,记作 $A=B$.显然,若 $A=B$,则两集合元素相同.

我们把不含任何元素的集合叫做**空集**,记作 \emptyset .规定空集是任何集合 A 的子集,即 $\emptyset \subseteq A$;空集是任何非空集合 $A(A \neq \emptyset)$ 的真子集,即 $\emptyset \subsetneq A$.

典型例题示范解析

例 1 设 $M = \{x | x \leq \sqrt{10}\}$, $a = 3$,则下列关系中正确的是().

(A) $a \subsetneq M$

(B) $a \notin M$

(C) $\{a\} \in M$

(D) $\{a\} \subsetneq M$

解: a 是元素, M 是集合, 它们之间的关系是“ \in ”或“ \notin ”, 排除(A)、(C), 又 $3 = \sqrt{9} < \sqrt{10}$, $\therefore a \in M$, 故选(D).

互动

提示: 先想一想 \in 与 \subseteq 的区别.

解后反思:

符号“ \in ”与“ \subseteq ”(或“ \subsetneq ”)的区别, 前者用于元素与集合, 后者用于两集合之间.

例 2 写出集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集和真子集.

互动

解: 子集: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$;

解后反思:

对 n 个元素的集合, 其子集的个数为 2^n 个; 真子集个数为 $2^n - 1$ 个.

真子集: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$.

提示: 应该记住这个结论.

例 3 设 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{C | C \subseteq A\}$, 求 B .

提示: 请同学们先想一想集合 B 的含义

互动

解: $\because A = \{1, 2, 3\}$,

解题点拨:

对 B 的理解应为“ B 是集合的集合”. B 中的代表元素为 C , C 适合的条件是 $C \subseteq A$, 即 C 是 A 的子集. 这就是说, B 是集合 A 的子集的集合.

$\therefore A$ 的子集为: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$.

又 $\because B = \{C | C \subseteq A\}$,

$\therefore B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

例 4 已知集合 $A = \{a, a+b, a+2b\}, B = \{a, ac, ac^2\}$, 若 $A=B$, 求 c 的值.

互动

解:分两种情况进行讨论.

$$(1) \text{ 若 } \begin{cases} a+b=ac, \\ a+2b=ac^2, \end{cases} \text{ 则 } a+ac^2-2ac=0.$$

当 $a=0$ 时,集合 B 中的三个元素均为零,故 $a \neq 0$.

$\therefore c^2-2c+1=0$, 即 $c=1$, 但 $c=1$ 时, B 中的三个元素又相同,此时无解.

$$(2) \text{ 若 } \begin{cases} a+b=ac^2, \\ a+2b=ac, \end{cases} \text{ 则 } 2ac^2-ac-a=0.$$

$$\therefore a \neq 0, \therefore 2c^2-c-1=0,$$

$$\text{即 } (c-1)(2c+1)=0.$$

$$\text{又 } c \neq 1, \therefore c = -\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \text{当 } A=B \text{ 时,有 } c = -\frac{1}{2}.$$

提示:一定要注意集合元素的互异性.

解后反思:

在确定集合中的待定字母时,易产生与集合性质相矛盾的增解.

例 5 设集合 $A = \{a | a = k^2 + 1, k \in \mathbf{N}^*\}$, 集合 $B = \{b | b = p^2 - 4p + 5, p \in \mathbf{N}^*\}$, 试确定集合 A 和集合 B 之间的关系.

解: 设 $a \in A$, 则 $a = k^2 + 1$ ($k \in \mathbf{N}^*$). 令 $p = k + 2$

①

$$\therefore k \in \mathbf{N}^* \quad \therefore p = k + 2 \in \mathbf{N}^*, \therefore k = p - 2,$$

把 $k = p - 2$ 代入①得:

$$a = (p - 2)^2 + 1 = p^2 - 4p + 5 = 6 \in B$$

$\therefore a \in B, \therefore$ 集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素.

又当 $p = 2$ 时, $b = 1 \quad \therefore 1 \in B$

$$\therefore a = k^2 + 1 \quad (k \in \mathbf{N}^*) \quad \therefore a \neq 1 \quad \therefore 1 \notin A$$

$$\therefore A \subsetneq B$$

即集合 A 是集合 B 的真子集.