



研究生教学用书

电机电磁场的 分析与计算

汤蕴璆 梁艳萍 编著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

研究生教学用书

电机电磁场的分析与计算

汤蕴璆 梁艳萍 编著
许善椿 审



机械工业出版社

本书共8章,内容分成四部分。第一部分(第1章和第3章)主要阐明恒定磁场和似恒电磁场的基本理论,包括电磁场的基本方程和分界面条件、定解条件的建立,各种电磁位的引入等。第二部分(第2章和第4章)说明恒定和似恒电磁场的解析解法,并用电机中的一系列典型问题说明几种主要的求解方法及其求解步骤。第三部分(第5章、第6章和第7章)说明数值解法(有限单元法和有限差分法)的理论基础和实施,并用电机中的一些具体例子说明其应用。第四部分(第8章)是有限单元法在解决交流电机的一些整机性的实际电磁场问题中的应用,其中许多内容是作者所领导的课题组在多年的科研工作中所取得的研究成果。

本书是高等学校电气工程系的研究生教材,也可供高等学校有关教师以及电机方面的科研和工程技术人员作为参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

电机电磁场的分析与计算/汤蕴璆,梁艳萍编著. —北京:机械工业出版社,2010.4

研究生教学用书

ISBN 978-7-111-28798-8

I. ①电… II. ①汤… ②梁… III. ①电机—电磁场—研究生—教材 IV. ①TM30

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第045978号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:闫晓宇 责任编辑:闫晓宇·蔡家伦 责任校对:李婷

封面设计:张静 责任印制:乔宇

北京铭成印刷有限公司印刷

2010年7月第1版第1次印刷

169mm×239mm·23.75印张·463千字

标准书号:ISBN 978-7-111-28798-8

定价:39.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010) 88361066

门户网:<http://www.cmpbook.com>

销售一部:(010) 68326294

教材网:<http://www.cmpedu.com>

销售二部:(010) 88379649

读者服务部:(010) 68993821

封面无防伪标均为盗版

前 言

关于电机电磁场方面的著作，国内已出版过几本，但是多数属于专著；有的篇幅较大，有的内容较深，且绝大多数已经不再出版。为了研究生的教学需要，有必要编写一本篇幅和深度适中，兼顾基本理论和实际应用的教材。本书就是为了满足这一需要而编写的。

本书的特点是：

1. 对恒定和似恒电磁场的基本理论，包括基本方程和各种电磁位的导出，边值问题的唯一性和求解方法，有较为完整的阐述。这些内容，无论对解析解法还是数值解法，都是一个基础，所以很重要。

2. 对电机中很多经典问题的解析解法，进行了详细的说明；包括控制方程和边界条件的确定，采用哪种方法求解，特解和通解的得出，任意常数的确定等，使读者在解决其他类似问题时有所遵循。

3. 对恒定和似恒电磁场的数值解法，包括网格剖分、插值函数的建立，控制方程和有关泛函的离散，第一类边界条件和周期性边界条件的引入，差分或有限元方程组的建立和求解等，作出了较为详细的推导和说明，使读者对有限元法和有限差分法的建立和实施，有一个清晰而具体的了解。

4. 用数值法对电机内许多局部的磁场问题（槽内磁场，气隙磁场等），以及定、转子横截面内的整体磁场分布进行了计算，使读者初步熟悉计及磁饱和与集肤效应时，激磁电流、杂散损耗、稳态和瞬态时的各个电抗及其饱和值，以及运行性能的计算方法。

5. 第7章对三维恒定和似恒电磁场的泛函的离散格式进行了推导，为读者进一步进行三维计算和分析提供了方便。

6. 第8章列出了作者所领导的课题组在过去的研究工作中所解决的、已经得到实际应用的几个问题。

全书共8章和2个附录，总教学时数为60~80学时。书中所有公式均采用国际单位制，即A-MKS制。

本书由汤蕴璆和梁艳萍编著，梁艳萍编写了第8章中的几节，汤蕴璆编写了其他章节并负责全书的定稿工作。全书由哈尔滨大电机研究所许善椿高级工程师审稿。许高工对本书内容提出了不少宝贵意见，对此表示衷心的感谢。

作 者

2010年3月

目 录

前言

第 1 章 恒定磁场的基本理论 1

- 1.1 恒定磁场的基本方程 1
- 1.2 标量磁位和向量磁位 5
- 1.3 恒定磁场的分界面条件 10
- 1.4 恒定磁场问题的定解条件 14
- 1.5 恒定磁场中的磁场能量和
直流电感 15
- 小结 16
- 参考文献 18

第 2 章 恒定磁场的解析解法 19

- 2.1 无界空间中恒定磁场的计算 ... 19
- 2.2 镜像法 27
- 2.3 具有铁磁边界时二维拉普拉斯
方程的直接求解 36
- 2.4 主极磁场正弦分布时凸极同步
发电机的极靴外形 39
- 2.5 定子正弦磁动势在均匀气隙内
所产生的磁场 41
- 2.6 气隙磁场正弦分布时三相感应
电动机空载时的转子磁场 43
- 2.7 线电流在气隙中所产生的
磁场 45
- 2.8 具有铁磁边界时泊松方程的
解法 51
- 2.9 半闭口圆形槽内载流导体所
产生的磁场 52
- 2.10 单重傅里叶级数法——变压器的
漏磁场和漏抗 56
- 2.11 用双重傅里叶级数法求解泊松
方程 62
- 小结 65

参考文献 66

第 3 章 时变电磁场的基本

理论 68

- 3.1 静止介质中的麦克斯韦方程 ... 68
- 3.2 涡流方程和波动方程 72
- 3.3 时变电磁场中的电磁位 74
- 3.4 似恒电磁场的分界面条件 80
- 3.5 似恒电磁场的定解条件 83
- 3.6 时变电磁场的能量及其转化 ... 84
- 3.7 运动介质中的电磁场方程 87
- 小结 88
- 参考文献 89

第 4 章 似恒电磁场的解析解法 ... 91

- 4.1 表面有正弦磁场激励时半无限大
导体内的电磁场 91
- 4.2 薄长金属板中的正弦电磁场 ... 93
- 4.3 矩形开口槽内导体通有正弦
电流时的集肤效应 99
- 4.4 槽内空心载流导体中的电流
集肤效应 105
- 4.5 叠片铁心的片间涡流 108
- 4.6 处于二维正弦磁场中矩形导体内
的涡流和涡流损耗 113
- 4.7 圆形半闭口槽内导条通有正弦
电流时的集肤效应 119
- 4.8 用叠加法计算涡流损耗 122
- 4.9 隐极交流电机的气隙磁场和
能量流传 126
- 4.10 表面突加阶跃磁场时半无限大
导体内磁场的建立 132
- 4.11 薄长钢片中恒定磁场的
建立和衰减 134

4.12 矩形实心铁心中恒定磁场的建立和衰减	138	6.13 二维正弦涡流场的有限元解法	231
小结	141	6.14 刀形槽内导条通有正弦电流时的集肤效应	237
参考文献	142	6.15 二维非线性涡流场的有限元解法	240
第5章 电磁场问题的数值解法——有限差分法	144	小结	243
5.1 差分、差商和截断误差	144	参考文献	245
5.2 二维拉普拉斯方程的差分离散	148	第7章 三维恒定和似恒电磁场的有限元解法	247
5.3 电枢开槽时气隙磁场的分布	152	7.1 三维有限元分析时常用的单元及其形状函数	247
5.4 泊松方程和准泊松方程的差分离散	154	7.2 三维恒定无旋磁场的有限元解法	252
5.5 直流电机负载时的非线性磁场	157	7.3 三维恒定旋度磁场的边值问题	259
5.6 正弦涡流方程的差分离散	162	7.4 向量泊松方程边值问题的有限元解法	263
5.7 瞬态涡流方程的差分离散	163	7.5 旋度旋度方程边值问题的有限元解法	274
小结	167	7.6 三维正弦涡流场的 A , φ 表述	280
参考文献	167	7.7 \dot{A} , $\dot{\varphi}$ 法的有限元离散	286
第6章 二维磁场问题的有限元解法	169	小结	300
6.1 有限单元法的基本思想和实施步骤	169	参考文献	301
6.2 变分法初步	170	第8章 交流电机内的电磁场问题	304
6.3 二维泊松方程混合边值问题的变分表述	175	8.1 笼型感应电动机起动时磁场和起动性能的有限元计算	304
6.4 单元剖分和单元的插值函数	179	8.2 大型凸极同步电机主极和电枢磁场的波形系数	310
6.5 泛函的离散和有限元方程的形成	188	8.3 同步发电机额定励磁电流的有限元计算	320
6.6 定、转子单边开槽时气隙的比磁导	203	8.4 饱和同步电抗的有限元计算	325
6.7 槽内载流导体所生的磁场	209	8.5 瞬态电抗的有限元计算	330
6.8 二维准泊松方程混合边值问题的有限元解法	211	8.6 实心转子感应电动机的准三维分析	344
6.9 周期性边界条件的处理	214	8.7 汽轮发电机端部磁场计算	
6.10 凸极同步电机空载磁场的有限元计算	218		
6.11 二阶三角元	221		
6.12 加权余量法	228		

简介	355	附录 A 向量分析公式	363
参考文献	359	附录 B 恒定和似恒电磁场边值问题 的唯一性	364
附录	363		

第 1 章 恒定磁场的基本理论

不随时间而变化的电流称为恒定电流，在恒定电流周围将形成恒定磁场（亦称为静态磁场）。电机内的许多电磁场问题（例如气隙磁场，不计集肤效应时槽内载流导体所生的漏磁场，变压器一次和二次绕组的漏磁场等），都可以作为恒定磁场问题来研究。

本章首先说明恒定磁场的基本方程，然后根据场的不同类型，先引入标量磁位，再引入向量磁位，并导出其所满足的微分方程；接着讨论恒定磁场的分界面条件；最后对恒定磁场问题的定解条件作一简介，对直流电感作一简单说明。

1.1 恒定磁场的基本方程

恒定磁场的特点是，磁场在空间的分布是恒定的，不随时间而变化，因此磁场不会产生感应电场，于是磁场和电场可以分别加以研究。

恒定磁场的大小和分布，可以用磁感应强度 B （亦称磁通密度）或磁场强度 H 来描述。实验证明，在恒定磁场中，磁场强度 H 遵守安培环路定律；磁感应强度 B 遵守磁通连续性定律。下面对这两条定律作一简要说明。

1. 安培环路定律

积分形式 磁场是由电流产生的。实验证明，在恒定磁场中，磁场强度 H 沿空间任意闭合曲线 C 的回路积分值 $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ ，恒等于

由 C 所包围的任意曲面 S 上所通过电流值 $\iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$ ，如图 1-1 所示；式中 \mathbf{J} 为 S 上各点的电流密度；曲线 C 的循行方向与曲面 S 的法线方向之间符合右手螺旋关系。此规律称为安培环路定律，用数学形式表示时有

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (1-1)$$

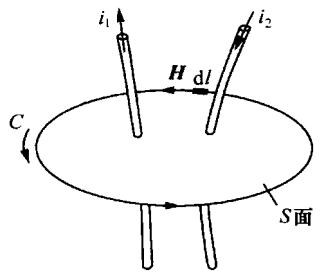


图 1-1 安培环路定律

在图 1-1 中，通过 S 面的全部电流值为 $\iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = i_1 - i_2$ 。式(1-1)的左端是一个回路积分，右端是一个面积分，所以通常把式(1-1)称为安培环路定律的积分形式。

微分形式 研究磁场问题时，常常需要知道磁场中任一点处的磁场强度 H ，与该点和周围各点的电流密度 J 之间的关系，也就是说要找出式(1-1)的微分

形式。

由向量分析中的斯托克斯定理可知,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s}$$

上式对以闭合曲线 C 作为边界的任何曲面 S 都成立, 由此式(1-1)就可以改写成

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

或

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1-2)$$

式(1-2)就是安培环路定律的微分形式。上式说明, 磁场强度 \mathbf{H} 的旋度就等于电流密度 \mathbf{J} 。

研究电机的磁场问题时, 常用的坐标系是直角坐标系和圆柱坐标系。在直角坐标系中, $\text{rot } \mathbf{H}$ 的表达式为

$$\text{rot } \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (1-3)$$

在圆柱坐标系中, $\text{rot } \mathbf{H}$ 的表达式为

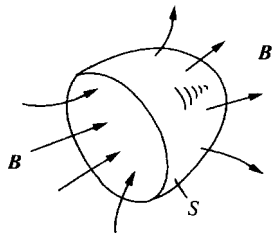
$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r\mathbf{a}_\theta & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_r & rH_\theta & H_z \end{vmatrix} = \mathbf{a}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial z} \right) + \mathbf{a}_\theta \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + \mathbf{a}_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial rH_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right) \quad (1-4)$$

无旋磁场和旋度磁场 若所研究的区域 V 内, 电流密度 \mathbf{J} 处处为 0, 则磁场强度的旋度 $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, 此时 V 内的磁场就称为无旋磁场; 若电流密度 $\mathbf{J} \neq 0$, 则磁场强度的旋度 $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$, 此时 V 内的磁场称为旋度磁场。

2. 磁通连续性定律

积分形式 分析和实验表明, 对于空间任选的一个闭合曲面 S , 进入该曲面的磁通量恒等于穿出该曲面的磁通量。若以穿出 S 的磁通量规定为正, 进入 S 的磁通量为负, 亦可以说, 穿出 (或进入) S 面的总磁通量恒等于 0, 如图 1-2 所示。用数学式子表达时, 磁感应强度 \mathbf{B} 对闭合曲面 S 的面积分应恒等于 0; 即

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (1-5)$$



这一规律称为磁通连续性定律, 式(1-5)为其积分形式。图 1-2 磁通连续性定律

式(1-5)说明,磁通线是处处连续、无头无尾的。

微分形式 从式(1-5)出发,利用向量分析中的高斯定理

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{B} dv$$

把磁感应强度 \mathbf{B} 的面积分化成 $\operatorname{div} \mathbf{B}$ 的体积分,其中 V 为闭合曲面 S 所包含的体积,即可得到

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1-6)$$

式(1-6)是式(1-5)的微分形式。式(1-6)说明,磁感应强度 \mathbf{B} 的散度处处为0,即磁场 \mathbf{B} 是一个无源场。

在直角坐标系中, $\operatorname{div} \mathbf{B}$ 的表达式为

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (1-7)$$

在圆柱坐标系中, $\operatorname{div} \mathbf{B}$ 的表达式为

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (1-8)$$

以上这两条定律,一条涉及磁场强度 \mathbf{H} ,另一条涉及磁感应强度 \mathbf{B} ,它们都没有涉及介质的磁性质,即无论在什么介质中,这两条定律都成立。至于 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 之间具有什么联系,这将取决于介质的磁性质。

3. 介质的宏观磁性质和本构关系

一般来说,介质内部每点的磁感应强度 \mathbf{B} 和磁场强度 \mathbf{H} 之间,可以用该点的磁导率 μ 联系起来,即

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \text{或} \quad \mathbf{H} = \nu \mathbf{B} \quad (1-9)$$

式中, ν 称为介质的磁阻率,它等于磁导率的倒数,即 $\nu = \frac{1}{\mu}$ 。式(1-9)称为介质的本构关系或成份方程。

组成电机的磁介质主要有两种,一种是空气和铜,另一种是铁磁介质。对于空气和铜,磁导率为一常值, $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$ 。铁磁介质的磁性能比较复杂,原因有三:

(1) 若铁心内的磁感应强度超过磁化曲线膝点处的磁感应强度值,铁心将出现磁饱和现象,使 $B \sim H$ 关系成为非线性关系;此时随着磁感应强度的不同,磁导率 μ 将是一个变量,即 $\mu = f(B)$ 。

(2) 对于某些具有方向性的冷轧硅钢片,顺着轧钢方向的磁导率 $\mu_{//}$ 和垂直于轧钢方向的磁导率 μ_{\perp} 是不同的。以二维磁场为例,若 x 方向为顺着轧钢的方向,就有

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{//} & \\ & \mu_{\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

此时介质为各向异性。若介质的磁性质为各向同性，磁导率 μ 为一标量；各向异性时， μ 则是一个张量，此时 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 在空间将不再是同一方向。

(3) 对于交变电磁场，铁心中将出现铁心损耗，使铁心的 $B \sim H$ 关系成为一个动态磁滞回线，此时 B 和 H 之间将不再是单值关系。

为简化分析，在恒定磁场的分析和计算中，通常以铁心的基本磁化曲线作为其 $B \sim H$ 曲线，即认为 B 、 H 之间为单值关系；且在解析计算时，近似认为铁心的磁导率 $\mu_{Fe} = \text{常值}$ 。

4. 恒定磁场的基本方程

恒定磁场的基本方程 把式(1-2)、式(1-6)和式(1-9)合在一起，可得

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \quad \text{或} \quad \mathbf{H} = \nu \mathbf{B} \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

式(1-11)就是恒定磁场的基本方程。

唯一性定理 一个向量场，若其旋度和散度在求解域内已经确定，边界上的边界条件也已恰当地给定，则该向量场即被唯一地确定，这就是唯一性定理。

从式(1-11)可知，若求解域内的电流密度 \mathbf{J} 已给定，则磁场强度 \mathbf{H} 的旋度就是确定的；另外磁感应强度 \mathbf{B} 的散度恒等于0；而 \mathbf{B} 与 \mathbf{H} 之间可以通过介质的本构关系联系起来，所以式(1-11)是一个关于恒定磁场的完整方程组，它将导致一个 \mathbf{B} (或 \mathbf{H})的偏微分方程；在适当的边界条件下，场向量 \mathbf{B} (或 \mathbf{H})就可以解出。

场向量 \mathbf{B} (或 \mathbf{H})所满足的微分方程 把式(1-11)第一式中的 \mathbf{H} 用 $\nu \mathbf{B}$ 代入，再对等式两端取旋度，可得

$$\text{rot rot } \nu \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{J}$$

考虑到在载流区外，电流密度 $\mathbf{J} = 0$ ；在载流区内，电密为均匀分布， $\mathbf{J} = \text{常值}$ ， $\text{rot } \mathbf{J} = 0$ ；于是上式就成为

$$\text{rot rot } \nu \mathbf{B} = 0$$

若磁介质为线性， $\mu = \text{常值}$ ，则上式将简化为

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = 0 \quad (1-12)$$

根据向量分析中的恒等式

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = \text{grad}(\text{div } \mathbf{B}) - \nabla \times \mathbf{B}$$

式中， $\nabla \times$ 为作用在向量 \mathbf{B} 上的向量拉普拉斯算符^①，再考虑到 $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ，最后可得。

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \quad \text{或} \quad \nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (1-13)$$

上式称为 \mathbf{B} (或 \mathbf{H})的向量拉普拉斯方程。在直角和圆柱坐标系中向量拉普拉斯方程的展开式，将在式(1-31)和式(1-36)中给出。

① 向量拉普拉斯算符的定义为： $\nabla \times \mathbf{B} = \text{grad div } \mathbf{B} - \text{rot rot } \mathbf{B}$

式(1-13)表明,对于恒定磁场,在“ $\mu = \text{常值}$ ”的条件下,磁感应强度 \mathbf{B} 和磁场强度 \mathbf{H} 分别满足向量拉普拉斯方程。从理论上说,在给定适当的边界条件后,求解式(1-13),即可得到 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 的解答。

以后可以知道,向量拉普拉斯方程是很难求解的,所以通常不是直接求解式(1-13)来得到 \mathbf{B} 或 \mathbf{H} ,而是引入适当的磁位函数,通过求解磁位函数所满足的较为简单的微分方程,再进一步求出场向量 \mathbf{B} 或 \mathbf{H} 。下面来引入恒定磁场中的磁位函数。

1.2 标量磁位和向量磁位

恒定磁场除了可以用场向量 \mathbf{B} 或 \mathbf{H} 来描述之外,还可以用磁位来描述。由于 \mathbf{B} 是可测的物理量,所以用场向量来描述时比较直观,求解 \mathbf{B} 或 \mathbf{H} 所满足的微分方程时,边界条件也较易给出,计算结果还可以与实测结果直接进行比较;这种描述方式的缺点是, \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 所满足的微分方程是向量方程,求解起来十分困难、费时。为了求解方便,可以引入磁位,磁位所满足的微分方程常常比场向量所满足的方程要简单,因此求解起来要方便一些;这种描述方式的缺点是,磁位大多不能由实测得到;另外,用磁位来表述时,微分方程的边界条件有时很难给出;最后,磁位求出后,还要经过一次梯度或者旋度运算,才能得到场量 \mathbf{B} 或 \mathbf{H} 。

上面提到,按照磁场强度的旋度 $\text{rot } \mathbf{H}$ 是否等于 0,恒定磁场分成无旋磁场和旋度磁场两类。从下面的分析可知,在无旋场中可以引入标量磁位,在旋度场中则需引入向量磁位。

1. 无旋磁场和标量磁位

标量磁位的引入 由向量分析可知,旋度为 0 的向量场总可以表示为某一标量的梯度场。在无旋磁场中,磁场强度 \mathbf{H} 的旋度为 0,所以 \mathbf{H} 可以表示为标量 Ω 的梯度,即

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \Omega \quad (1-14)$$

式中, Ω 称为标量磁位;由于磁场强度 \mathbf{H} 是从磁位高处指向磁位低处,而 $\text{grad } \Omega$ 则是从磁位低处指向磁位高处,两者方向相反,故式(1-14)的右端带一负号。

在直角坐标系中, $\text{grad } \Omega$ 的表达式为

$$\text{grad } \Omega = \mathbf{i} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \quad (1-15)$$

所以磁场强度 \mathbf{H} 的 x 、 y 和 z 分量 H_x 、 H_y 和 H_z 分别为

$$H_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, H_y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, H_z = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} \quad (1-16)$$

在圆柱坐标系中, $\text{grad } \Omega$ 的表达式为

$$\text{grad } \Omega = \mathbf{a}_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} + \mathbf{a}_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} \quad (1-17)$$

所以 \mathbf{H} 的 r 、 θ 和 z 分量 H_r 、 H_θ 和 H_z 分别为

$$H_r = -\frac{\partial \Omega}{\partial r}, \quad H_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}, \quad H_z = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} \quad (1-18)$$

引入标量磁位后, 原先求解向量场 \mathbf{B} 或 \mathbf{H} 的问题就转化为求解标量位 Ω 的问题, 使求解简化。待 Ω 解出后, 再用 $\mathbf{H} = -\text{grad } \Omega$, 即可得到磁场强度 \mathbf{H} 。

标量磁位的性质 标量磁位具有以下几个性质:

(1) 标量磁位仅在 $\mathbf{J} = 0$ 的非载流区内存在。

(2) 标量磁位 $\Omega = \text{常值}$ 的曲面(曲线)就称为标量等磁位面(线)。可以证明, 标量等磁位面(线)与磁力线互相正交(见图 1-3)。

(3) 若空间有一载流导体, 则任意两点 A 和 B 之间的标量磁位差可为多值。例如在图 1-4 中, 若从 A 点出发, 环绕电流 i 共 k 次后到达 B 点, 则 A 、 B 两点的磁位差 Ω_{AB} 应为

$$\Omega_{AB} = \int_A^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = ki + \int_{AmB} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = ki + \Omega_{AmB} \quad (1-19)$$

式中, Ω_{AmB} 为从 A 点经过 m 到达 B 点(即不环绕电流 i)时, A 、 B 两点间的磁位差。

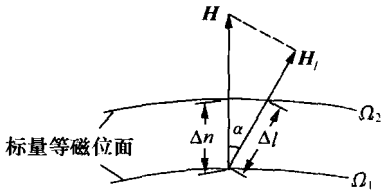


图 1-3 标量等磁位面(线)与磁力线互相正交

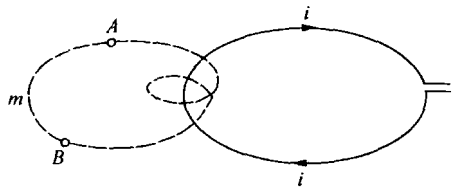


图 1-4 标量磁位的多值性

标量磁位 Ω 所满足的微分方程 若磁介质为各向同性, 把 $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{H} = -\text{grad } \Omega$ 代入 $\text{div } \mathbf{B} = 0$, 可得

$$\text{div}(\mu \text{grad } \Omega) = 0 \quad (1-20)$$

这就是标量磁位 Ω 所满足的微分方程。

对于均匀的线性介质, $\mu = \text{常值}$, 于是式(1-20)简化为

$$\text{div}(\text{grad } \Omega) = \nabla^2 \Omega = 0 \quad (1-21)$$

此时标量磁位 Ω 将满足拉普拉斯方程。在直角坐标系中, 拉普拉斯方程的表达式为

$$\nabla^2 \Omega = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} = 0 \quad (1-22)$$

在圆柱坐标系中, 拉普拉斯方程的表达式为

$$\nabla^2 \Omega = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} = 0 \quad (1-23)$$

式(1-22)和式(1-23)都是标量微分方程, 求解起来比较简单。

对于非线性磁介质, $\mu \neq$ 常值, 在直角坐标系中, 式(1-20)的展开式将成为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) = 0 \quad (1-24)$$

在圆柱坐标系中则有

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(\mu \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) = 0 \quad (1-25)$$

式(1-24)和式(1-25)称为准拉普拉斯方程。

2. 旋度磁场和向量磁位

向量磁位的引入 在载流区, 电流密度 $\mathbf{J} \neq 0$, 故 $\text{rot } \mathbf{H} \neq 0$, 磁场为旋度场, 因此不存在标量磁位。另一方面从向量分析可知, 一个散度为0的向量场总可以表示为另一向量的旋度场; 根据磁通连续性定律可知, 磁感应强度的散度 $\text{div } \mathbf{B} = 0$, 因此在恒定磁场(无论是旋度磁场还是无旋磁场)中总可以引入一个向量磁位 \mathbf{A} , 使

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (1-26)$$

根据唯一性定理, 为使 \mathbf{A} 唯一地被确定, 还应确定 \mathbf{A} 的散度。对于恒定磁场, 为简单计, 通常规定

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (1-27)$$

此规定称为库伦规范。由此即可导出 \mathbf{A} 所满足的微分方程。

A 所满足的微分方程 由于 $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$, $\mathbf{H} = \nu \mathbf{B}$, 而 $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, 由此可得

$$\text{rot}(\nu \text{rot } \mathbf{A}) = \mathbf{J} \quad (1-28)$$

若磁介质为线性, μ (和 ν) = 常值, ν 可以移到旋度算符 rot 的前面, 于是上式就简化为

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} \quad (1-29)$$

式(1-29)通常称为 \mathbf{A} 的旋度-旋度方程。考虑到

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$$

而 $\text{div } \mathbf{A}$ 已规定为0, 最后可得

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (1-30)$$

式中, ∇^2 为向量拉普拉斯算符。式(1-30)是一个向量微分方程, 称为向量泊松方程。式(1-30)表明, 当磁介质为线性时, 向量磁位 \mathbf{A} 满足向量泊松方程。

在直角坐标系中, $\nabla^2 \mathbf{A}$ 的表达式为

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{i} \nabla^2 A_x + \mathbf{j} \nabla^2 A_y + \mathbf{k} \nabla^2 A_z$$

即 $\nabla^2 \mathbf{A}$ 等于标量拉普拉斯算符 $\nabla^2 \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ 分别作用于 A_x 、 A_y 和 A_z 后所组成的向量。所以向量泊松方程式(1-30)可以分解成3个标量泊松方程, 即

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 A_x &= \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu J_x \\ \nabla^2 A_y &= \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = -\mu J_y \\ \nabla^2 A_z &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -\mu J_z \end{aligned} \right\} \quad (1-31)$$

式(1-31)说明,在旋度场中,向量磁位在直角坐标系中的3个分量 A_x 、 A_y 和 A_z 分别满足标量泊松方程。

由泊松方程解出向量磁位 \mathbf{A} 以后,再作旋度运算,即可得到磁感应强度 \mathbf{B} , $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$; 其中

$$\left. \begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \\ \mathbf{B} &= iB_x + jB_y + kB_z \end{aligned} \right\} \quad (1-32)$$

电机中的磁场问题,多数可以作为二维平行平面场来处理。对于二维平行平面场,若电流密度为 z 方向,即 $\mathbf{J} = kJ_z$, $J_x = J_y = 0$,则向量磁位也将是 z 方向,即 $\mathbf{A} = kA_z$,且 $\frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$, $A_x = A_y = 0$ 。此时只要求解一个 A_z 的标量二维泊松方程

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\mu J_z \quad (1-33)$$

即可,然后用

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (1-34)$$

即可求出 B_x 和 B_y 。

对于圆柱坐标系, $\nabla \times \mathbf{A}$ 分别由 r 、 θ 和 z 三个分量组成,即

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{a}_r (\nabla \times \mathbf{A})_r + \mathbf{a}_\theta (\nabla \times \mathbf{A})_\theta + \mathbf{a}_z (\nabla \times \mathbf{A})_z \quad (1-35)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{A})_r &= \nabla^2 A_r - \frac{1}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} = -\mu J_r \\ (\nabla \times \mathbf{A})_\theta &= \nabla^2 A_\theta - \frac{1}{r^2} A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} = -\mu J_\theta \\ (\nabla \times \mathbf{A})_z &= \nabla^2 A_z = -\mu J_z \end{aligned} \right\} \quad (1-36)$$

式中, ∇^2 为作用于 \mathbf{A} 的某一个分量 A_h ($h = r, \theta, z$)上的拉普拉斯算符,有

$$\nabla^2 A_h = \frac{\partial^2 A_h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_h}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_h}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_h}{\partial z^2} \quad (1-37)$$

从式(1-36)可见,在圆柱坐标中,向量泊松方程有两个特点:

(1) A_z 的方程是独立的, 与 A_r 、 A_θ 无关, A_z 满足标量泊松方程。

(2) A_r 和 A_θ 所满足的方程比标量泊松方程多出两项; 这两项使 A_r 和 A_θ 的两个方程成为联立方程, 即 A_r 的方程中除了 A_r 之外还含有 A_θ , A_θ 的方程中除了 A_θ 外还含有 A_r 。此特点使得圆柱坐标系中的向量泊松方程, 要比标量泊松方程的求解困难、复杂得多。

A_r 、 A_θ 和 A_z 解出后, 利用圆柱坐标中的旋度公式, 即可算出 B_r 、 B_θ 和 B_z , 其中

$$\left. \begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}, & B_\theta &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ B_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{a}_r B_r + \mathbf{a}_\theta B_\theta + \mathbf{a}_z B_z \end{aligned} \right\} \quad (1-38)$$

对于二维平行平面场, 若 $\mathbf{J} = \mathbf{a}_z J_z$, $J_r = J_\theta = 0$, 则 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_z A_z$, $\frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$, $A_r = A_\theta = 0$, 此时只要求解二维极坐标中 A_z 的标量泊松方程

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} = -\mu J_z \quad (1-39)$$

即可得到 A_z 。磁感应强度的 r 和 θ 分量则为

$$\left. \begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta}, & B_\theta &= -\frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{a}_r B_r + \mathbf{a}_\theta B_\theta \end{aligned} \right\} \quad (1-40)$$

在无旋磁场中, $\mathbf{J} = 0$, 从式(1-30)可知, \mathbf{A} 将满足向量拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (1-41)$$

磁通量与向量磁位的关系 根据向量分析中的斯托克斯定理, $\iint_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$, 于是用 \mathbf{A} 表示时, 通过面积 S 的磁通量 Φ 应为

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C A_x dx + A_y dy + A_z dz \quad (1-42)$$

式中, C 为曲面 S 的周界曲线, 如图 1-5 所示。式(1-42)说明, 通过 S 面的磁通量就等于向量磁位 \mathbf{A} 沿 S 面的周界曲线 C 的回路积分值。

对于二维平行平面场, 由于 $A_x = A_y = 0$, 所以通过单位轴向长度 ($\Delta z = 1$) 的矩形面积 1243 中的磁通量 $\Phi_{(\Delta z=1)}$ 应为

$$\Phi_{(\Delta z=1)} = \oint_C A_z dz = (A_{z2} - A_{z1}) \cdot 1 = \Delta A_z \quad (1-43)$$

上式说明, 通过 1、2 两点单位轴向长度的矩形面积内的磁通量 $\Phi_{(\Delta z=1)}$, 就数值而言, 应当等于该两点的向量磁位 A_{z2} 与 A_{z1} 之差, 如图 1-6 所示; 故在二维情况

下, 在 xy 平面内所画出的等 A_z 线, 就可以代表磁力线。这是二维平行平面场中向量磁位 A_z 所具有的一个特点, 用计算机绘制二维磁场分布图时, 经常用到这一特点。需要注意的是, 在等 A_z 线上, A_z 的方向是 z 方向; 另外, 对于三维问题, 等 A 线与磁力线之间就不再有这种直接的联系。

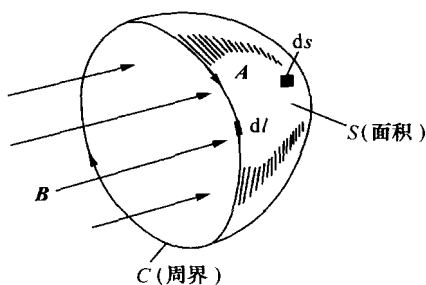


图 1-5 用向量磁位的线积分来计算
通过 S 面的磁通量

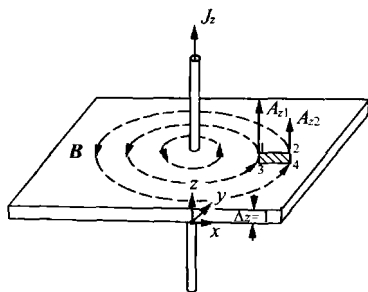


图 1-6 二维磁场中等 A 线
可以代表磁力线

1.3 恒定磁场的分界面条件

实际问题的求解域常常是有界的, 即具有一定的边界, 边界内、外常具有不同的磁导率。另外, 在所研究的区域内部, 常常也会遇到不同磁导率的两个子区域所形成的分界面。当磁场通过分界面或边界面时, 由于介质不同, 磁导率 μ 发生跃变, 相应地, 磁感应强度 B 和磁场强度 H 的法向和切向分量中, 某个分量也会发生跃变。由于在分界面处场量的分量出现跃变, 磁场的基本方程在跃变点失去意义, 因此需要把求解域分成两个或多个区域, 然后用分界面处场量的衔接条件, 把各个区域连接起来成为一个整体。通过分界面时, 场量 B 和 H (或磁位 Ω 和 A) 的连接条件, 就称为分界面条件。求解区域内部具有分界面的磁场问题时, 分界面条件是必不可少的。

1. B 和 H 的分界面条件

由于在分界面处, B 和 H 的某个分量可能发生跃变, 所以分界面条件需要用磁场基本方程的积分形式导出。

B 的分界面条件 设分界面一侧的磁导率为 μ_1 , 另一侧为 μ_2 。在分界面上取 P 点, 穿过分界面作一薄小圆柱, 圆柱的高为 h , 上、下面积为 ΔS , $h \rightarrow 0$, $\Delta S \rightarrow 0$, 如图 1-7 所示。由磁通连续性定律可知, 进入圆柱的磁通量应当等于穿出圆柱的磁通量; 设 B_{1n} 和 B_{2n} 分别为进入和穿出圆柱上、下表面处 B_1 和 B_2 的法向分量, 考虑到 $h \rightarrow 0$ 时圆柱侧面的面积趋近于 0, 于是有

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = (B_{1n} - B_{2n}) \Delta S = 0$$