21世纪高等院校教材

概率论与数理统计

北京交通大学概率统计课程组　编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

概率论与数理统计

北京交通大学概率统计课程组　编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书介绍了概率论与数理统计的概念、原理、计算方法，以及 MATLAB 在数理统计中的应用. 在编写中吸收了国内外优秀教材的优点，概念讲述通俗易懂，每章中附有精选的例题和习题，并且增加了数学实验. 书后附有习题参考答案，方便学生自测.

本书可作为高等院校理工专业、经济管理类专业的教材和研究生入学考试的参考书，也可供工程技术人员、科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/北京交通大学概率统计课程组编. —北京：科学出版社，2010

21 世纪高等院校教材

ISBN 978-7-03-028228-(

Ⅰ.①概… Ⅱ.①北… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 127963 号

责任编辑：张中兴 / 责任校对：刘小梅

责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 7 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2010 年 7 月第一次印刷 印张：17 1/2

印数：1—4 000 字数：350 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

概率论与数理统计是研究随机现象及其统计规律的一门核心数学学科.它正迅速地渗透到许多尖端科技的研究前沿,广泛应用于地球科学、神经学、人工智能、通信网络、资讯工程、医学、生物学、经济学、金融学、风险管理、心理学及社会学等众多领域,成为各个学科领域不可替代的基础分析工具,在许多交叉学科的研究中起着桥梁作用.

概率论与数理统计是高等院校各专业的重要数学基础.本书是由北京交通大学常年承担这门课程教学任务的教师编写的,并经过概率论与数理统计课程组的教师多次深入讨论、加工和教学实践而修改完成.书中内容力求反映出概率论与数理统计在工程实践领域中的应用,概念讲述通俗易懂,例题和习题精心挑选,并且增加了数学实验,更新了教材结构与表述方式.当前的概率论与数理统计教材很少介绍 MATLAB 软件,本书增加了 MATLAB 在数理统计中的应用,使学生能灵活应用软件技术,为以后进一步学习工程技术打下基础.

本书编写人员分工如下:第 1 章,王金亭;第 2 章,王秋媛;第 3 章,赵平;第 4 章,赵生变;第 5 章,王金亭;第 6 章,付俐;第 7 章,马艳萍;第 8 章,王立春;第 9 章,赵平.赵平对全书作了最后的统稿和加工.在编写过程中,江中豪、刘晓、王兵团提出了许多宝贵意见,向他们表示衷心的感谢.本书部分得到国家自然科学基金资助(批准号:60972089),在此一并表示感谢.

本书是我们在教学改革中的一种探索,欢迎广大读者提出宝贵意见和建议,以便于我们今后进一步完善.

编　者

2010 年 4 月

目　　录

第 1 章　概率与随机事件

1.1　随机现象和随机试验

自然界和人类社会中出现的现象一般分为两类：一类是必然现象或确定现象，如太阳每天都会从东方升起西方落下；自由落体必然垂直落下；同性电荷一定相互排斥；……这类现象称为**确定性现象**. 这一类现象的存在，使人们确信自然界和人类社会中的事物存在其自身的规律性. 另一类是**不确定现象**或**随机现象**，如掷一枚质地均匀的硬币时，它可能正面向上，也可能反面向上；学生考试前无法确定自己确切的考试成绩及排名；股票投资者无法预测未来一年的投资收益率；……随机现象的发生，更促使人们设法了解这一类现象发生的原因和发生可能性的大小，以便根据现象发生的情况作出合理的决策. 虽然随机现象的发生在表面上来看是随机和偶然的，但是通过对这类随机现象大量的观察和实验后，人们往往可以发现在随机和偶然的背后蕴藏着必然的内在规律性. 这种在大量重复实验或观察中所呈现的固有规律性，称为**统计规律性**，而概率论与数理统计正是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

在概率论中，对某一随机现象的研究，首先要进行相应的科学实验和对随机现象进行有目的的观察，通常称为试验. 如果某种试验满足以下条件：

(1) 试验可在相同条件下重复地进行；

(2) 每次试验的结果可能不止一个，并且能事先确定试验的所有可能的结果；

(3) 每次试验的结果事先不可预测，

则称这种试验为**随机试验**(random experiment). 随机试验通常用字母 E 表示，简称为**试验**. 本书以后提到的试验都是指随机试验. 下面列举一些随机试验的例子.

例 1　将一枚硬币掷一次，观察其出现正面向上 H 和反面向上 T 的情况.

例 2　将一枚硬币掷两次，观察其出现正面向上 H 和反面向上 T 的情况.

例 3　掷一颗骰子，观察出现的点数.

例 4　记录某交通路口一天内通过的机动车辆数.

例 5　在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命.

1.2　样本空间与事件

在考虑某个随机试验时，虽然不能事先准确预言其结果，但试验的一切可能结

果的集合是已知的，这就为研究随机现象提供了相应的研究空间.

定义 1.2.1 随机试验 E 的一切可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**(sample space)，记为 Ω 或者 S. 样本空间中的元素，即试验的每个结果，称为**样本点**或**基本事件**，一般用 ω 表示.

1.1 节例 1～例 5 的试验所对应的样本空间 $\Omega_k(1\leqslant k\leqslant 5)$ 分别为

$$\Omega_1 = \{H,T\},$$
$$\Omega_2 = \{HH,HT,TH,TT\},$$
$$\Omega_3 = \{1,2,3,4,5,6\},$$
$$\Omega_4 = \{0,1,2,3,\cdots\},$$
$$\Omega_5 = \{t:t\geqslant 0\}.$$

除了关注样本空间中的每一个样本点外，人们往往还关心试验的某一部分结果是否会出现，即关心满足某种条件的样本点组成的集合.

定义 1.2.2 样本空间 Ω 的某一子集称为一个**随机事件**(random event)，简称为**事件**，通常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$表示.

在 1.1 节的例 2 中，设事件 A 表示"一枚硬币掷两次，至少出现一次正面 H"，则事件 A 由三个基本事件组成，即 $A=\{HH,HT,TH\}$.

样本空间 Ω 有两个特殊的子集，一个是样本空间 Ω 本身，它包含所有样本点，每次试验它总要发生，故称为**必然事件**；另一个是空集$\varnothing$，它不包含任何样本点，并且每次试验都不发生，故称为**不可能事件**.

1.3 事件的关系和运算

由事件的定义可知，事件是样本空间的某个子集合. 因此，事件间的关系与事件的运算就可按照集合之间的关系和集合运算来解决. 以下用概率论的语言来描述这些事件之间的关系与运算.

1.3.1 事件的关系

如果在一次试验中，事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$. 如果 $A\subset B$，同时 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 等价，记为 $A=B$.

1.3.2 事件的运算

(1) 如果事件 C 表示"事件 A 与事件 B 同时发生"，则称事件 C 为事件 A 与事件 B 的**交事件**或**积事件**，记为 $C=A\cap B$ 或 $C=AB$. 显然，$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap\Omega=A$.

可将交事件推广到有限个或可列个事件的情形. 例如，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件

$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交事件，表示“n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生”；称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的交事件，表示“可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$同时发生”.

(2) 如果事件 C 表示“事件 A 与事件 B 至少有一个发生”，则称事件 C 为事件 A 与事件 B 的**并事件**或**和事件**，记为 $C=A\cup B$. 显然，$A\cup A=A$，$A\cup\Omega=\Omega$.

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并事件，表示“n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生”；称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的并事件，表示“可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$至少有一个发生”.

(3) 如果事件 C 表示“事件 A 发生而事件 B 不发生”，则称事件 C 为事件 A 与事件 B 的**差事件**，记为 $C=A-B$. 显然，$A-A=\varnothing$，$A-\Omega=\varnothing$，$A-\varnothing=A$.

(4) 如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，则称事件 A 与事件 B 为**互不相容事件**或**互斥**，记为 $A\cap B=\varnothing$ 或 $AB=\varnothing$. 如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为互不相容事件.

(5) 设事件 A 和事件 B，如果 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$，即一次试验中，事件 A 与事件 B 必有一个且仅有一个发生，则称事件 B 为事件 A(或事件 A 为事件 B)的**逆事件**，或称事件 A 与事件 B **互逆**，也称事件 B 为事件 A(或事件 A 为事件 B)的**对立事件**，事件 A 的对立事件(或逆事件)记为 $\overline{A}$. 于是若事件 A 与事件 B 互逆，则事件 A 与事件 B 互斥，反之不真.

事件之间的关系及运算也常用图形来直观地表示(图 1.1～图 1.6).

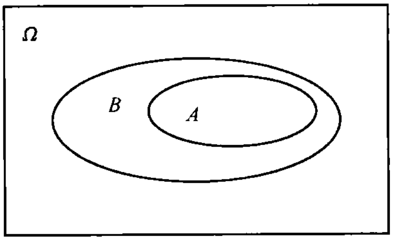

图 1.1 $A\subset B$

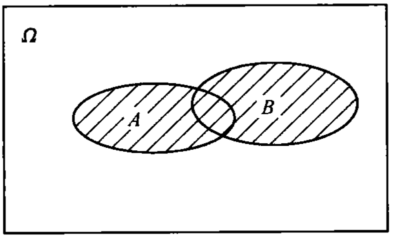

图 1.2 $A\cup B$

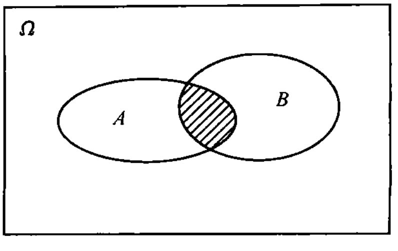

图 1.3 $A\cap B$

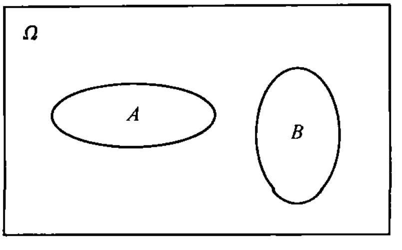

图 1.4 $A\cap B=\varnothing$

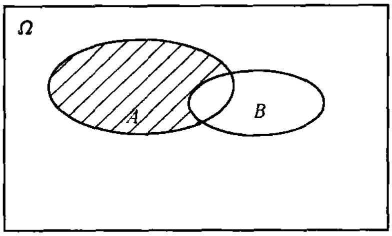

图 1.5　$A-B$

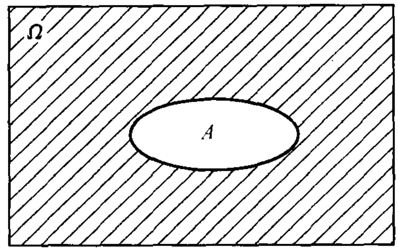

图 1.6　A 与 $\overline{A}$

1.3.3　事件运算的规律

交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

De Morgan 律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

De Morgan 律可推广到有限个事件和可列个事件的情形：

$$\overline{\bigcup_k A_k}=\bigcap_k\overline{A_k};\quad \overline{\bigcap_k A_k}=\bigcup_k\overline{A_k}.$$

例 1　设 A,B,C 是三个事件，试用事件 A,B,C 分别表示下列各事件：

(1) A,B,C 中恰有一个发生；

(2) A,B,C 中至少有一个发生；

(3) A,B,C 中至少有两个发生；

(4) A,B,C 中不多于一个发生.

解　(1) 因为 A,B,C 中恰有一个发生，就是 A 发生而 B,C 不发生，或 B 发生而 A,C 不发生，或 C 发生而 A,B 不发生，因此，可以用 $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$ 表示.

(2) 因为 A,B,C 中至少有一个发生就是 A,B,C 的并，因此，可以用 $A\cup B\cup C$ 表示.

(3) 因为 A,B,C 中至少有两个发生就是 AB,AC,BC 的并，因此，可以用 $AB\cup AC\cup BC$ 表示.

(4) 因为 A,B,C 中不多于一个发生，就是 A,B,C 中恰有一个发生，或 A,B,C 都不发生，因此，可以用 $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 表示. 由于

$$\begin{aligned}
&A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}\\
=&(A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C})\cup(\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C})\cup(\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C})\\
=&\overline{B}\overline{C}(A\cup\overline{A})\cup\overline{A}\overline{C}(B\cup\overline{B})\cup\overline{A}\overline{B}(C\cup\overline{C})\\
=&\overline{B}\overline{C}\Omega\cup\overline{A}\overline{C}\Omega\cup\overline{A}\overline{B}\Omega
\end{aligned}$$

$$=\overline{A}\overline{B}\cup\overline{A}\overline{C}\cup\overline{B}\overline{C},$$

所以也可以用 $\overline{A}\overline{B}\cup\overline{A}\overline{C}\cup\overline{B}\overline{C}$ 表示.

1.4 事件的概率

在 1.1 节的论述中，一个随机试验的所有可能的结果是已知的. 但是研究随机现象仅知道可能出现哪些随机事件是不够的，还要知道各种事件出现的可能性的大小. 把度量和刻画事件发生可能性大小的数量指标称为事件的概率. 概率最早的引入来源于频率的定义，频率具有一个重要的性质——频率的稳定性，即当对某事件 A 的试验次数很大时，此事件发生的频率稳定在某一固定值周围，这个固定值称为事件 A 的概率的统计定义.

定义 1.4.1 设 E 是一随机试验，A 是试验 E 的一个随机事件. 在相同条件下重复试验 n 次，观察事件 A 出现的次数为 n_A，则称比值 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的频率，n_A 为事件 A 发生的频数.

对于任意的随机试验 E，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 具有下列性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(\Omega)=1, f_n(\varnothing)=0$；

(3) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是任意两两互不相容的事件，则有

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_m),$$

其中 m 为任意正整数.

从表 1.1 可以看到，历史上一些试验者通过抛掷硬币来说明频率的稳定性.

表 1.1

试验者	n	n_H	$f_n(H)$
De Morgan	2048	1061	0.5181
Buffon	4040	2048	0.5069
K. Pearson	12000	6019	0.5010
K. Pearson	24000	12012	0.5005

注：n 为抛硬币的次数，n_H 为出现正面的次数，$f_n(H)$ 为出现正面的频率.

频率所呈现的稳定性反映了概率的客观性，由频率的性质及概率的统计定义，给出下面概率的公理化定义.

定义 1.4.2(概率定义) 设 Ω 为随机试验的样本空间，对 Ω 中任一事件 A，定义一个实单值集合函数 $P(A)$，如果集函数 $P(\cdot)$ 满足如下条件：

(1) 非负性：对一切事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) 正规性：$P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是任意两两互不相容的事件，则有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**(probability).

由概率的公理化定义可以推出概率的一些重要性质.

性质 1.4.1　$P(\varnothing)=0$，即不可能事件的概率为 0.

证　设 $A_n=\varnothing(n=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$ 且 $A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$. 由概率的可列可加性，

$$P(\varnothing) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\varnothing),$$

再由概率的非负性即可证明.

性质 1.4.2(有限可加性)　若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一组两两互不相容的事件，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

证　设 $A_k=\varnothing(k=n+1,n+2,\cdots)$，则由概率的可列可加性和性质 1.4.1 即可证明.

性质 1.4.3　设事件 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，$P(B)\geqslant P(A)$，并且对任意事件 A，都有 $P(A)\leqslant 1$.

证　由 $A\subset B$，则有 $B=A\cup(B-A)$ 且 A 与 $B-A$ 互不相容，所以由概率的有限可加性，

$$P(B) = P(A) + P(B-A),$$

这样即可证明第一个结论. 若令 $B=\Omega$，再由概率的正规性和非负性，

$$P(A) \leqslant P(A) + P(\Omega - A) = P(\Omega) = 1,$$

这样即可证明第二个结论.

性质 1.4.4　对于任一事件 A 有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

证　由于 $\overline{A}\cup A=\Omega$，$\overline{A}A=\varnothing$，故有

$$1 = P(\Omega) = P(\overline{A} \cup A) = P(\overline{A}) + P(A),$$

移项后即可证明.

性质 1.4.5　对于任意事件 A,B 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证　由于 $A\cup B=A\cup(B-AB)$ 且 $A(B-AB)=\varnothing$，所以由性质 1.4.2 和性质 1.4.3，

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

性质 1.4.5 可以推广到多个事件的情形：

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} P(A_j A_k) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n).$$

其证明可由归纳法加以证明.

性质 1.4.6(概率的次可加性) 对于任意的事件 $A_1, A_2, \cdots$ 有

$$P\Big(\bigcup_{n \geqslant 1} A_n\Big) \leqslant \sum_{n \geqslant 1} P(A_n).$$

证明留作练习.

1.5 等可能概型(古典概型)

在概率论发展过程的早期,古典概型占有相当重要的地位. 古典概型问题的计算主要依赖排列组合知识,虽然它的计算公式简单,但它具有很强的直观性,有助于理解和掌握概率论的许多基本概念. 这一类随机现象具有下列两个特征:

(1) 试验的所有可能结果只有有限个,即样本空间的元素为有限个;

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相等,即每个样本点出现的概率相等. 具有上述两个特征的随机试验称为**等可能概型**或**古典概型**.

1.5.1 古典概型的计算公式

设试验的样本空间为 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$,则由 $P(\Omega) = 1$ 及特征(2)知

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n) = \frac{1}{n},$$

若事件 A 是由 k 个基本事件组成,不妨设 $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_k}\} \subset \Omega$,则可得到古典概型的概率计算公式

$$P(A) = \frac{A\text{ 所含的基本事件个数}}{\Omega\text{ 所含的基本事件总数}} = \frac{k}{n}.$$

利用此公式计算古典概型中随机事件的概率时,首先要对所研究事件的内容进行分析,确定样本空间的构成及所含基本事件个数 n,并计算所研究事件包含的基本事件数 k,再由以上公式进行概率计算. 在这些计算中,经常要用到高中学过的一些排列组合公式,为了方便读者,本章附录里给出一些基本的组合分析公式.

1.5.2 古典概型例子

例 1 设袋中有 4 只白球和 2 只黑球,现从袋中取球两次,第一次取出一只球,观察它的颜色后放回袋中,第二次再取出一只球(这种取球方式叫做放回抽样),求:(1)两次都取得白球的概率;(2)恰好取得一次白球的概率.

解　(1) 设事件 A 表示两次都取得白球. 由于是有放回抽样，所以第一次和第二次都有 6 只球可供抽取. 由乘法原理，共有 6×6 种取法，即基本事件总数是 6^2. 又由于第一次有 4 只白球可供抽取，第二次也有 4 只白球可供抽取. 由乘法原理，两次都取得白球的取法共有 4×4，即 4^2 种，又即事件 A 含有 4^2 个基本事件. 于是所求的概率为

$$P(A)=\frac{4\times4}{6\times6}=\frac{4^2}{6^2}=\frac{4}{9}.$$

(2) 设事件 B 表示两次取球恰好取得一次白球，事件 B_1 表示第一次取得白球且第二次取得黑球，事件 B_2 表示第一次取得黑球且第二次取得白球，则 B_1,B_2 的概率分别为

$$P(B_1)=\frac{4\times2}{6\times6},\quad P(B_2)=\frac{2\times4}{6\times6}.$$

又因为 $B=B_1\cup B_2, B_1\cap B_2=\varnothing$，所以有

$$P(B)=P(B_1)+P(B_2)=2\times\frac{2\times4}{6\times6}=\frac{4}{9}.$$

例 2　设袋中有 a 只白球和 b 只黑球，从中有放回地抽取 n 只球，求恰好取出 $k(k\leqslant a)$ 只白球的概率.

解　设事件 B 表示抽取 n 只球中恰好取出 k 只白球. 事件 B 可以理解为有 n 个位置排成一排，在其中任意选取 k 个位置，有 C_n^k 种选法. 放白球的位置确定后，k 个位置上的每个白球都是来自 a 只白球中的任意一个，而 $n-k$ 个位置上的每个黑球都是来自 b 只黑球中的任意一个，所以事件 B 所含的基本事件数为 $C_n^ka^kb^{n-k}$，于是事件 B 的概率为

$$P(B)=\frac{C_n^ka^kb^{n-k}}{(a+b)^n}=C_n^k\left(\frac{a}{a+b}\right)^k\left(1-\frac{a}{a+b}\right)^{n-k}.$$

例 3　设袋中有 4 只白球和 2 只黑球，现从袋中任取 2 只球，第一次取出一只球不放回袋中，第二次再取出一只球(这种取球方式叫做不放回抽样)，求取得 2 只白球的概率.

解　设事件 A 表示取得 2 只白球. 由于是不放回抽样，第一次有 6 只球可供抽取，第二次只有 5 只球可供抽取. 由乘法原理，共有 6×5 种取法，即基本事件总数是 6×5. 又由于第一次有 4 只白球可供抽取，第二次有 3 只白球可供抽取. 由乘法原理，取得 2 只白球的取法共有 4×3 种，即事件 A 含有 4×3 个基本事件. 于是所求的概率为

$$P(A)=\frac{4\times3}{6\times5}=\frac{2}{5}.$$

本题的另一种解法如下：对同色球不加区别，从 6 只球中选取 2 只共有 C_6^2 种组合法，即基本事件总数是 C_6^2. 从 4 只白球中选取 2 只，共有 C_4^2 种组合法，即事件

A 所包含的基本事件个数是 C_4^2. 于是所求的概率为

$$P(A)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{4\times 3/2!}{6\times 5/2!}=\frac{2}{5}.$$

例 4 设袋中有 a 只白球和 b 只黑球,采用不放回抽样的方式从中取出 n 只球,求恰好取出 k 只白球的概率.

解 考虑取出 n 只球中含有的白球个数而与抽球的顺序无关,即采用无重复的组合方法求解. 设事件 B 表示抽取 n 只球中恰好取出 k 只白球. 从 $a+b$ 只球中抽出 n 只球的组合种数为 C_{a+b}^n. 而抽出的 n 只球中恰有 k 只白球,就是从 a 只白球摸出 k 只白球,从 b 只黑球中摸出 $n-k$ 只,其组合种数为 $C_a^kC_b^{n-k}$,从而所求的概率为

$$P(B)=\frac{C_a^kC_b^{n-k}}{C_{a+b}^n},\quad \max\{n-b,0\}\leqslant k\leqslant \min\{n,a\}.$$

这称为超几何分布.

例 5 设 20 件产品中有两件废品,现从中抽取 10 件产品,求其中恰有一件废品的概率.

解 设事件 A 表示从 20 件产品中抽取 10 件产品,其中恰有一件废品. 从 20 件产品中抽取 10 件产品,共有 C_{20}^{10}种取法,即基本事件总数是 C_{20}^{10}. 又因为在两件废品中取一件有 C_2^1 种取法,在 18 件合格品中取 9 件有 C_{18}^9种取法,根据乘法原理可知,在 20 件产品中抽取 10 件产品,其中恰有一件废品的取法有 $C_2^1C_{18}^9$种,即事件 A 中所包含的基本事件个数是 $C_2^1C_{18}^9$,于是所求的概率为

$$P(A)=\frac{C_2^1C_{18}^9}{C_{20}^{10}}=0.526.$$

例 6 将 n 个球任意地放入 $N(N\geqslant n)$个盒子中,试求:

(1) 每个盒子至多有一个球(记为事件 A)的概率;

(2) 某指定 n 个盒子中各有一个球(记为事件 B)的概率;

(3) 某指定盒子中恰有 $m(m\leqslant n)$个球(记为事件 C)的概率.

解 将每个球放到每个盒子中都是等可能的,即每个球都有 N 种不同的放法,n 个球就有 N^n 种不同的放法,每一种放法看成一个基本事件,因而试验的基本事件总数为 N^n 个.

(1) 事件 A 所对应的不同放法为 $N(N-1)\cdots[N-(n-1)]$,因而所求概率为

$$P(A)=\frac{N(N-1)\cdots[N-(n-1)]}{N^n}=\frac{P_N^n}{N^n}.$$

(2) 事件 B 所对应的是首先将盒子固定,再将 n 个球放在这 n 固定的盒子里作全排列,则事件 B 所包含的基本事件数为 $n!$,因而所求概率为

$$P(B)=\frac{n!}{N^n}.$$

(3) 事件 C 所对应的是首先从 n 个球中任意选出 m 个球,共有 C_n^m 种选法,其

余的 $n-m$ 个球可以任意放入其余的 $N-1$ 个盒子中，共有 $(N-1)^{n-m}$ 种不同放法，因而所求概率为

$$P(C)=\frac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}.$$

例 6 在古典概型中被称为分球入盒问题，此模型可应用到许多问题上. 例如，住房问题：人相当于球，房间相当于盒子，n 个人被分配到 N 个房间去. 又如，乘客下车问题：某单位的班车载有 n 名乘客，它在 N 个站点停车，乘客下车的各种情况，可以看成 n 个球被分配到 N 个盒子的各种情况.

利用古典概型的计算公式计算事件发生的概率时，一定要注意必须在同一个样本空间上讨论；否则，就会出错.

例 7 5 张数字卡片上分别写着 1,2,3,4,5，从中任取三张，排成三位数. 求下列事件的概率：

(1) 三位数大于 300；(2) 三位数是偶数；(3) 三位数是 5 的倍数.

解 容易看出这是古典概型. 设所求三个事件分别为 A,B,C.

方法一 考虑数有序的情况，用排列计算基本事件个数 n 和有利事件个数 m. 三位数的总个数是 $n=P_5^3=60$.

(1) 三位数大于 300：百位数必须从 3,4,5 中取，取法为 $C_3^1=3$；十位数和个位数的取法是：只能在其余的 4 个数中取出两个的排列，取法有 $P_4^2=12$ 种. 故 $m_A=C_3^1P_4^2=36$，于是 $P_A=\frac{m_A}{n}=\frac{C_3^1P_4^2}{P_5^3}=\frac{36}{60}=0.6$.

(2) 三位数是偶数：个位数只能从 2,4 中取，取法为 $C_2^1=2$. 在个位数取定之后，十位数和百位数只能从其余的 4 个数中取出两个排列，取法有 $P_4^2=12$ 种. 故 $m_B=C_2^1P_4^2=24$，于是 $P_B=\frac{m_B}{n}=\frac{C_2^1P_4^2}{P_5^3}=\frac{24}{60}=0.4$.

(3) 三位数是 5 的倍数：个位数只能是 5. 在个位数取定之后，十位数和百位数从其余的 4 个数中取出两个排列，取法有 $P_4^2=12$ 种. 故 $m_C=P_4^2=12$，于是 $P_C=\frac{m_C}{n}=\frac{P_4^2}{P_5^3}=\frac{12}{60}=0.2$.

方法二 不考虑整个三位数，只考虑三位数的特点，此时无顺序问题. 用组合公式计算基本事件个数 n 和有利事件个数 m.

(1) 三位数大于 300：只要考虑百位数，取法为 $n=C_5^1=5$；数大于 300，百位数只能从 3,4,5 中取，取法有 $m_A=C_3^1=3$ 种. 于是 $P_A=\frac{m_A}{n}=\frac{C_3^1}{C_5^1}=\frac{3}{5}=0.6$.

(2) 三位数是偶数：只要考虑个位数即可. 个位数只能从 2,4 中取，取法有 $C_2^1=2$ 种，即 $m_B=C_2^1P_4^2=24$. 又总取法为 $C_5^1=5$，于是 $P_B=\frac{m_B}{n}=\frac{2}{5}=0.4$.