



北京大学数学教学系列丛书

研究生
数学基础课教材

有限 p 群

徐明曜 曲海鹏 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

北京大学数学教学系列丛书

有 限 p 群

徐明曜 曲海鹏 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

有限 p 群/徐明曜, 曲海鹏著. —北京: 北京大学出版社, 2010. 9

(北京大学数学教学系列丛书)

ISBN 978-7-301-17713-6

I. ①有… II. ①徐… ②曲… III. ①有限群-高等学校-教材

IV. O152.1

· 中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 169149 号

书 名: 有限 p 群

著名责任者: 徐明曜 曲海鹏 著

责任编辑: 刘 勇

标准书号: ISBN 978-7-301-17713-6/O·0826

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn> 电子邮箱: zpup@pup.pku.edu.cn

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62752021

出版部 62754962

印 刷 者: 北京飞达印刷有限责任公司

经 销 者: 新华书店

890 毫米×1240 毫米 A5 14.25 印张 400 千字

2010 年 9 月第 1 版 2010 年 9 月第 1 次印刷

定 价: 30.00 元

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容.

版权所有, 侵权必究

举报电话: 010-62752024 电子邮箱: fd@pup.pku.edu.cn

内 容 简 介

有限 p 群是有限群最基本和最重要的分支之一. 从群论诞生起, 特别是从 Sylow 1872 年发表的著名定理(Sylow 定理)起, p 群就受到所有群论学者的关注, 并且取得了很重要的研究成果. 我国对于 p 群的研究开始于 20 世纪 30 年代华罗庚和段学复先生组织的 p 群讨论班, 他们对于 p 群的算术结构作了系统的研究, 得到了若干重要的成果.

作者徐明曜多年来从事有限 p 群的研究, 并多次在北京大学、山西师范大学为研究生开设有限 p 群课程; 作者曲海鹏近年来也做了大量 p 群的研究和教学工作. 本书就是在二位作者编写的讲义基础上经过补充、整理而成的, 是一部研究生教材. 全书共分 12 章. 内容包括: 群论基本概念复习, p 群的初等事实, 某些重要的换位子公式, p 交换 p 群, 正则 p 群, 亚循环 p 群, 子群结构、交换子群、正规子群, 极大类 p 群, p 群的幂结构, 有限 p 群的一般分类问题, 有限幂导 p 群, 研究专题等.

本书内容自包含, 讲述详细, 逻辑严谨. 第 4—11 章每章一个主题, 注重阐明 p 群研究成果的主轴及相关联的背景知识. 每章按节给出适量习题及应研究的问题, 书末给出了习题和问题的提示及解答. 第 12 章讲述研究专题, 是作者为读者准备的若干可以进一步研究的题目, 作者认为这些研究专题是有意义、初学者容易上手、又有发展前途的研究问题, 可作为硕士或博士研究生论文选题的参考; 同时书末提供的较详细的参考文献也为研究生开展研究提供了方便.

本书可作为综合大学、高等师范院校数学专业研究生有限群课程的教材或参考书, 也可作为群论学者选择论文题目指导研究生的教学参考书.

作者简介

徐明曜 1965年毕业于北京大学数学力学系数学专业, 1980年在北京大学数学系研究生毕业, 获硕士学位, 并留校任教. 1985年晋升为副教授, 1988年破格晋升为教授, 博士生导师.

徐明曜长期从事本科生及研究生代数课程的教学以及有限群论的研究工作, 讲授过多门本科生和研究生课程, 著有《有限群导引》(下册与他人合作); 科研方面自20世纪60年代起进行有限 p 群的研究工作, 80年代中期又开创了我国“群与图”的研究领域, 培养了13位博士. 现在, 他的学生已有5人晋升为博士生导师, 又带自己的博士生, 使得这个研究领域后继有人. 2004年退休后因看到国际上 p 群的研究又趋活跃, 遂带领山西师范大学的同志研究有限 p 群, 已培养出不业务骨干, 做出了不小的成绩. 徐明曜至今已发表论文80多篇, 多数发表在国外的杂志上, 曾获得国家教委优秀科技成果奖(1985), 国家教委科技进步二等奖(1995), 周培源基金会数理基金成果奖(1995).

曲海鹏 1996年在北京大学数学科学学院获学士学位, 随即保送在该学院硕博连读, 2001年获博士学位. 2001至2003年在中国科学院数学与系统科学研究院做两年博士后研究. 现为山西师范大学数学与计算机学院副教授, 该校应用数学研究所副所长. 目前主要研究有限 p 群, 已发表论文10多篇.

《北京大学数学教学系列丛书》编委会

名 誉 主 编：姜伯驹

主 编：张继平

副 主 编：李 忠

编 委：（按姓氏笔画为序）

王长平 刘张炬 陈大岳 何书元

张平文 郑志明 柳 彬

编委会秘书：方新贵

责 任 编 辑：刘 勇

序 言

自 1995 年以来,在姜伯驹院士的主持下,北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际,创造性地贯彻教育部“加强基础,淡化专业,因材施教,分流培养”的办学方针,全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势,在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新,以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革,取得了显著的成效. 2001 年,北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖,在国内外产生很大反响.

在本科教育改革方面,我们按照加强基础、淡化专业的要求,对教学各主要环节进行了调整,使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上,接受学时充分、强度足够的严格训练;在对学生分流培养阶段,我们在课程内容上坚决贯彻“少而精”的原则,大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容,为新的培养方向、实践性教学环节,以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间. 这样既使学生打下宽广、坚实的基础,又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向. 与上述改革相适应,积极而慎重地进行教学计划的修订,适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时,并增加了数学模型和计算机的相关课程,使学生有更大的选课余地.

在研究生教育中,在注重专题课程的同时,我们制定了 30 多门研究生普选基础课程(其中数学系 18 门),重点拓宽学生

的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解.

教材建设是教学成果的一个重要体现. 与修订的教学计划相配合, 我们进行了有组织的教材建设. 计划自 1999 年起用 8 年的时间修订、编写和出版 40 余种教材. 这就是将陆续呈现在大家面前的《北京大学数学教学系列丛书》. 这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考, 记录了我们教学实践的足迹, 体现了我们教学改革的成果, 反映了我们对新世纪人才培养的理念, 代表了我们新时期的数学教学水平.

经过 20 世纪的空前发展, 数学的基本理论更加深入和完善, 而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛, 而且活跃于生产第一线, 促进着技术和经济的发展, 所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识. 同时也促使数学研究的方式发生巨大变化. 作为整个科学技术基础的数学, 正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透. 作为一种文化, 数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素, 将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识. 数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础. 数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革. 我们现在的改革还是初步的. 教学改革无禁区, 但要十分稳重和积极; 人才培养无止境, 既要遵循基本规律, 更要不断创新. 我们现在推出这套丛书, 目的是向大家学习. 让我们大家携起手来, 为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力.

张继平

2002 年 5 月 18 日

于北京大学蓝旗营

前 言

有限 p 群是有限群最基本和最重要的分支之一. 从群论诞生起, 特别是从 Sylow [540] (1872) 发表的著名定理 (Sylow 定理) 起, p 群就受到所有群论学者的关注, 并且取得了很重要的研究成果. 但是, 几乎在整个 20 世纪, 有限群论的主攻问题是有限单群的分类, p 群的发展比较缓慢. 这种情况在新世纪到来前后发生了变化. 正如有限单群理论的权威学者、世界级领军人物之一 —— Z. Janko —— 在他尚未出版的 p 群专著的序言中所说: “M. Aschbacher 和 S. Smith 在 2003 年完成的关于 ‘拟薄’ 型有限单群的分类才最终完成了有限单群的分类问题 (尽管耽搁了 22 年). 因为有限可解群的理论已经发展到令人满意的程度, 现在剩下的就是有限 p 群的研究及分类.” 这段话可部分解释近年来 p 群研究异常活跃的原因. 本书的编写, 就是希望能对有志于 p 群研究的青年学子起个引路的作用.

我国对于 p 群的研究开始于华罗庚和段学复 20 世纪 30 年代组织的 p 群讨论班, 他们对于 p 群的算术结构作了系统的研究, 得到了若干重要的成果. 但因为中国的抗日战争, 在大约十年后才发表了他们的研究论文 (见本书末参考文献). 他们在当时提出的猜想至今尚在研究中, 见本书中的猜想 12.1.2. 新中国成立后, 本书第一作者从 20 世纪 60 年代起对于正则 p 群作了较为系统的研究, 广西大学的余曙霞、班桂宁、李世荣教授从 20 世纪 80 年代起对 p 群的自同构等问题做了不少工作. 另外, 首都师范大学王汝楫、四川大学任永才也做了一些工作. 近年来, 我国若干中青年学者, 如张继平、张勤海、郭秀云、黎先华、马玉杰、陈贵云、刘合国、杜少飞等也对 p 群得到一些有价值的成果. 这说明我国学者对 p 群研究还是有一定基础的. 当然, 我们的工作离目前的国际先进水平相比还有很大的差距. 为了尽快赶上国际先进水平, 加快这个方向的研究生培养, 编写一本合适的教材就是一个刻

不容缓的任务. 作者编写本书就是为解决这个问题所作的一次尝试.

在编写本书之前, 本书第一作者曾多次讲授有限 p 群的课程或组织 p 群讨论班. 从 2001 年起, 作者就曾在北京大学、山西师范大学、美国 Temple 大学、韩国浦项大学开设过五次 p 群的课程, 并编写了英文讲义 Regular p -groups and their generalizations. 本书部分内容就取自这本讲义. 但本书和该讲义又有很大的不同. 首先, 该讲义是专著, 而本书是教材. 又, 该讲义侧重介绍作者个人的工作, 而本书以讲述 p 群基本知识为主.

本书是为学过初等群论的读者编写的, 第 1 章复习了群论的最基本知识, 而且只限于学习 p 群要用的部分. 第 2 章则介绍 p 群的最基本的知识, 这是很重要的一章, 是以后各章的基础. 在这一章中, 首先介绍 p 群的一些基本经典结果, 其中对换位子运算公式, 特别是亚交换群中的换位子公式作了较多的介绍. 然后围绕推导 p^4 阶群的同构分类, 介绍了内交换群、亚循环群、极大类 p 群的初步知识, 这使得 p^4 阶群的分类变得更加容易理解. 最后对 p 群的计数问题、幂结构、Lie 方法作了初步介绍, 还对对称群和全线性群的 Sylow p 子群的结构和性质作了介绍. 本章中的习题也是精心挑选的, 其中包括了一些后面各章中要用的结果, 但限于篇幅又没写在正文当中.

由于换位子运算的技巧在 p 群研究中的重要性, 第 3 章讲述几个著名的换位子公式. 我们分四节介绍了 Hall 集积公式、Zassenhaus 公式、2-Engel 群的分类以及亚交换群的 Gupta-Newman 公式等. 前三节介绍的公式的重要性不言而喻, 最后一个公式虽是第一次在教科书中出现, 但它在研究亚交换群时非常重要, 在第 5 章研究亚交换正则 p 群幂零类的估值时起了关键作用.

从第 4 章起, 每章有一个主题. 第 4 章讲述 p 交换群, 其中还对最终解决局限 Burnside 问题并因此获得 Fields 奖的 Zelmanov 的工作作了介绍. 第 5 章讲述 P. Hall 的正则 p 群理论. 迄今为止, 正则 p 群仍是 p 群中最重要的群类之一. 我们重点讲述正则 p 群的充分条件、必要条件以及充分必要条件, 正则 p 群的幂结构性质, 唯一性基底及

其应用等. 第 6 章讲述亚循环 p 群. 我们首先给 Blackburn 内亚循环 p 群分类一个新证明, 然后介绍了亚循环 p 群的三种分类, 最后应用它们给出二元生成平衡 p 群的分类. 第 7 章介绍 p 群子群结构的若干问题, 特别是具有“很多”交换子群或正规子群的 p 群的一些性质, 也给出了 Blackburn 关于正规秩为 2 的 p 群的分类. 第 8 章讲述 Blackburn 极大类 p 群的理论, 介绍了二步中心化子及一致元素在研究极大类群的重要作用, 最后以具有交换极大子群的极大类 p 群的分类和极大类 3 群的分类来结束本章. 第 9 章介绍 p 群的幂结构问题, 特别是介绍了广义正则 p 群的理论, 也介绍了 Laffey 和 A. Mann 关于幂结构的工作. 第 10 章则介绍 p 群的一般分类问题, 其中介绍了 P. Hall 的同倾族分类的思想, 也重点介绍了 p 群生成算法, 它是目前 p 群分类所使用的主要方法, 还简单介绍了 MAGMA 和 GAP 等两个计算群论的软件包. 在第 11 章中讲述 A. Mann 的幂导 p 群的基本知识, 特别讲述了幂导 p 群的幂结构性性质. 而最后一章, 即第 12 章, 则准备了若干可以进一步研究的题目, 可作为硕士和博士研究生论文选题的参考. 如果作为教材, 前五章建议都讲, 因为它们是更加基本的内容. 如时间充裕, 还可依教师的兴趣再讲几章, 其余的可供学生阅读. 最后一章是作者花费时间最多的, 旨在选择一些有意义的、初学者容易上手的、又有发展前途的研究问题.

依据作者的观点, 除掉 p 群的一般分类问题和 p 群的自同构群 (即群在 p 群上的作用) 以外, p 群的研究大体可分为三个方面, 即 p 群的算术结构、正规结构和幂结构. 而 p 群理论中最深刻的问题在于 p 群正规结构和幂结构之间的联系. 局限 Burnside 问题就是明证, 而本书正是侧重在这个方面. 但对初学者来说, 容易入手的是 p 群的子群结构, 主要围绕正规结构的若干问题, 即与正规性和交换性有关的问题. 因此, 考虑到培养研究生的实际需要, 本书最后一章则主要选取正规结构方面的问题.

限于篇幅和作者的知识与兴趣, 本书主要讲述 p 群理论中的初等部分. 之所以这样做的原因还有, 作者认为直到目前为止, 初等方法仍

是 p 群研究的主要方法. 而有过群论研究经验的人都知道, 初等方法其实是最难掌握的. 在培养研究生时, 首要任务是训练其对基本知识和初等方法的掌握. 正因为如此, p 群的表示、 p 群的上同调、群族理论和 Lie 方法等在本书中很少提及, 但这并不意味着这些内容不重要. 对于本书的这个缺陷, 读者可从 Huppert 的 *Endliche Gruppen I* 中的第 III 章以及 Huppert 和 Blackburn 的 *Finite Groups II* 中的第 VIII 章中得到一定的弥补. 又, Hanna Neumann 著名的 *Varieties of groups* 是群族理论的经典著作, 有兴趣的读者也可以参考.

本书在 p 群知识上力图做到自包含, 但叙述简洁, 常给读者留有思考的余地. 作者认为这对培养学生的科研能力是有好处的. 本书中也配备了大量习题, 它们是本书的重要组成部分, 请使用本书的教师和学生务必加以特别的注意. 本书针对所研究的问题, 提供了必要的参考文献. 由于文献浩如烟海, 只收录了正文中引用的文献, 但已有 650 条之多. 对于 1940 年以后的文献, 如果 Math. Reviews 已有评论, 我们都列出了它在 MathSciNet 中的编号, 以方便读者查阅该文的摘要.

在我们引用前述结果和习题时, 我们都按章节统一编号. 例如, 命题 1.1.3 指的是第 1 章第 1 节 (常记成 §1.1) 的第 3 个命题, 而习题 2.6.1 指的是第 2 章第 6 节 (§2.6) 的第 1 个习题.

本书大部分工作是在山西师范大学工作期间完成的. 作者感谢张勤海教授、安立坚、王丽芳、宋蔷薇博士, 以及山西师范大学 p 群讨论班的同学们十分认真地对本书提出的修改意见. 特别是安立坚博士, 他写了第 8 章最后两节的初稿. 作者也感谢广西大学李世荣、俞曙霞、班桂宁教授的支持, 特别是感谢班桂宁教授非常仔细地阅读了本书的初稿, 提出大量宝贵的修改意见. 作者感谢国家自然科学基金 (编号: 10671114) 的资助, 感谢北京大学方新贵教授和教务部的同仁对本书的关心和资助, 也感谢美国 Temple 大学的 S. Lipschutz 教授和韩国浦项大学的 Jin Ho Kwak (郭振镐) 教授在本书第一作者访问该校并给研究生讲述本书部分内容时所给予的关心和帮助以及两校在作者访问时给予的经济资助, 本书部分内容是在访问这两个学校时写的. 作者还

要特别感谢山西师范大学对出版此书所给予的慷慨赞助, 以及该校数学与计算机科学学院所给予的大力支持. 最后, 感谢北京大学出版社的同仁, 特别是责任编辑刘勇同志的辛勤工作.

徐明曜 曲海鹏

email: xumy@math.pku.edu.cn

quhaipeng@yahoo.cn

2009 年 12 月 21 日于山西师范大学

目 录

第 1 章 群论基本概念的复习	1
§1.1 子群和同态	1
习题	6
§1.2 自同构	7
习题	10
§1.3 群例	10
1.3.1 循环群	10
1.3.2 二面体群和四元数群	12
1.3.3 置换群	14
1.3.4 线性变换组成的群	15
习题	15
§1.4 群作用、Sylow 定理、有限 p 群的简单性质	16
习题	20
§1.5 Jordan-Hölder 定理和直积分解定理	20
习题	25
§1.6 交换群, 换位子	25
1.6.1 有限交换群的构造	25
1.6.2 换位子和可解群	28
习题	29
§1.7 幂零群	29
习题	38
§1.8 群扩张, 圈积	40
习题	48
§1.9 自由群和群的表现	48
习题	51

第 2 章 p 群的初等事实	52
§2.1 换位子公式	52
习题	58
§2.2 p 群的初等结果	58
习题	67
§2.3 内交换和极小非交换 p 群	68
习题	71
§2.4 亚循环 p 群	72
习题	74
§2.5 极大类 p 群的概念	74
习题	79
§2.6 中心积, p^4 阶群的分类	80
习题	83
§2.7 p 群计数定理	84
习题	88
§2.8 p 群的幂结构	88
习题	90
§2.9 两个重要的例子	90
2.9.1 S_{p^n} 的 Sylow p 子群 $S(p^n)$	91
2.9.2 $GL(n, q)$ 的 Sylow p 子群 $T(p^n)$	91
习题	92
§2.10 与 p 群相关联的 Lie 环和 Lie 代数	92
习题	95
第 3 章 某些重要的换位子公式	96
§3.1 Hall-Petrescu 恒等式	96
习题	99
§3.2 Zassenhaus 恒等式	100
§3.3 Engel 条件	102
§3.4 Gupta-Newman 公式	104

第 4 章 p 交换 p 群	107
§4.1 p 交换 p 群	107
习题	109
§4.2 亚交换 p 交换 p 群	109
习题	113
§4.3 关于 Burnside 问题的注记	113
§4.4 p 换位子	117
习题	120
第 5 章 正则 p 群	121
§5.1 p^s 正则 p 群	121
习题	124
§5.2 某些正则性准则	125
习题	133
§5.3 正则 p 群的直积	134
§5.4 正则 p 群的幂结构	137
习题	145
§5.5 唯一性基底	146
§5.6 幂零类	155
习题	161
第 6 章 亚循环 p 群	162
§6.1 内亚循环 p 群的分类	162
习题	165
§6.2 亚循环 p 群的分类	165
习题	180
§6.3 二元生成平衡 p 群	181
第 7 章 子群结构, 交换子群, 正规子群	189
§7.1 特殊和超特殊 p 群	189
习题	192
§7.2 Dedekind p 群	192

习题	193
§7.3 具有很多正规子群的 p 群	193
§7.4 子群格	196
7.4.1 偏序集和格的概念	196
7.4.2 分配格和模格	199
7.4.3 模 p 群	201
习题	204
§7.5 所有非交换子群皆亚循环的 p 群	204
§7.6 交换子群和交换正规子群	206
习题	210
§7.7 正规秩为 2 的有限 p 群	210
习题	213
第 8 章 极大类 p 群	214
§8.1 极大类 p 群的进一步性质	214
习题	218
§8.2 极大类 p 群的交换度、一致元素	219
§8.3 具有交换极大子群的极大类 p 群	225
习题	231
§8.4 极大类 3 群	231
第 9 章 p 群的幂结构	235
§9.1 拟正则 p 群及广义正则 p 群	235
习题	241
§9.2 二元生成广义正则 2 群	241
习题	246
§9.3 具有“好的幂结构”的有限 p 群	246
习题	251
§9.4 p 中心 p 群	251
§9.5 一般有限 p 群的幂结构	259
习题	264