发现数学丛书

[爱尔兰] 戴维·弗兰纳里 著
郑炼 译

2的平方根

关于一个数与一个数列的对话

THE SQUARE ROOT OF 2

A DIALOGUE CONCERNING A NUMBER AND A SEQUENCE

$\sqrt{2}$

上海科技教育出版社

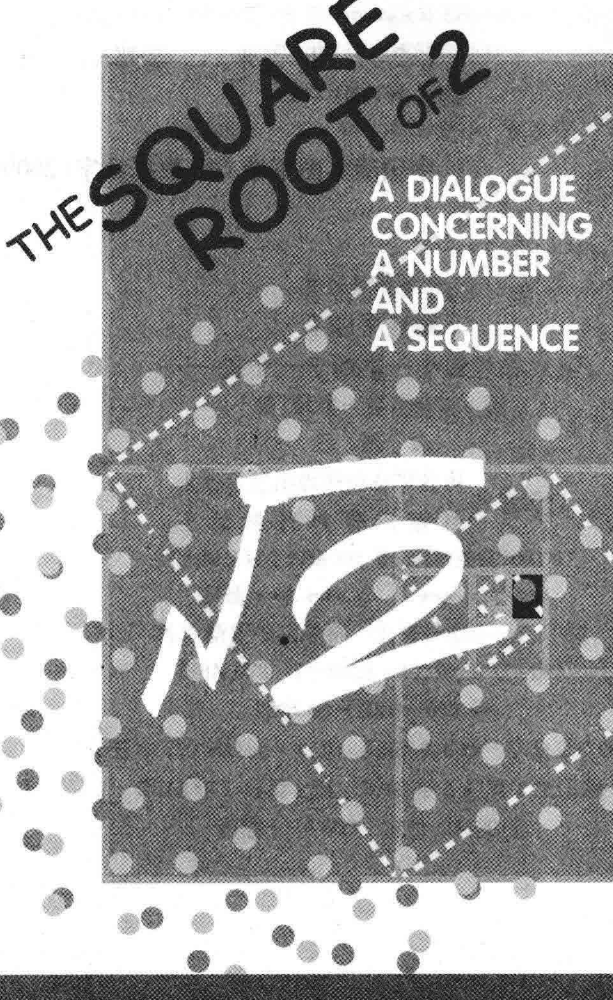
发现数学丛书

[爱尔兰] 戴维·弗兰纳里 著
郑炼 译

2的平方根

关于一个数与一个数列的对话

上海科技教育出版社



The Square Root of 2

A Dialogue Concerning A Number And A Sequence

by

David Flannery

责任编辑　李　凌　装帧设计　汤世梁

发现数学丛书

2 的平方根

——关于一个数与一个数列的对话

[美]戴维·弗兰纳里　著

郑　炼　译

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 技 教 育 出 版 社　出版发行

（上海市冠生园路 393 号　邮政编码 200235）

网址：www. ewen. cc　　www. sste. com

各地新华书店经销　上海长阳印刷厂印刷

ISBN 978-7-5428-4937-3/O·648

图字 09-2008-615 号

开本 850×1168　1/32　印张 9.875　字数 255 000

2010 年 1 月第 1 版　2010 年 1 月第 1 次印刷

印数 1-4 400　定价：24.00 元

先生，如果您希望有一本书陪伴您旅行，请带上一本科学书。当您读完一本休闲书，您浏览了内容，除此以外一无所获；而一本科学书则能给予您很多很多……

——詹姆斯·博斯韦尔

《与塞缪尔·约翰逊同游赫布里底群岛记》

序　言

在我撰写本书的时候，我想象这是一位"老师"与一位"学生"的对话——老师人到中年，不仅精通数学，而且十分敬业，就像艺术家对他的艺术一样，对自己的工作充满热情；学生即将成年，他表达清晰，勇于探索，渴望更博学的老师所给予的任何知识。当您预备阅读本书时，也请您作这样的理解。

他们的对话——我没有描写确切的场景——是老师创设的，目的之一是让学生体会数的概念远比最初能想见的微妙得多。他们的数学之旅始于老师用一系列问答引导学生，通过一个漂亮而又简单的几何范例(据信产生于古代印度)，建立了一个确定的数的存在性，而关于这个数的性质的知识就必然是随后问答二重奏的基本内容。

老师的高明之处在于他希望学生领略一点数学的奥秘，更在于他引导学生一步一步逐渐熟悉数学推理，在自己"发现事物"的过程中体验纯粹的快乐。正开始探索的年轻的学习者很快感受到发现的喜悦，经过一番探索与努力，他遇见一个数列，他猜想这个数列与老师所展示出来的神奇的数有密切的联系，这对他来说是弥足珍贵的奖励。为这个幸运的发现所诱惑，强烈的好奇心驱使他迫不及待地投入工作，去更多地了解这个数，了解这个数与已令他着迷的数列间的联系。这本共有五章的书便由此开始。

我尽力使前四章具有独立性。当日常语言能达到同样目的时我避免使用数学记号，虽然语言叙述略显冗长。数学记号的运用不超出最简单的高中代数的范围，但表达方式明显反映对这个数学分支的需要。所使用的代数方法是简单的，但经常是

巧妙的，显示运用少量工具和技巧能够做那么多事。倘若读者能因此而欣赏代数——在一般意义下证明的功能——本书的写作就不枉然。

遗憾的是，若要保持第五章完全独立，就不得不舍弃若干精彩的材料，这实在不是我的意愿，我宁可努力将这些材料献给勤奋的读者，希望他们能充分领会这些材料的实质。

在本书中，为区别对话的双方，将采用以下的印刷方式：

老师的声音——自信、柔和而令人信服——设置为这样的黑体字，并靠近页面左侧。

学生的声音——恭敬，热切而又好奇——设置为这种轻快的字体，在页面上略微右移。

老师与学生间的对话，理应既严肃又活泼，我希望本书的读者能够从这篇对话中体会寓教于乐的态度和精神。

戴维·弗兰纳里

2005年9月

目　录

序言 …… I

第一章　提出恰当的问题 …… 1

第二章　无理性及其推论 …… 46

第三章　代数的功能 …… 92

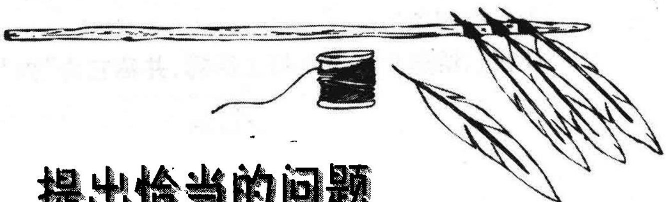
第四章　戏法 …… 147

第五章　补遗与拾零 …… 231

尾声 …… 299

各章注释 …… 301

致谢 …… 305



第一章　提出恰当的问题

请你画一个正方形,使它由四个单位正方形组成。

单位正方形就是每条边都是一个单位长的正方形吧?

是啊。

好,这应该并不很困难。

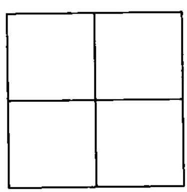


图 1

用它来做什么呢?

很好。现在让我在你画的图上添上如下的对角线。

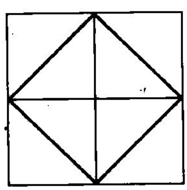


图 2

你看，这样就形成一个新的正方形。

我看见了。这个正方形以四个单位正方形的对角线作为它的四条边。

让我们给这个正方形打上阴影，并称它为“内”正方形。

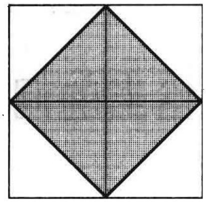


图 3

现在请你告诉我，这个内正方形的面积是多少。

让我想一想。这个内正方形恰好包含每个单位正方形的一半，它的面积应该是大正方形面积的一半。所以它的面积是 2 平方单位。

不错。那么，作为内正方形边的那些对角线的长是多少呢？

我一时答不出。我只知道，要求一个矩形的面积，应该用它的长乘以它的宽。

你所说的“长乘以宽，”其实就是用一条边的长乘以另一条与它相交成直角的边的长。

对正方形来说，因为它的长与宽相等，所以它的面积就应该是它的边长乘以自身。

你说得对。

但这对我有什么用呢？我还是不知道它的边长是多少。

的确如此。不过，如果我们用 s 表示一条边的长度，那么关于 s 你能说些什么呢？

我猜想，如果不引入字母，接下来我们就无法讨论了吗？

也能讨论，不过那样的话，讨论将更加冗长，超出了问题的

需要。顺便问一句，为什么我选择 s 这个字母？

因为它是“边”[1]这个单词的第一个字母吗？

回答正确。用单词的第一个字母代表你所寻找的那个量是通用的方法。

这样，s 就表示内正方形的边长。我希望你不要让我去做代数运算。

只有很少量的代数运算——偶尔需要。关于数 s，现在你能告诉我些什么？

用 s 去乘以它自身，就得到 2。

正确，因为内正方形的面积是 2(平方单位)。你还记得 $s\times s$ 经常被写作 s^2 吗？

记得。我的代数学得没有那么糟糕。

于是你说数 s“满足”方程

$$s^2 = 2$$

也就是说“s 的平方等于 2”。

数 s 乘以它自身等于 2。是否就称 s 为 2 的平方根？

是的，不过说 s 是 2 的一个平方根更准确。如果一个数乘以自身得到另一个数，就称这个数为另一个数的一个平方根。

因为 $3\times3=9$，所以 3 是 9 的一个平方根。

因为 $(-3)\times(-3)=9$，所以 -3 也是 9 的一个平方根。

不过大多数人会说 9 的平方根是 3。

不错。称一个数的正的平方根为这个数的平方根是一个习惯。因为 s 是一个正方形的边长，它显然是一个正的量，所以我们可以说……

……s 是 2 的平方根。

有时我们也简单地说“根号 2”，应把它理解为 2 的平方根之一。

---

① “边”的英文单词是 side。——译注

没有其他的方根，比如说立方根吗？

有的。现在，3 是 9 的平方根这个事实，经常用数学记号表示为$\sqrt{9}=3$。

我一直喜欢用这个记号表示平方根。

1525 年，一个名叫克里斯托夫·鲁道夫（Christoff Rudolff）的人，在他的著作《未知量》（*Die Coss*）中首次使用这个记号，不过我不打算深究他选择这个记号的原因。

我们能不能与 s 说再见，从现在起用$\sqrt{2}$来代替它？①

如果我们希望这样，当然可以，但既然 s 能帮助我们达到目的，我们将继续使用它。

现在我们已经说明了单位正方形对角线的长是$\sqrt{2}$。

的确如此。表明 2 的平方根存在性的这种好方法起源于几千年前的印度。②

不得不承认，这种方法相当简明。

它给我们留下了深刻的印象。

那么，$\sqrt{2}$是什么数呢？

正如方程 $s^2=2$ 所反映的，s 是这样一个数，它乘以自身准确地等于 2。这与等式

$$\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$$

的意义完全相当：$\sqrt{2}$是乘以自身得到 2 的那个数。

这我明白，但$\sqrt{2}$到底代表什么数呢？我的意思是，$\sqrt{16}=4$，而 4，我可以称它为一个实实在在的数。

我懂你的意思。你给了我 $\sqrt{16}$ 的一个具体的值，就是 4 这个数。你希望我对$\sqrt{2}$做同样的事，给你一个你所熟悉的那种

① 见本章注释 1。——原注

② 见本章注释 2。——原注

数，而它的平方是2。

确实如此。我就是问使 $s^2=2$ 的那个 s 的具体的值是什么。

可以很容易地使你相信，$\sqrt{2}$ 不是一个自然数。

自然数就是通常用来计数的那些数，1，2，3，一直数下去。

正是。

但2自身就是一个自然数呀！自然数9和16的平方根不都同样是自然数吗？

不错，9和16的平方根都同样是自然数。

而你说2没有自然数的平方根。

没错。有一种方法可以让你目睹这个结论，就是将最初的几个自然数按递增顺序排成一行，而在它们下面的第二行写出这些自然数对应的平方数：

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**…**
1	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**…**

每行最后的三点，或者说省略号，表示按这个方式写下去，永不停止。

好，我立刻发现第二行中没有出现2。

还有下面这些数也没有出现

3，5，6，7，8，10，11，12，13，14，15，17，…

我敢说，还有比这更多的自然数在第二行中没有出现。

是的，就某种意义说，“大多数”的自然数将缺席第二行。而那些出现在第二行的数1，4，9，16，…就是所谓完全平方数。

那些在第二行不出现的数都不是完全平方数吗？

对：49是完全平方数，而48就不是。

我想，现在我已经明白为什么没有一个自然数的平方是2了。因为第一个自然数的平方是1，而第二个自然数的平方是4，这样2就被跳过了。

这就是问题的解释。

好。很明显，不存在平方是2的自然数，但总该有某个分数，它的平方是2吧？

说到分数，你是指一个整数被另一个整数除的普通分数吗？

这就是我所指的分数，譬如$\frac{7}{5}$。难道还有其他类型的分数吗？

有的，不过当我们说“分数”，就意味着一个整数被另一个整数除。被除数叫做分子，而除数叫做分母。

位于上面的那个数是分子，而居于下面的那个数是分母。

完全正确。在你举的例子中，整数7是分子，而整数5是分母。

难道没有与这个分数很接近的分数，它的平方恰好是2？

你为什么说接近这个分数？

因为我的计算器显示，$\frac{7}{5}$化为小数形式是1.4；我把它自乘，得到1.96，这个数已经相当接近于2。

不错。让我来告诉你，如何不用计算器而借助一点小技巧来获得这个结果。因为

$$\left(\frac{7}{5}\right)^2=\frac{49}{25}$$

$$\overset{!}{=}\frac{50-1}{25}$$

$$=\frac{50}{25}-\frac{1}{25}$$

$$=2-\frac{1}{25}$$

所以我们可以说，分数$\frac{7}{5}$的平方比 2 小$\frac{1}{25}$。

根据我的计算器，$\frac{1}{25}=0.04$，这正好是 $2-1.96$。顺便问一句，你为什么在第二个等号上面打上感叹号？

为了表明这个步骤很巧妙。

我的确想不出这种做法，这真了不起。

好了，这不是我的首创。以往我曾见过不少类似的技巧，最终我明白了一点，而这就是我想说明的。

我至少能看出它为什么巧妙。

好。为什么呢？

把分子 49 写作 $50-1$，你就能用 25 去除 50 得到 2，再用 25 去除 1 得到$\frac{1}{25}$，而这正是$\frac{7}{5}$的平方比 2 小的那个数值。

不过只有当你的船搁浅在一个荒凉的海岛上，而你除了自己可怜的脑袋以外没有任何计算工具时，这才是一种有用的技巧。[①]

数学就应该是自己做呀！我想，当你自己无法计算某个问题，而借助计算器求值，那是欺骗行为。

你是指像求$\sqrt{2}$的小数展开式这样的工作吗？

是的，与此类似的工作。我竭尽所能也找不到求$\sqrt{2}$的小数展开式的思路。

我认为，你是在做一件浪费精力的事。如果我们了解并且掌握如何"用手工"求得一个数的小数展开式的话，我们为节约人力而借助计算器，就不违背荒凉海岛数学——自己动手的原则。

---

① 可称为"荒凉海岛数学"。——原注

你是说，因为我知道如何用长除法求$\frac{7}{5}$①或者$\frac{3}{11}$②的小数展开式，甚至于我都不打算弄清工作步骤，我也可以使用计算器以避免工作中”愚蠢的劳动“吗？

我想，我们将把这作为一种策略。我们假定，如果需要的话，我们能够对自己并对其他内行和外行的人解释长除法。③

当然，我完全同意！

小数展开式，或者如我们通常简略说的“小数”，它具有某些优势。一个优势就是小数比与它相等的分数更容易反映一个数的大小。当一个数表示为小数形式时，能很轻易地用几何方式指出它在数直线④上的位置。不论这个数的小数展开式有多长，我们总能知道它位于这条数直线上哪两个整数之间：

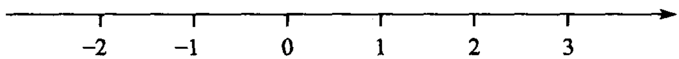


图4

---

①
$$\begin{array}{r} 1.4 \\ 5\,\overline{)\,7.00} \\ \underline{5} \\ 2\,0 \\ \underline{2\,0} \\ 00 \end{array}$$
——原注

②
$$\begin{array}{r} 0.0272\cdots \\ 11\,\overline{)\,3.000} \\ \underline{2\,2} \\ 8\,0 \\ \underline{7\,7} \\ 3\,0 \\ \underline{2\,2} \\ 8\,0 \\ \vdots \end{array}$$
——原注

③ 算法：一步一步地演算。——原注

④ 即数轴。——译注

所以我们能够轻易地从 1.4 看出，它在 1 和 2 之间，反之，从分数$\frac{7}{5}$就不那么容易看出这一点。

分数$\frac{7}{5}$或许太简单了。不用费太多心思就能确定它在数直线上位于哪两个整数之间，但是，谁能不经过计算就说出分数$\frac{103993}{33102}$在数直线上的位置呢？

我同意你的说法，我看不出这个点应该落在哪里。

至于分数$\frac{7}{5}$，你可以拿一盒火柴，搭一个每边长为五根火柴的正方形。

这是否意味着五根火柴作为一个单位长度？

只要你愿意，你当然可以这样想。现在你将发现，沿对角线可以放上七根火柴：

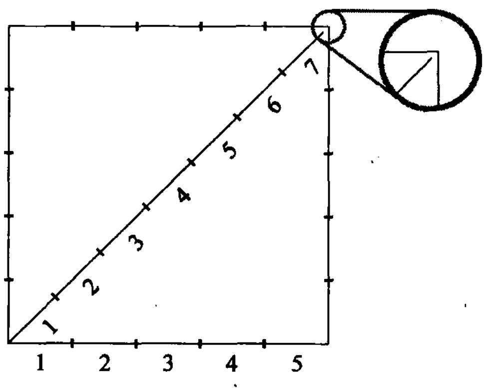


图 5

但因为$\frac{7}{5}$要比$\sqrt{2}$小，所以七根火柴不能填满对角线。

这个差别几乎看不出来。

是的，但缝隙确实存在着。

这个简洁的方法形象地说明了$\frac{7}{5}$只是$\sqrt{2}$的一个近似值。

不错。这个方法还可以解释为比 7:5 接近于比$\sqrt{2}$:1。现在我们说到哪儿啦?

我们正在寻找平方等于 2 的分数。

好,那就让我们继续搜寻。你有什么进一步的想法吗?

应该有比$\frac{7}{5}$稍微大一点的分数,它的平方恰好是$\sqrt{2}$。

的确有许多比$\frac{7}{5}$稍微大一点的分数。

是的。其中不是有无数个落在 1.4 和 1.5 之间吗?

不错,但"无数个"的问题我们留到后面再谈。为什么你要提到 1.5?

这是因为$(1.4)^2 = 1.96$ 比 2 小,而$(1.5)^2 = 2.25$ 比 2 大。

于是怎样呢?

这不就说明 2 的平方根位于这两个数值之间吗?

是的。事实上,因为$1.5 = \frac{3}{2}$,我们可以写作

$$\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$$

让我把这个算术"不等式"展示在数直线上:

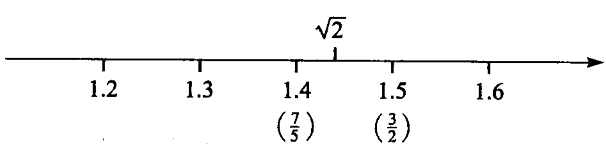


图 6

应当指出,我把$\sqrt{2}$标注在 1.4 右面,离 1.4 比离 1.5 更近,