

国家出版基金资助项目

中外物理学精品书系·前沿系列

非线性科学与 斑图动力学导论

欧阳颀 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

国家出版基金资助项目

中外物理学精品书系·前沿系列

非线性科学与 斑图动力学导论

欧阳颀 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

非线性科学与斑图动力学导论/欧阳颀著. —北京:北京大学出版社,2010.5
(中外物理学精品书系)

ISBN 978-7-301-15931-6

I. 非… II. 欧… III. 反应动力学—非线性力学—研究生—教材 IV. O643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 173873 号

书 名: 非线性科学与斑图动力学导论

著作责任者: 欧阳颀 著

责任编辑: 顾卫宇

标准书号: ISBN 978-7-301-15931-6/O·0802

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn> 电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62752021 出版部 62754962

印 刷 者: 北京中科印刷有限公司

经 销 者: 新华书店

730 毫米×980 毫米 16 开本 18.5 印张 340 千字

2010 年 5 月第 1 版 2010 年 5 月第 1 次印刷

定 价: 50.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话: (010)62752024 电子信箱: fd@pup.pku.edu.cn

中 外 物 理 学 精 品 书 系

本书出版得到“国家出版基金”资助

《中外物理学精品书系》 编委会

主任：王恩哥

副主任：夏建白

编委：（按姓氏笔画排序，标*号者为执行编委）

王力军	王孝群	王 牧	王鼎盛	石 兢
田光善	冯世平	邢定钰	朱邦芬	朱 星
向 涛	刘 川*	许宁生	许京军	张 酣*
张富春	陈志坚*	林海清	欧阳钟灿	周月梅*
郑春开*	赵光达	聂玉昕	徐仁新*	郭 卫*
资 剑	龚旗煌	崔 田	阎守胜	谢心澄
解士杰	解思深	潘建伟		

秘 书：陈小红

序 言

物理学是研究物质、能量以及它们之间相互作用的科学。她不仅是化学、生命、材料、信息、能源和环境等相关学科的基础,同时还是许多新兴学科和交叉学科的前沿。在科技发展日新月异和国际竞争日趋激烈的今天,物理学不仅囿于基础科学和技术应用研究的范畴,而且在社会发展与人类进步的历史进程中发挥着越来越关键的作用。

我们欣喜地看到,改革开放三十多年来,随着中国政治、经济、教育、文化等领域各项事业的持续稳定发展,我国物理学取得了跨越式的进步,做出了很多为世界瞩目的研究成果。今日的中国物理正在经历一个历史上少有的黄金时代。

在我国物理学科快速发展的背景下,近年来物理学相关书籍也呈现百花齐放的良好态势,在知识传承、学术交流、人才培养等方面发挥着无可替代的作用。从另一方面看,尽管国内各出版社相继推出了一些质量很高的物理教材和图书,但系统总结物理学各门类知识和发展,深入浅出地介绍其与现代科学技术之间的渊源,并针对不同层次的读者提供有价值的教材和研究参考,仍是我国科学传播与出版界面临的一个极富挑战性的课题。

为有力推动我国物理学研究、加快相关学科的建设与发展,特别是展现近年来中国物理学家的研究水平和成果,北京大学出版社在国家出版基金的支持下推出了《中外物理学精品书系》,试图对以上难题进行大胆的尝试和探索。该书系编委会集结了数十位来自内地和香港顶尖高校及科研院所的知名专家学者。他们都是目前该领域十分活跃的专家,确保了整套丛书的权威性和前瞻性。

这套书系内容丰富,涵盖面广,可读性强,其中既有对我国传统物理学发展的梳理和总结,也有对正在蓬勃发展的物理学前沿的全面展示;既引进和介绍了世界物理学研究的发展动态,也面向国际主流领域传播中国物理的优秀专著。可以说,《中外物理学精品书系》力图完整呈现近现代世界

和中国物理科学发展的全貌,是一部目前国内为数不多的兼具学术价值和阅读乐趣的经典物理丛书。

《中外物理学精品书系》另一个突出特点是,在把西方物理的精华要义“请进来”的同时,也将我国近现代物理的优秀成果“送出去”。物理学科在世界范围内的重要性不言而喻,引进和翻译世界物理的经典著作和前沿动态,可以满足当前国内物理教学和科研工作的迫切需求。另一方面,改革开放几十年来,我国的物理学研究取得了长足发展,一大批具有较高学术价值的著作相继问世。这套丛书首次将一些中国物理学者的优秀论著以英文版的形式直接推向国际相关研究的主流领域,使世界对中国物理学的过去和现状有更多的深入了解,不仅充分展示出中国物理学研究和积累的“硬实力”,也向世界主动传播我国科技文化领域不断创新的“软实力”,对全面提升中国科学、教育和文化领域的国际形象起到重要的促进作用。

值得一提的是,《中外物理学精品书系》还对中国近现代物理学经典的著作进行了全面收录。20世纪以来,中国物理界诞生了很多经典作品,但当时大都分散出版,如今很多代表性的作品已经淹没在浩瀚的图书海洋中,读者们对这些论著也都是“只闻其声,未见其真”。该书系的编者们在在这方面下了很大工夫,对中国物理学科不同时期、不同分支的经典著作进行了系统地整理和收录。这项工作具有非常重要的学术意义和社会价值,不仅可以很好地保护和传承我国物理学的经典文献,充分发挥其应有的传世育人的作用,更能使广大物理学人和青年学子切身体会我国物理学研究的发展脉络和优良传统,真正领悟到老一辈科学家严谨求实、追求卓越、博大精深的治学之美。

温家宝总理在2006年中国科学技术大会上指出,“加强基础研究是提升国家创新能力、积累智力资本的重要途径,是我国跻身世界科技强国的必要条件”。中国的发展在于创新,而基础研究正是一切创新的根本和源泉。我相信,这套《中外物理学精品书系》的出版,不仅可以使所有热爱和研究物理学的人们从中获取思维的启迪、智力的挑战和阅读的乐趣,也将进一步推动其它相关基础科学更好更快地发展,为我国今后的科技创新和社会进步做出应有的贡献。

《中外物理学精品书系》编委会 主任
中国科学院院士,北京大学教授

王恩哥

2010年5月于燕园

作者前言

1998年中国科学院理论物理研究所刘寄星教授约作者为郝柏林教授主编的《非线性科学丛书》(上海科技教育出版社)撰写一本小册子,介绍斑图动力学方面的研究工作.当时作者刚刚从国外回来,正好想整理一下十几年来在这方面的研究工作,于是写了《反应扩散系统中的斑图动力学》一书.那本书不但是给想要了解斑图动力学理论与实验研究工作的读者写的,也是给作者自己写的.2004年初考虑到此书过于专业,且仅有189页的篇幅,内容过于浓缩,对想要学习这方面知识的一般研究生来说有较大困难,而刘寄星教授又建议作者可否在保持原书风格的基础上,为非线性科学的学习者与研究者再写一本书,既可以作为研究生教材,也可以作为研究人员的参考书.此建议正是作者想办而没有办的事情.原因是在教学工作中,作者从学生的反馈中发现原来那本书内容过于专业,起点比较高,用作教学参考书是不合适的.本书稿就是作者在考虑到上述需求后写出的,比起原来那本书,增加了大量对基础非线性动力学理论的介绍.写作过程尽量遵从由浅入深的原则.为了避免前一本书暴露出来的问题,此书稿写出后作者用它作为主要参考资料在北京大学教了三届研究生的“非线性动力学前沿”课,反应较好.

对非线性动力学的系统研究,可以追溯到伽利略与牛顿时代人们对自然界的定量描述.伽利略研究过的摆与牛顿研究过的天体运动,都是非线性力学中的典型问题.19世纪经典力学的两大难题,刚体定点运动和三体问题,是上两个问题的继续.它们曾难倒了不少科学家,也因而推动了经典力学的发展.20世纪末庞加莱在总结整个世纪这方面进展的基础上,提出不少新的理论和方法,当前非线性科学中的很多概念和思想,都来源于庞加莱.可以说非线性科学应当从20世纪初庞加莱开始算起.20世纪上半叶促进非线性科学发展的,有数学中的微分方程定性理论和无线电技术所需要的非线性线路理论,对它们的研究结果推动了非线性振动理论这一分支的成长.近二三十年非线性科学由于计算机的广泛应用而更加兴旺.计算机不仅是数值计算的工具,也为非线性现象和理论分析提供了新的思想.促进这种发展的还有数学中动力系统理论的成长以及统计物理学中的不少成果,如重整化理论.

什么是非线性？非线性是一个数学名词，它指两个量之间没有像正比那样的“直线”关系。自然科学和工程技术中有许多问题要用到非线性的数学模型。比如，采用了非线性模型以后，可以说明为什么同一个前提会导致几个不同的结果，可以说明什么时候两种效应不能叠加，这两种现象会怎样彼此影响，发生耦合作用。各门学科有各自的非线性问题：激光理论中有不少非线性光学问题；工程结构形变大的情况下要用非线性的结构力学；无线电技术中涉及非线性的振荡理论；说明化学反应中出现螺旋波的起源要用合适的非线性数学模型，等等。但是，非线性科学并不是指包含各门学科里所有非线性的问题。要真是那样的话，从数学的观点来看，线性是非线性的特殊情况，也可以算是非线性的一种；如果非线性科学里的“科学”是指所有学科，那么非线性科学就成为包罗一切的一门万能科学，也就什么具体问题也不能解决了。非线性科学只考虑各门学科中有关非线性的共性问题，特别是那些无法从线性模型稍加修正（比如摄动理论）就能解决的问题。此外，再加上它自身理论发展所要的一些概念方法等，这才是非线性科学的研究对象。共性在很多地方表现为数学规律相同，因此数学在非线性科学里起很大作用。但数学在这里只是作为一种说明共性的手段，非线性数学（姑且假设有这样一门学科，但一般不赞成这样的提法）只能用来解决由于非线性共性引起的某些数学问题。而另一些非线性共性虽然确实存在，但目前还很难用数学理论来处理。非线性科学和数学有密切关系，但不是一门数学。从学科性质说，非线性科学不是基础应用研究，而是基础性研究。

目前，非线性科学的前沿领域大致包含以下几个方面：孤立波，混沌，分形及斑图动力学。孤立波以及相应的孤立子的研究，是其中发展较早的一个分支。它的发现可以追溯到 20 世纪初。对它的理论和实验研究在 20 世纪 50、60 年代已经较多。到今天，除了沿着它自身体系发展外，由于它在数学处理上已取得不少经验，人们期望从中得到或了解其它非线性现象中模式形成的机理。比如，有空间传播性能的波形不变的非线性现象，可以认为是系统中由于自组织而“降维”，在数学上和非线性振动中的所谓同宿解有关。对其它非线性现象的理解也可能从孤立波已有的成果中得到借鉴。

混沌指一种貌似无规的运动，但支配这种运动的规律却可以用确定性的方程来描述。上面提到的庞加莱在总结天体力学中的问题时，已经对这种现象有了认识。到 20 世纪 50 年代，有些物理学家（如玻恩）也已明确知道经典力学中会有长期动态的不可预测性。但混沌现象和理论开始受到重视，一般认为契机于上世纪 60 年代两件事。一是洛伦茨在天气预报方程研究中的发现，尽管描述用的方程是确定性的，天气长期动态却是不可预测的；另一件是几位数学家证

明了有关经典力学动态的一个定理,即现在按他们的姓所称的卡姆(KAM)理论.这两件事也分别代表混沌理论两类对象和两种方法:洛伦茨的研究对象是耗散系统,这类系统和周围环境有联系和交往,它们在自然和工程中都存在;而卡姆理论的研究对象是保守系统,它们在天体研究和统计物理中常见.洛伦茨依靠的是数值计算,卡姆理论用的是严格数学推理,这两种方法在混沌理论研究里都必不可少.

分形是研究不规则形状的几何关系.人们早就熟悉从规则的事物抽象出诸如圆、直线、平面等几何概念,芒德布罗(Mandelbrot)则为曲曲弯弯的海岸线、棉絮团似的云烟找到合适的几何学描述方法——分形.早期概念中的分形要求整体与它的各个局部都相似,即具有“自相似性”.正如天下没有绝对圆的东西,几何学里的圆仅存在于数学家脑袋中一样,完全自相似的分形也只是一种数学抽象.当今概念中的分形(多重分形)对自相似性作了适当的修正和推广,使分形更能接近现实的事物.这套几何工具在处理许多非线性现象时很有效.分形理论开始是在各种物理或真实例子里寻找应用,后来人们则进一步研究那些具有分形几何特征的事物具有什么样的物理规律,以及它们是如何随时间演化的.分形理论出现较晚,它的数学准备不像孤立波那样充分,目前它的数学理论和实际应用之间距离还较大,有些数学概念还得重新建立.

斑图动力学是非线性科学领域中的一个较新的分支,它的研究目的是探索诸系统之间共同存在的、具有普遍指导意义的斑图形成基本规律.对于斑图动力学的系统研究应该起始于1952年图灵对反应扩散系统的研究.图灵在其论文《形态形成的化学基础》中,从数学角度表明,在反应扩散系统中,稳定均匀态会在某些条件下失稳,并自发产生空间定态图纹.图灵在论文中试图说明,某些生物的体表所显示的图纹,如斑马身上的斑图是怎样产生的.虽然迄今为止在生物实验中还没有找到图灵斑图的直接证据,图灵的思想引发了人们在这方面的深入思考.1968年扎布亨斯基在别洛乌索夫-扎布亨斯基(Belousov-Zhabotinski, BZ)反应中发现螺旋波斑图,引发了人们对动态斑图的时空动力学行为的研究.由此开始,斑图动力学作为非线性科学的一个分支逐渐形成,并在非线性科学中占据了重要位置.

本书的目的不是对非线性的上述研究课题逐一展开讨论,而是着重介绍研究以上课题所必备的物理数学知识.在此基础上对斑图动力学问题作详细的介绍.本书分两部分:非线性科学研究与斑图动力学研究.第一部分分为六章,目的是使读者了解研究非线性问题的基本知识,并在一定程度上掌握它的研究工具.第一章是对非线性动力学研究的概述,简单介绍什么是动力系统,为什么研

究非线性动力学,及非线性科学在整个物理学中的地位. 接下来的两章通过讨论经典力学,流体力学,化学与生物学中的几个例子指出非线性问题的来源,并介绍建立数学模型的方法. 第四章对有限自由度的动力系统做分析,引出相空间,中心流形与不变流形,保守系统与耗散系统等概念,并对系统稳定性做分析上的定义. 第五章介绍非线性分析中最为广泛应用的工具:微扰分析. 重点是介绍对系统不动点的线性稳定性分析. 第六章在相空间中不动点附近做非线性分析,介绍分岔理论,并用分岔理论将非线性动力系统在不动点附近的行为进行分类,引出非线性方程的正则形式. 本书第二部分介绍斑图动力学. 第七章对斑图动力学问题作一个简单的介绍. 第八章、第九章通过讨论图灵斑图形成的机制及其演化,介绍一类由于系统的空间均匀定态在相空间中局部失稳而引发的斑图形成. 其中第八章集中讨论图灵失稳的一级分岔问题,失稳的结果是图灵斑图的产生. 第九章介绍图灵斑图的高级分岔. 图灵分岔机制是自然界广泛存在的一种斑图形成机制,目前研究比较透彻的流体力学中的斑图形成与非线性光学中的斑图形成,都与图灵分岔有关. 后面三章讨论由于系统在相空间中全局失稳导致的斑图形成. 第十章、十一章着重介绍可激发系统中螺旋波的斑图动力学. 其中第十章推导螺旋波的色散关系与本构关系,这两个关系决定了稳定螺旋波的动力学行为. 第十一章研究螺旋波的各类失稳途径及缺陷混沌的产生. 这部分工作有的已经有了定论,但大部分还在不断地探讨之中,有的问题还是非线性科学的前沿课题. 第十二章探讨双稳系统中可能出现的非平衡相变. 在这一章里主要介绍两类失稳现象:非平衡伊辛-布洛赫(Ising-Bloch)相变与化学波锋的横向失稳(transverse instability),这两类失稳会导致系统发展出一系列时空斑图态. 第十三章研究一个特殊的非自治系统中的斑图动力学,即在周期外力扰动下系统的斑图自组织行为. 当周围外力扰动频率大约两倍于系统的本征振荡频率时,驻波斑图会自组织形成. 这类斑图最早由法拉第于一百五十年前在流体系统中观察到,现在在许多实验系统中都有发现,例如振荡沙盘系统,反应扩散系统等.

本书是作者在北京大学物理学院几年讲授非线性科学及斑图动力学中逐步形成的. 在教学过程中,作者主要参考了书末所列参考文献[1,2,3,4]所列的几本专著. 参考文献[1]对非线性科学作了系统的介绍,本书前半部分的主要结构参考于此书;参考文献[2]着重讨论非线性科学在各个学科中的应用,本书中例子的一部分来源于此专著;参考文献[3]对经典力学的分析简单明了,作者受益匪浅;参考文献[4]专门讨论非线性科学中的斑图动力学问题,作者的斑图动力学理论大部分是从此书学到的. 另外有几本书对作者了解非线性科学也甚有

帮助：如郝柏林先生主编的《非线性丛书》(上海科技教育出版社)是我国在非线性科学研究中的第一部系列丛书；参考文献[5]详细讨论了非线性科学的数学基础。

作者感谢刘寄星教授抽出时间认真阅读这个书稿，并从科学性方面、文章结构方面和文字表述方面提出一些有益的修改建议。作者还要感谢北京大学2003—2005年随作者学习斑图动力学课程的学生们。他们对本书的初稿进行了认真的校对，对本书出现的所有数学公式一一进行了重新推导。没有他们的帮助和鼓励，作者是不敢将这个书稿送出去的。

欧阳颀

2006年9月

目 录

第一章 概论	(1)
§ 1.1 动力学方程	(1)
§ 1.2 非线性问题	(4)
§ 1.3 物理世界的动力学问题	(8)
第二章 自然界中的非线性行为	(11)
§ 2.1 经典力学中的非线性行为	(11)
§ 2.2 热对流	(13)
§ 2.3 化学系统中的非线性现象	(17)
§ 2.4 生物系统中的非线性现象	(22)
第三章 动力系统的定量形式	(27)
§ 3.1 经典力学中的演化方程	(27)
§ 3.2 化学反应系统的动力学模型	(31)
§ 3.3 生态系统及延迟模型	(34)
§ 3.4 微观自组织	(39)
第四章 有限维动力系统	(43)
§ 4.1 相空间	(43)
§ 4.2 中心流形	(48)
§ 4.3 不变流形	(50)
§ 4.4 保守系统与耗散系统	(61)
§ 4.5 稳定性与线性稳定性	(65)
第五章 不动点的线性稳定性分析	(70)
§ 5.1 中心流形定理	(70)
§ 5.2 单变量系统	(75)
§ 5.3 双变量系统	(82)
§ 5.4 三变量与多变量	(92)
§ 5.5 延迟模型	(96)

第六章 非线性系统的正则方程	(99)
§ 6.1 微扰法与多重尺度分析	(99)
§ 6.2 一维不变流形的正则方程	(106)
§ 6.3 动力势与结构稳定性	(113)
§ 6.4 霍普夫分岔	(116)
§ 6.5 极限环的全局分岔	(121)
§ 6.6 正则方程与模式共振	(126)
第七章 斑图动力学引论	(130)
§ 7.1 斑图动力学	(130)
§ 7.2 反应扩散系统	(133)
§ 7.3 反应扩散系统的基本试验装置	(135)
第八章 图灵斑图与斑图选择	(138)
§ 8.1 图灵斑图	(138)
§ 8.2 线性稳定性分析	(140)
§ 8.3 斑图选择与振幅方程	(144)
§ 8.4 图灵斑图的稳定性分析	(149)
§ 8.5 振幅方程系数的推导	(155)
§ 8.6 图灵斑图的实验观察	(160)
第九章 图灵斑图的二级分岔	(167)
§ 9.1 NWS 方程	(167)
§ 9.2 条形斑图的失稳	(170)
§ 9.3 具有旋转对称的包络方程	(176)
§ 9.4 菱形斑图	(179)
§ 9.5 图灵斑图的研究方向	(183)
第十章 螺旋波斑图	(187)
§ 10.1 螺旋波的产生	(187)
§ 10.2 色散关系	(191)
§ 10.3 本构关系	(196)
§ 10.4 螺旋波实验研究	(201)
第十一章 螺旋波的失稳	(208)
§ 11.1 螺旋波的爱克豪斯失稳	(208)
§ 11.2 对流失稳的实验观测	(212)

§ 11.3	漫游螺旋波	(216)
§ 11.4	螺旋波端点运动的正则方程	(222)
§ 11.5	周期螺旋波失稳的实验观察	(228)
第十二章	双稳系统中的斑图形成	(235)
§ 12.1	双稳系统与化学波锋	(235)
§ 12.2	非平衡伊辛-布洛赫相变	(239)
§ 12.3	横向失稳	(245)
§ 12.4	迷宫斑图	(247)
§ 12.5	螺旋波与振荡斑点	(251)
§ 12.6	双稳系统中斑图的实验观察	(255)
第十三章	化学法拉第斑图	(261)
§ 13.1	振荡系统的波锋	(261)
§ 13.2	钟摆模型	(264)
§ 13.3	反应扩散模型	(268)
§ 13.4	化学法拉第斑图的实验	(271)
参考文献	(274)

第一章 概 论

本章的主要目的是介绍非线性动力学的主要研究对象. 首先讨论动力学方程的一般数学形式与研究动力学方程的主要工具, 在此基础上讨论线性方程与非线性方程的根本区别, 从而得到非线性系统的特殊性质. 最后简单介绍一下非线性科学研究在整个物理学中的位置, 以及非线性动力学在当下前沿领域的应用.

§ 1.1 动力学方程

非线性动力学是研究动力学的理论. 动力学的数学表达主要分为两类: 微分方程与差分方程. 微分方程描述系统状态随时间的连续变化; 差分方程是将时间变量离散化, 研究系统状态此时刻与彼时刻之间的关系. 在科学研究与工程设计中, 微分方程是应用最广泛的形式, 本书将主要讨论微分方程中的非线性问题. 差分方程在研究混沌动力学中是一个极其有用的工具, 由于本书重点不是讨论混沌动力学问题, 在这里不作详细介绍. 微分方程根据变量对自变量的微分形式又分两种类型: 常微分方程与偏微分方程. 例如, 阻尼振荡方程

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (1.1.1)$$

是常微分方程, 因为方程中只出现常微分项 $d^2 x/dt^2$ 与 dx/dt . 也就是说, 方程中变量只是一个自变量的函数. 相反, 在热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

中, 变量 u 是时间 t 与空间 x 的函数, 因此它是偏微分方程. 在第一部分介绍非线性动力学基本理论的内容中, 我们把注意力集中在常微分方程, 偏微分方程的问题在斑图动力学部分讨论.

对于任意一个常微分方程, 我们总可以将其转化为一个普遍形式:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (1.1.2)$$

这里变量 x_1, \dots, x_n 可能是一个反应器中不同化学物质的浓度, 生态系统中不同物种的数量, 或是太阳系中不同星球的位置与速度; 而函数 f_1, \dots, f_n 由不同问题的动力学性质决定. 例如, 对于阻尼振荡方程 (1.1.1), 可以经过这样的变量代换写成 (1.1.2) 的形式: 令 $x_1 = x; x_2 = dx/dt$, 这样就有:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1. \end{cases}$$

此动力系统是一个线性系统, 因为在方程右端所有变量 x_i 的表现形式都是一次的, 因此函数 f_i 在相空间中是一条直线. 如果方程的右端存在高次项, 则该方程就是一个非线性方程. 典型的非线性项是变量的乘积, 高次幂或函数, 如 x_1x_2, x_3^3 , 或 $\cos x_2$ 等, 例如单摆运动由以下方程决定:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin x = 0.$$

这里 x 是单摆偏离垂直线的角度; g 是重力加速度; L 是单摆的长度. 此系统可以通过变换成为如下非线性方程:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{g}{L}\sin x_1. \end{cases} \quad (1.1.3)$$

在以上方程中, 方程的右端都不显含时间, 这类方程叫自治系统 (autonomous system). 如果方程右端是显含时间的, 则该系统被称为非自治系统 (nonautonomous system). 对于非自治系统, 也可以通过变换将其动力学方程转化为 (1.1.2) 的形式, 例如受迫振荡系统

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F \cos t,$$

通过变换: $x_1 = x, x_2 = dx/dt, x_3 = t$, 方程变为

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{m}(-kx_1 - bx_2 + F \cos x_3), \\ \frac{dx_3}{dt} = 1. \end{cases}$$

这是一个三变量常微分方程组. 一般来讲, 任意一个 n 阶单变量常微分方程可以化为一个 n 变量一阶常微分方程组; 任意一个 n 阶 m 变量常微分方程组可以