# 矩阵分析

第3版

史荣昌　魏丰　编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

# 矩阵分析

（第3版）

史荣昌　魏　丰　编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内容简介

本书是作者根据20多年教学实践经历3个版本使用编写而成，主要介绍线性空间和线性变换，λ-矩阵与矩阵的Jordan标准形，矩阵的有理标准形，内积空间、正规矩阵、Hermite矩阵，矩阵分解，范数、序列、级数，矩阵函数，函数矩阵与矩阵微分方程，矩阵广义逆，Kronecker积。

本书适合高等院校学生、工学硕士、工程硕士研究生应用。



**图书在版编目(CIP)数据**

矩阵分析/史荣昌，魏丰编著. —3版. —北京：北京理工大学出版社，2010.6

ISBN 978-7-5640-3189-3

Ⅰ.①矩… Ⅱ.①史…②魏… Ⅲ.①矩阵分析-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.21

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第085033号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 天津紫阳印刷有限公司
开　　本 / 710毫米×1000毫米　1/16
印　　张 / 18
字　　数 / 338千字
版　　次 / 2010年6月第3版　2010年6月第12次印刷
印　　数 / 33001～37000册　　责任校对 / 陈玉梅
定　　价 / 29.00元　　责任印制 / 边心超

# 前　　言

本书是根据矩阵理论的基本内容,以及作者 20 余年讲授的经验,并吸收了许多同仁的建议编写而成。

作者认为,一本合适的工学硕士、工程硕士研究生的教材,除了具备一定的理论深度、广度之外,行文应该深入浅出,简洁、易读,适于自学。与其余同类教科书相比,本书注意配备相当数量的例题、习题,使得读者易于理解、掌握基本理论的内容、方法。在选择例题以及讲解例题的细节上又有特色。为了帮助学生自学及较顺利演算习题,掌握重点,作者还编写了与本书配套的《矩阵分析学习指导》一书,该书中有本书习题的全部解答。

本书与作者以往相同教材相比,除了增加例题、习题以外,本版应许多读者要求还适当增加了部分内容,但是风格特色没有改变。

本书适宜 50 ~ 60 学时教学之用。教师可以根据具体情况选用。某些章节内容用 * 标示,属较难部分。

在本书的编写过程中得到了华东理工大学谢国瑞教授、北京理工大学尤定华教授、吴惠彬副教授的帮助、指教,在此表示衷心的感谢。

本书难免有许多缺点、错误,祈望读者批评指正。

编著者

# 目　　录

# 第一章

# 线性空间和线性变换

本章所介绍的基本概念是矩阵理论的基础，线性空间、线性子空间、线性变换及其矩阵表示，线性变换的核 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 与值域 $\mathscr{A}(V)$，线性变换的特征值与特征向量等是本书的重要概念．

## §1.1 线性空间

线性空间是线性代数最基本的概念．我们将简要地介绍线性空间，所考虑的数域是实数域（记为 $\mathbf{R}$）和复数域（记为 $\mathbf{C}$），统称数域 $F$.

### 一、线性空间概念

先举几个例子．

**例 1.1.1** $n$ 阶实方阵集合 $R^{n\times n}=\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots\}$，由线性代数知矩阵有加法运算与数乘矩阵运算．矩阵的加法运算具有四条性质：

（1）加法交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

（2）加法结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

（3）存在零矩阵“0”，满足 $\boldsymbol{A}+0=0+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；

（4）对于 $R^{n\times n}$ 中任何一个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，都有对应的负矩阵 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{n\times n}$，满足 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=0$.

数乘矩阵运算也具有四条性质：

（5）$1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；

（6）$k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$ （$k,l$ 为数）；

（7）$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

（8）$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$.

**例 1.1.2** $n$ 元实向量集合 $R^n=\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\nu},\cdots\}$，由线性代数知向量有加法运算与数乘向量运算．向量的加法运算具有四条性质：

（1）加法交换律 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$ （$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in R^n$）

（2）加法结合律 $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\nu})$ （$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\nu}\in R^n$）

（3）存在零向量“0”，满足 $\boldsymbol{\alpha}+0=0+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

（4）对于 $R^n$ 中任何一个实向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 都有对应的负向量 $-\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$，满足 $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=0$.

数乘向量运算也具有四条性质：

（5）$1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$

（6）$k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$

（7）$(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$

（8）$k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

**例 1.1.3** 设 $R[x]_n$ 表示次数小于 $n$ 的变量 $x$ 的实系数多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ 的集合．$R[x]_n$ 中的两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的加法与通常多项式加法运算一样，数乘多项式 $f(x)$ 与通常数乘多项式运算一样．则多项式的加法运算具有四条性质：

（1）加法交换律 $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$

（2）加法结合律

$$[f(x)+g(x)]+h(x)=f(x)+[g(x)+h(x)]$$

（3）存在零多项式 0，满足 $f(x)+0=0+f(x)=f(x)$

（4）对于 $R[x]_n$ 中任何一个多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$，都有对应的负多项式 $-f(x)=-a_0-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_{n-1}x^{n-1}$，满足 $f(x)+(-f(x))=0$.

数乘多项式的运算也具有四条性质：

（5）$1\cdot f(x)=f(x)$

（6）$k(lf(x))=(kl)f(x)$

（7）$(k+l)f(x)=kf(x)+lf(x)$

（8）$k(f(x)+g(x))=kf(x)+kg(x)$.

从这些例子中看到，所涉及的对象（集合）虽然不同，但是它们有共同之处．它们都可定义加法和数乘这两种运算，而且关于这两种运算都具有八条性质．还可以举出许多例子，都有此三例的共同之处．为此，我们把它们统一起来加以研究，引入线性空间的概念．

**定义 1.1.1** 设 $V$ 是一个非空集合，$F$ 是一个数域，在集合 $V$ 的元素之间定义了加法运算．即对于 $V$ 中任意两个元素 $\alpha$ 与 $\beta$，在 $V$ 中都有唯一的元素 $\nu$ 与它们相对应，称之为 $\alpha$ 与 $\beta$ 的和，记为 $\nu=\alpha+\beta$，并且加法运算满足下面四条法则：

（1）交换律 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

（2）结合律 $\alpha+(\beta+\xi)=(\alpha+\beta)+\xi$

（3）零元素 在 $V$ 中有一元素 0（称作零元素），对于 $V$ 中任一元素 $\alpha$ 都有 $\alpha+0=\alpha$

（4）负元素 对于 $V$ 中每一个元素 $\alpha$，都有 $V$ 中的元素 $\beta$，使得 $\alpha+\beta=0$.

在集合 $V$ 的元素与数域 $F$ 中的数之间还定义了一种运算，叫做数乘．即对于 $V$ 中任一元素 $\alpha$ 与 $F$ 中任一数 $k$，在 $V$ 中有唯一的一个元素 $\eta$ 与它们对应，称为 $k$ 与 $\alpha$ 的数乘，记为 $\eta=k\cdot\alpha=k\alpha$，并且数乘运算满足下面四条法则：

(1) $1\cdot\alpha=\alpha$

(2) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$

(3) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

(4) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$.

其中 $k,l$ 表示数域 $F$ 中的任意数，$\alpha,\beta$ 表示 $V$ 中任意元素．

称这样的集合 $V$ 为数域 $F$ 上的**线性空间**．

显然，例 1.1.1～例 1.1.3 都是实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间．现在再举几例．

**例 1.1.4**　设 $\boldsymbol{A}$ 为实数(或复数) $m\times n$ 矩阵，易证：齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的所有解(包括零解)的集合构成实(或复)数域 $\mathbf{R}$(或 $\mathbf{C}$)上的线性空间．这个空间为方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的**解空间**，也称为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的核(或零)空间**，常用 $N(\boldsymbol{A})$ 表示.

**例 1.1.5**　设 $\boldsymbol{A}$ 为实数(或复数) $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{x}$ 为 $n$ 维列向量，则 $m$ 维列向量集合

$$V=\{\boldsymbol{y}\in R^m(C^m)\mid \boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax},\ \boldsymbol{x}\in R^n(C^n),\ \boldsymbol{A}\in R^{m\times n}(C^{m\times n})\}$$

构成实(或复)数域 $\mathbf{R}$(或 $\mathbf{C}$)上的线性空间，称为 **$\boldsymbol{A}$ 的列空间**或 **$\boldsymbol{A}$ 的值域**，常用 $R(\boldsymbol{A})$ 表示．

* **例 1.1.6**　设 $X$ 为任意一个非空集合，$F$ 为任意一个数域，定义从 $X$ 到 $F$ 的每一个映射 $f$ 为 $X$ 上的一个 $F$ 值函数，将 $X$ 上的所有 $F$ 值函数构成的集合记做 $F^X$. 在 $F^X$ 中定义加法与数乘运算如下：对于任意 $f,g\in F^X$，$k\in F$，规定

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad \forall x\in X$$
$$(kf)(x)=k(f(x)),\quad \forall x\in X$$

那么，容易验证 $F^X$ 为数域 $F$ 上的一个线性空间．

**例 1.1.7**　由上例可知，$R^R$ 为实数域 $R$ 上的线性空间，$C^C$ 为复数域 $\mathbf{C}$ 上的线性空间．

**例 1.1.8**　$R^+$ 表示所有正实数集合，在 $R^+$ 中定义加法 $\oplus$ 与数量乘法 $\odot$ 分别为

$$a\oplus b=ab,\qquad \forall a,b\in\mathbf{R}^+$$
$$k\odot a=a^k,\quad \forall a\in\mathbf{R}^+,k\in\mathbf{R}$$

可以验证，$\mathbf{R}^+$ 构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间．

上述几个例子都是在一个集合 $V$ 上定义加法与数域 $F$ 的数量乘法，构成一个线性空间，但问题并不总是那么简单．下面举两个例子，虽然定义了加法与数量乘法，但 $V$ 并不构成一个线性空间．

**例 1.1.9** 设 $V$ 是由系数在实数域 $\mathbf{R}$ 上，次数为 $n$ 的 $n$ 次多项式 $f(x)$ 构成的集合，其加法运算与数乘运算按照通常规定，则 $V$ 不是 $\mathbf{R}$ 上的线性空间．

**例 1.1.10** 设线性非齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解，其通解表达式为

$$\boldsymbol{\xi}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\alpha}_{n-r},\quad 其中 k_1,\cdots,k_{n-r} 为任意数．$$

可以证明：解向量组 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 解集合的线性极大无关组（作为练习请读者自己证明），但是该解集合不构成线性空间．

## 二、向量的线性相关性

线性空间的元素 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\nu},\cdots$ 称为向量，这里所指的向量比线性代数中 $n$ 元向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 的含义更为广泛．

向量的线性相关性概念与结论在叙述形式上与线性代数相同，下面只作简单论述．

**定义 1.1.2** 设 $V$ 是数域 $F$ 上的线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r(r\geqslant 1)$ 是 $V$ 中一组向量，$k_1,k_2,\cdots,k_r$ 是数域 $F$ 中一组数，若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以表示成

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ **线性表示**（出），也称 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的**线性组合**．

例如，因为

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=1\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+2\cdot\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+3\cdot\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+4\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

所以，矩阵$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$是矩阵$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$的线性组合．

**定义 1.1.3** 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r(r\geqslant 1)$，是线性空间 $V$ 中一组向量．如果在数域 $F$ 中有 $r$ 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=0 \tag{1.1.1}$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ **线性相关**．如果一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 不线性相关，就称为**线性无关**．换言之，若

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=0$$

则只有 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$，便称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ **线性无关**．

一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 要么线性相关，要么线性无关，非此即彼．

对于任何一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，都能满足等式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=0$$

因此考察一组向量是否线性相关，关键不在于向量是否满足式(1.1.1)，而在于满足式(1.1.1)中 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 是否只能全为零．若只能全为零，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关．若满足式(1.1.1)中的 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 除了全为零的情况以外，还有不全为零的情况，则向量组线性相关．

**例 1.1.11**　试证：$R^{2\times 2}$中的一组向量（矩阵）

$$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

是线性无关的.

**证明**　若

$$k_1\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+k_2\cdot\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+k_3\cdot\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+k_4\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=0$$

即
$$\begin{bmatrix}k_1&k_2\\k_3&k_4\end{bmatrix}=0$$

所以
$$k_1=k_2=k_3=k_4=0$$

因此满足

$$k_1E_{11}+k_2E_{12}+k_3E_{21}+k_4E_{22}=0$$

的 $k_1,k_2,k_3,k_4$ 只能全为零，于是 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$线性无关.

**例 1.1.12**　试证：$R^{2\times 2}$中的向量（矩阵）组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

是线性相关的.

**证明**　容易验证等式

$$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=0$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

**定理 1.1.1**　设线空间 $V$ 中向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，且向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出，且表出是唯一的（证明留给读者）.

线性代数中向量组的极大线性无关组，向量组的秩等概念在线性空间中也可自然地引进，不再一一赘述.

## §1.2　基与坐标、坐标变换

### 一、基与维数、坐标

**定义 1.2.1**　设数域 $F$ 上线性空间 $V$ 中有 $n$ 个线性无关向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，而且 $V$ 中任何一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n \tag{1.2.1}$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 $V$ 的一个**基**，$(k_1,k_2,\cdots,k_n)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的**坐标**. 这时，就称 $V$ 为 $\boldsymbol{n}$ **维**线性空间，并记 $\dim V=n$.

显然，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标分别为 $(1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,

$(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,(0,0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$. 即

$$\boldsymbol{\alpha}_i=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\text{——}i\text{ 行}\qquad(i=1,\cdots,n)$$

根据定理 1.1.1 知，向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)^{\mathrm{T}}$ 是唯一的. 将式(1.2.1)改写为

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_n\end{bmatrix}\qquad(1.2.2)$$

式中 $1\times n$ 分块矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的元素 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 不是数字而是向量. 在作矩阵分块运算时可把它看成是一个数来处理.

例如，$n$ 维线性空间 $R^{n\times n}$ 中的元素(向量)组 $\{\boldsymbol{E}_{ij}\}$，其中 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 是第 $i$ 行、第 $j$ 列处元素为 1，其余元素全为零的矩阵，即

$$\boldsymbol{E}_{ij}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} & \boldsymbol{0} & & 0 & & \boldsymbol{0} & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & & & 0 & & & \\ & \boldsymbol{0} & & \vdots & & \boldsymbol{0} & \\ & & & 0 & & & \end{bmatrix}\text{——}i\text{ 行}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)\\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad | \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad j\text{ 列}\end{array}$$

是 $R^{n\times n}$ 的一组基.

**例 1.2.1** 试证：线性空间

$$R[x]_n=\{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\mid a_i\in\mathbf{R}\}$$

是 $n$ 维的，并求 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ 在基 $1,x-a,(x-a)^2,\cdots,(x-a)^{n-1}$ 下的坐标.

**证** 先证 $R[x]_n$ 中元素

$$1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$$

是线性无关的. 设

$$k_0\cdot 1+k_1\cdot x+k_2\cdot x^2+\cdots+k_{n-1}x^{n-1}=0$$

由于 $R[x]_n$ 中 $x$ 是变量，所以欲使上式对于任何 $x$ 都成立的充分必要条件是

$$k_0 = k_1 = \cdots = k_{n-1} = 0$$

于是 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 线性无关.

对于 $R[x]_n$ 中任何一个向量(多项式)

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \in R[x]_n$$

均可由 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 线性表出,这表明:$1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 是 $R[x]_n$ 的基,于是 $R[x]_n$ 是 $n$ 维的.

不难验证:$1,x-a,(x-a)^2,\cdots,(x-a)^{n-1}$ 也是 $R[x]_n$ 的一组基. 因为

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

故 $f(x)$ 在这组基下的坐标为

$$f(a), f'(a), \frac{f''(a)}{2!}, \cdots, \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$$

**例 1.2.2**　已知

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

试求 $\boldsymbol{A}$ 的核空间的两组基.

**解**　$\boldsymbol{A}$ 的核空间就是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解空间(见例 1.1.4),所以 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系就是核空间的基. 对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换后得

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解为

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - x_4 \\ x_2 = -\dfrac{3}{2}x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

其中 $x_3,x_4$ 为自由变量. 不难知 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系可以取为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 = (-4,-3,2,0)^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (-1,-2,0,1)^{\mathrm{T}} \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1' = (-4,-3,2,0)^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2' = (-6,-7,2,2)^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

它们都可以作为 $\boldsymbol{A}$ 的核空间的基,核空间是二维的.

**例 1.2.3**　在 $R^4$ 中,求向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$ 在基

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\alpha}_4 = (1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$$

下的坐标.

**解** 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$ 在所给基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的坐标为 $k_1,k_2,k_3,k_4$,故

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 + k_4\boldsymbol{\alpha}_4$$

即

$$\begin{aligned}(1,2,1,1)^{\mathrm{T}} &= k_1(1,1,1,1)^{\mathrm{T}} + k_2(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}} + \\ &\quad k_3(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}} + k_4(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}} \\ &= (k_1+k_2+k_3+k_4, k_1+k_2-k_3-k_4, k_1-k_2+ \\ &\quad k_3-k_4, k_1-k_2-k_3+k_4)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3+k_4 = 1 \\ k_1+k_2-k_3-k_4 = 2 \\ k_1-k_2+k_3-k_4 = 1 \\ k_1-k_2-k_3+k_4 = 1 \end{cases}$$

解之得

$$k_1 = \frac{5}{4}, \quad k_2 = \frac{1}{4}, \quad k_3 = -\frac{1}{4}, \quad k_4 = -\frac{1}{4}$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 在所给基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的坐标为 $\left(\frac{5}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)^{\mathrm{T}}$.

**例 1.2.4** 在 $R^{2\times 2}$ 中,求 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 在基 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ 下的坐标.

**解** 设

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix} &= k_1\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} + k_4\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}k_1+k_2+k_3+k_4 & k_1+k_2+k_3\\ k_1+k_2+k_4 & k_1+k_3+k_4\end{bmatrix}\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3+k_4 = 1 \\ k_1+k_2+k_3 = 2 \\ k_1+k_2+k_4 = 1 \\ k_1+k_3+k_4 = 0 \end{cases}$$

解之得

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 0, \quad k_4 = -1$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 在已给基下的坐标为 $(1,1,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

## 二、基变换与坐标变换

非零线性空间的基不是唯一的,一个向量在不同基下的坐标也是不同的,它们之间的关系就是下面要研究的问题.

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$是$V$中两组基,它们之间的关系是

$$\boldsymbol{\beta}_i=a_{1i}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{2i}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{ni}\boldsymbol{\alpha}_n$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{ni}\end{pmatrix}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

将这$n$个关系式用矩阵记号可以表示成

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\tag{1.2.3}$$

称$n$阶方阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\tag{1.2.4}$$

是由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的**过渡矩阵**. 则式(1.2.3)可以写成

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}\tag{1.2.5}$$

读者容易证明下述定理.

**定理 1.2.1**　过渡矩阵$\boldsymbol{P}$是可逆的.

下面建立$V$中任意一个向量在不同基下坐标间的关系,即导出坐标变换公式.

设$\boldsymbol{\xi}\in V$,若$\boldsymbol{\xi}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$下的坐标分别为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$与$(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$,即若

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

与

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

于是有
$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

将式(1.2.5)代入上式右端得
$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是线性无关的，所以
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\tag{1.2.6}$$

或
$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\tag{1.2.7}$$

将式(1.2.6)与式(1.2.7)称为**坐标变换公式**.

**例1.2.5** 在$R[x]_n$中，$1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$与$1,x-a,(x-a)^2,\cdots,(x-a)^{n-1}$为两组基，求前一组基到后一组基的过渡矩阵.

**解** 因为
$$\begin{aligned}x-a&=(-a)\cdot 1+1\cdot x\\(x-a)^2&=(-a)^2\cdot 1-2a\cdot x+1\cdot x^2\\(x-a)^3&=(-a)^3\cdot 1+3a^2\cdot x-3a\cdot x^2+x^3\\&\cdots\cdots\\(x-a)^{n-1}&=(-a)^{n-1}\cdot 1+(n-1)(-a)^{n-2}\cdot x+\\&\quad\frac{(n-1)(n-2)}{2}(-a)^{n-3}\cdot x^2+\cdots+x^{n-1}\end{aligned}$$

故由$1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$到$1,x-a,(x-a)^2,\cdots,(x-a)^{n-1}$的过渡矩阵为