北京市华罗庚学校奥林匹克系列丛书

华罗庚学校数学课本

高三年级

中国人民大学附中 编

中学部

中国大百科全书出版社

北京市华罗庚学校奥林匹克系列丛书

- 华罗庚学校数学课本(一年级)
- 华罗庚学校数学课本(二年级)
- 华罗庚学校数学课本(三年级)
- 华罗庚学校数学课本(四年级)
- 华罗庚学校数学课本(五年级)
- 华罗庚学校数学课本(六年级)
- 华罗庚学校数学课本(初一年级)
- 华罗庚学校数学课本(初二年级)
- 华罗庚学校数学课本(初三年级)
- 华罗庚学校数学课本(高一年级)
- 华罗庚学校数学课本(高二年级)
- 华罗庚学校数学课本(高三年级)

* * * * *

- 奥林匹克中学数学讲座
- 奥林匹克小学数学讲座

* * * * *

- 华罗庚学校计算机教材

* * * * *

- 华罗庚学校数学试题解析(共七册)

ISBN 7-5000-5669-9
9 787500 056690 >

ISBN 7－5000－5669－9/G・145
定价： 9.80元

北京市华罗庚学校奥林匹克系列丛书

华罗庚学校
数学课本

（高三年级）

中国人民大学附中编
主编：刘彭芝

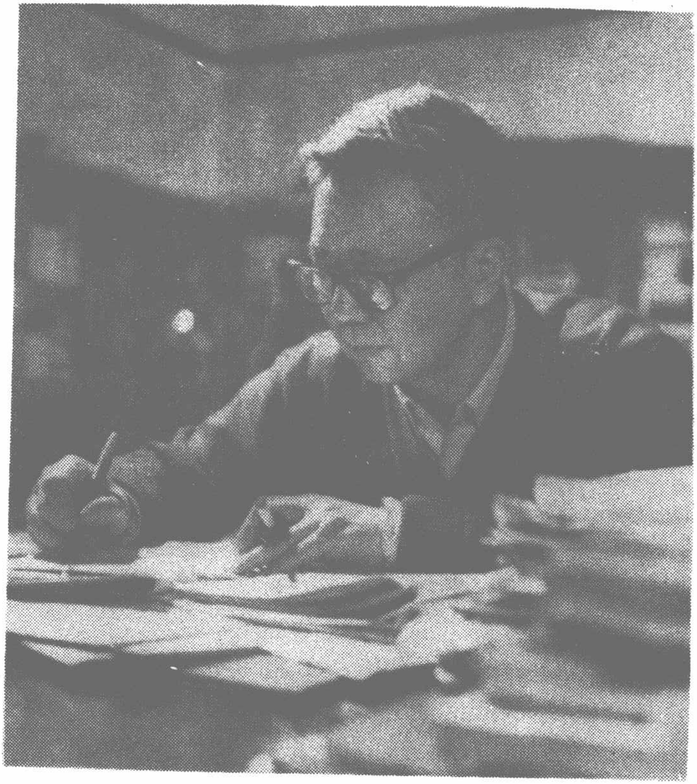
中国大百科全书出版社
北京·1996

华罗庚学校数学课本（高三年级）

编　　者：中国人民大学附中
主　　编：刘彭芝
责任编辑：简菊玲
封面设计：郭　健
版式设计：赵　伟
责任校对：陆占林　王玉琴

出版发行：中国大百科全书出版社
（北京阜成门北大街17号　100037）
印　　刷：北京四季青印刷厂印刷
经　　销：新华书店总店北京发行所

版　　次：1996年3月第2版
印　　次：1996年3月第1次印刷
印　　张：9.625
开　　本：787×1092　1/32
字　　数：208千字
印　　数：1—10000
ISBN 7—5000—5669—9/G·145
定　　价：9.80元



著名数学家华罗庚教授(1910—1985)

苦战猛攻埋头干，
熟能生出百巧来。
勤能补拙是良训，
一分辛劳一分材。

录华罗庚教授
诗一首书赠
华罗庚数学学校
奥林匹克系列丛书

王元
九二·七.

前　言

北京市华罗庚学校是由中国科学院华罗庚实验室、中国科技大学和中国人民大学附中联合创办的，是中国人民大学附中超常教育体系的重要组成部分。其办学目标是为国家大面积早期发现与培养现代杰出科技人才开辟一条切实可行的途径，为我国教育事业面向现代化、面向世界、面向未来的战略方针探索一项行之有效的举措。在这里，一大批高级教师、大学教授和研究员精心执教，一批批数理超常儿童茁壮成长。华校全体师生缅怀我国著名数学家华罗庚教授，崇尚他为国为民鞠躬尽瘁的高贵品质，决心沿着他的路继续走下去，在教育改革的时代大潮中争做弄潮儿，为实现中华民族重振雄风的宏图大业甘当马前卒。

超常教育与早期教育，为当今各国教育家、心理学家所重视。超常教育研究得到了各国政府以及有远见卓识的社会各界人士的支持和赞助。他们认为，早期教育一旦在世界范围内推广成功，给世界带来的巨大影响，远比世界上任何一次科技革命和产业革命更深刻、更广泛。在前苏联，国家开办有各类天才学校，用于培养科技文体方面的超常儿童。在美国，控制论的创立者、“神童”维纳就是家庭和学校共同精心培育成功的典型。

近年来，我国众多有识之士在改革开放、建设有中国特色社会主义的宏图大业感召下，投身超常教育事业，辛勤耕

耘，刻苦研究，已经取得可喜的成果。超常教育是人类教育史上的一大进步。然而，不言而喻，超常教育又是一个异常复杂的新的教育课题。不论是历史上还是现实生活中，少年出众，而成年寻常的人比比皆是。究其原因，往往在于成长环境不佳，而主要则是未能在超常教育理论指导下施以特殊教育的结果。因此，我们必须更新教育观念，采取新的教育理论和方法，把大批聪慧儿童培养成为高科技时代的栋梁之材。创办华罗庚学校的主旨，就在于探索一条使那些天资优异的孩子们，既不脱离群体，以免身心畸形发展，又使他们的才华得以充分开发的可行之路。

七百多年前，英国思想家、现碟实验科学的先驱罗吉尔·培根曾说："数学是科学的大门和钥匙。"时至今日，人们更加清楚地看到了数学在现代教育中占据着永恒的地位。当今世界，自然科学、社会科学和数学已发展成为三足鼎立之势，而数学更是各门科学发展的基础；科学和技术的迅猛、巨大的进步，主要就是得益于数学的现代发展，特别是数学在物理学、生物学以及社会科学中的纵深渗透。因此，华校在以数学为带头学科的施教前提下，同时又鼓励学生们在自己感兴趣的其他课程，如物理、化学、生物、外语、计算机等学科中开拓进取，施展才华。这样，近而言之，希望他们在运用中体验数学的思维模式和神奇魔力；远而图之，则是为他们日后发展的多价值取向打下全面的科学文化素质的坚实基础。

华校采取科学的教学方法，进行开放式教学，努力开发学生的潜在能力，对学生实行超前教育。除由人大附中选派经验丰富的优秀教师任教外，还聘请中国科学院、中国科技

大学、北京大学、清华大学、中国人民大学以及北京师范大学等高校专家、教授来校办讲座。用最新的科技知识丰富学生的头脑，开阔他们的视野。

华校小学部属校外培训性质，从小学二年级选拔招生。入学后每周学习一次，寒暑假进行集中培训。招生时间定于每年 10 月份，招生范围以北京市为主，面向全国。届时小学各年级同时进行考试。录取时每个年级的前 50 名编为 A 班。几年来，华校小学部六年级 A 班的学生几乎百分之百被保送进入人大附中学习。初、高中部每个年级一个华校班，又称实验班。每年暑期，华校高中部聘请高等学校中的学科奥林匹克的高级教练来校讲授奥林匹克数学、物理、化学等知识，进行较强的针对性学习与训练，培养学生的独立思考、观察、分析和解决问题的能力，为他们参加区、市、全国乃至世界级的学科竞赛准备条件。

实践证明，华罗庚学校对超常儿童的培养方略是可取的。近十年来，华校为高一级学校输送了大量的学业优异的人才。以第一、二、三届试验班为例，三届毕业生总数为 136 人。其中，直接保送到国家第一流重点大学 35 人，占 25.7%。参加高考的 101 人中，考入清华大学 42 人，占 30.8%；北京大学 41 人，占 30.1%；中国科技大学 10 人，占 7%。总计考入上述三校为 93 人，加保送 35 人，总计为 128 人。第四届实验班又进一步：全班 44 人，保送 9 人，参加高考 35 人，高考平均分数为 610.83 分，数学平均分数为 137 分；总分数超过 600 分的有 25 人。不仅如此，还有数以千计的学生在区、市、国家乃至世界级的数理学科的竞赛中获奖夺魁，位居北京市重点中学之首。上述大量事实证明，一种新的教育理论和实

践，使得一批又一批英才脱颖而出，足以显示华罗庚学校的办学方向是正确的，教学是成功的。

更可喜的是：在探索办学的过程中，以华校为核心，造就并团结了校内外一大批具有新思想、新观念、肯吃苦、敢拼搏的优秀教师和教育专家。在这个来自平凡的教学科研岗位的不平凡的群体中，有多年工作在教学第一线的中小学高级教师，有近年来执着于数学、物理、化学、生物、计算机等学科奥林匹克活动的高级教练员，有中国科学院和各高等学校中教学科研上成绩卓著的专家教授。他们就像当年的华罗庚那样，做为人师，做为长者，着眼于祖国的未来，甘愿给下一代当人梯。狭义地说，他们是华校藉以成长、引以自豪的中流砥柱；广而言之，他们是推动中小学教育事业改革的一支特别劲旅；他们的教学经验和长期积累起来的教学资料更是我国中小学生在国内外学科奥林匹克赛场上争雄夺魁的无价“法宝”。

今天，在对华校创办十余年的经验进行总结时，我们可以说，在朝着自己的办学目标的不懈奋斗中，华校具有四大办学特色：

第一，从娃娃抓起的早期智力开发；

第二，必名师启蒙的成功教育传统；

第三，在全面发展时力求业有专精；

第四，处强手如林中敢于应接挑战。

教材是教学质量的基本保证，也是教学的基础建设。高质量的教材，是建立在高水平的学术研究成果和丰富的教学经验的基础上的。因此，华罗庚学校开创了荟萃专家编书的格局，愿将《华罗庚学校奥林匹克系列丛书》奉献给广大教

师、中小学生及学生家长同享。目前已出版和即将出版的有《华罗庚学校数学试题解析》（小学部一册、中学部六册）、《华罗庚学校数学课本》（小学部六册、中学部六册）《奥林匹克中学数学讲座》、《奥林匹克小学数学讲座》、《华罗庚学校计算机教材》、《华罗庚学校图解英语》、《华罗庚学校模范作文》、《华罗庚学校物理试题》、《华罗庚学校物理教材》、《华罗庚学校化学教材》、《华罗庚学校化学试题》。这套丛书的编选者都是华校的骨干教师，他们为了共同的目标献出了自己多年的教学经验和最新的教学科研成果，因而使得这套丛书具有实用、新颖、通俗、严谨的特点。这些特点使全书别具一格，面目一新。我相信，它必将博得广大师生与家长的喜爱。

俗云："一花怒放诚可爱，万紫千红才是春。"华校在努力办学、完善自身的同时，诚望对国内中小学教学水平的提高微尽绵薄，诚望与其他兄弟学校取长补短，携手共进。"合抱之木，生于毫末，九层之台，起于垒土。"遥望未来，我们同呼志士之言：为中国在 21 世纪成为科技强国而献身。

作为本教材的主编，我谨以一个超常教育的积极参与者与组织者的名义，向各位辛勤的编著者致以衷心的谢意；恳请教育战线的前辈和同仁给予指导和推荐，也恳请广大师生在使用过程中提出宝贵的意见。

刘彭芝

目　录

第一讲　多项式（一） …………………………… （1）
第二讲　多项式（二） …………………………… （13）
第三讲　多项式（三） …………………………… （28）
第四讲　计数（一） ……………………………… （50）
第五讲　计数（二） ……………………………… （67）
第六讲　组合恒等式 ……………………………… （86）
第七讲　不定方程（一） ………………………… （108）
第八讲　不定方程（二） ………………………… （124）
第九讲　几何不等式（一） ……………………… （140）
第十讲　几何不等式（二） ……………………… （157）
第十一讲　组合几何（一） ……………………… （181）
第十二讲　组合几何（二） ……………………… （201）
第十三讲　组合杂题（五）
——算两次……………………………… （221）
第十四讲　组合杂题（六）
——组合极值…………………………… （235）
第十五讲　组合杂题（七）
——灵活多样的问题…………………… （252）

附录　综合训练题……………………………… （267）
北京华罗庚学校中学部各年级参赛
获奖名单………………………………… （283）

第一讲　多项式（一）

多项式理论是古典代数学的主要内容之一，它在理论上和方法上对现代数学都有着深刻的影响．在各种竞赛中，特别是在国际数学奥林匹克中，多项式的题目一直比较多．这里主要是对数学竞赛中所涉及到的有关多项式的基础理论和基本方法作较系统的介绍．

一、数　　域

在介绍多项式基础理论之前，我们先引入数域的概念．

定义 1　设 P 是由一些复数组成的集合，其中包含 0 与 1，如果 P 中任意两个数（两数可以相同）的和、差、积、商（0 不为除数）仍然是 P 中的数（满足封闭性），那么 P 就称为一个数域．

显然，全体实数构成一个数域，称为实数域；全体复数也构成一个数域，称为复数域．然而全体整数却不能构成一个数域，因为它对除法运算不封闭，只对加、减、乘三种运算封闭．在数学中可以把对加、减、乘三种运算封闭的数集合称为数环．因此我们可以把全体整数称为整数环．

容易证明，任何数域都包含有理数域，所以说有理数域是“最小的”数域，不难证明，数集合

$S=\{x|x=a+b\sqrt{2}$，a、b 为任何有理数$\}$

也构成一个数域，这个数域比实数域“小”而比有理数域

“大”.

二、一元多项式

定义 2　设 n 为一非负整数，形如

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \tag{1}$$

(a_n，a_{n-1}，…，a_0 都属于数域 P)的代数式称为数域 P 上的一元多项式.

关于此定义，我们做如下几点说明：

1. “数域 p 上的”是指多项式的系数 a_n，a_{n-1}，…，a_0 都属于 P.

2. x 是一个文字符号，当把 (1) 视为数域 P 上的多项式函数时，x 则视为变量，且取值于数域 P.

3. $a_ix^i(0\leqslant i\leqslant n)$可称为 x 的 i 次项，$a_i(0\leqslant i\leqslant n)$称为 i 次项系数.

4. 在(1)中，若 $a_n\neq0$ 则 a_nx^n 称为多项式的首项，a_n 称为首项系数，n 称为多项式的次数.

当多项式次数 $n=0$ 时，多项式称为零次多项式，注意零次多项式是一个非零常数.

5. 在(1)中，若 a_n，a_{n-1}，…，a_0 都是 0，则此多项式称为零多项式，零多项式不定义次数，零多项式记为 0.

6. 在不会引起误解的情况下，“一元多项式”可简称“多项式”.

通常我们用 $f(x)$，$g(x)$，…来表示多项式，有时也简记为 f，g，….

多项式 $f(x)$的次数可用符号 $\partial(f(x))$或者 $\deg f$ 表示. 要注意的是，对于零多项式来说没有次数的概念，因此若写了 $\partial(f(x))$或 $\deg f$ 就总是假定 $f(x)$不是零多项式.

定义 3　如果在多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中同次项系数均相等，那么 $f(x)$ 与 $g(x)$ 称为相等，记为 $f(x)=g(x)$.

两个数域 P 上的多项式的和、差、积仍然是数域 P 上的多项式，也即全体数域 P 上的多项式关于加、减、乘三种运算封闭；于是我们可以称全体数域 P 上的一元多项式为数域 P 上的一元多项式环，并把它记作 $P[x]$.

三、整除的概念

从现在开始，我们的讨论总是固定在某一数域 P 上的多项式环 $P[x]$ 中进行.

在一元多项式环中两个多项式 $f(x)$、$g(x)$ 可以做加、减、乘三种运算，然而乘法的逆运算——除法就不一定能够进行，因此整除就成了两个多项式之间一种特殊的关系. 多项式的除法，我们已经学过. 现在我们给出下述定理.

定理 1　对于 $P[x]$ 中的任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$，其中 $g(x)\neq 0$，一定存在 $P[x]$ 中的多项式 $g(x)$、$r(x)$，使

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x) \tag{2}$$

成立，其中 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$ 或者 $r(x)=0$，并且这样的 $g(x)$，$r(x)$ 是唯一的.

证明：$q(x)$、$r(x)$ 的存在性通过除法运算即可推出.

下面来证唯一性，设另有多项式 $q'(x)$、$r'(x)$ 使

$$f(x)=q'(x)g(x)+r'(x),$$

其中 $\partial(r'(x))<\partial(g(x))$ 或者 $r'(x)=0$. 于是

$$q(x)g(x)+r(x)=q'(x)g(x)+r'(x)$$

或　$$(q(x)-q'(x))g(x)=r'(x)-r(x) \tag{3}$$

因为 $g(x)\neq 0$，故若 $r'(x)=r(x)$ 则必有 $q(x)=q'(x)$，现设 $r'(x)\neq r(x)$，由(3)知 $q(x)\neq q'(x)$，但是 $\partial((q(x)$

$-q'(x))g(x))\geqslant\partial(g(x))>\partial(r(x)-r'(x))$，所以(3)式这时不可能成立．因此必有 $r'(x)=r(x)$，$q(x)=q'(x)$．唯一性证毕．

在带余除法的(2)式中，$q(x)$称为 $g(x)$除 $f(x)$的商．$r(x)$称为 $g(x)$除 $f(x)$的余式．当余式 $r(x)=0$ 时称为 $g(x)$整除 $f(x)$，记作 $g(x)|f(x)$；否则，若 $r(x)\neq 0$ 则记作 $g(x)\nmid f(x)$．若有 $g(x)|f(x)$则称为 $g(x)$为 $f(x)$的因式，$f(x)$则为 $g(x)$的倍式．

四、最大公因式

若多项式 $\varphi(x)|f(x)$且 $\varphi(x)|g(x)$则称 $\varphi(x)$为两多项式 $f(x)$与 $g(x)$的公因式．

定义 4　设 $f(x)$、$g(x)$为 $P[x]$中的两个多项式，$P[x]$中的多项式 $d(x)$称为 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式，如果它满足以下两个条件：

1．$d(x)$为 $f(x)$、$g(x)$的公因式．

2．$f(x)$、$g(x)$的任何一个公因式都是 $d(x)$的因式．

很明显，$f(x)$与零多项式的最大公因式即为 $f(x)$．那么 $P[x]$中的任何两个多项式是否一定存在最大公因式呢？回答是肯定的．我们先证明下述引理．

引理　如果多项式 $f(x)$，$g(x)$，$q(x)$，$r(x)$满足等式

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$

则 $f(x)$、$g(x)$与 $g(x)$、$r(x)$有相同公因式．

证明：若 $\varphi(x)|g(x)$且 $\varphi(x)|r(x)$，则易知 $\varphi(x)|f(x)$．这就是说，$g(x)$、$r(x)$的公因式全是 $f(x)$、$g(x)$的公因式．反之，若 $\varphi(x)|f(x)$，$\varphi(x)|g(x)$，则 $\varphi(x)$一定整除

$$r(x)=f(x)-q(x)g(x).$$

这就是说，$\varphi(x)$是 $g(x)$、$r(x)$的公因式，引理证毕.

由引理知，在满足引理的条件下，$g(x)$、$r(x)$如果有一个最大公因式 $d(x)$，那么 $d(x)$也就是 $f(x)$、$g(x)$的一个最大公因式. 下面我们给出最大公因式的存在性定理.

定理 2　对于 $P[x]$中的任意两个多项式 $f(x)$、$g(x)$，在 $P[x]$中存在一个最大公因式 $d(x)$，且 $d(x)$可以表成 $f(x)$、$g(x)$的一个组合，即有 $P[x]$中的多项式 $u(x)$，$v(x)$使有

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x) \tag{4}$$

证明：若 $g(x)=0$ 则 $f(x)$就是最大公因式，具有 $u(x)=1$ 使

$$f(x)=1\cdot f(x)+v(x)\cdot 0.$$

一般情况设 $g(x)\neq 0$,用辗转相除法可得到下列等式：

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$$

$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)$$

$$\cdots$$

$$r_{i-2}(x)=q_i(x)r_{i-1}(x)+r_i(x)$$

$$\cdots$$

$$r_{s-3}(x)=q_{s-1}(x)r_{s-2}(x)+r_{s-1}(x)$$

$$r_{s-2}(x)=q_s(x)r_{s-1}(x)+r_s(x)$$

$$r_{s-1}(x)=q_{s+1}(x)r_s(x)+r_{s+1}(x)$$

由带余除法知 $\partial(g(x))>\partial(r_1(x))>\partial(r_2(x))>\cdots$，因此在有限次除法以后，必然有 $r_{s+1}(x)=0$，利用引理，从 $r_s(x)$是 $r_s(x)$与 $r_{s+1}(x)$的最大公因式即可推出 $r_s(x)$即为 $f(x)$、$g(x)$的最大公因式.

由上面等式的倒数第二个可有

$$r_s(x)=r_{s-2}(x)-q_s(x)r_{s-1}(x)$$