文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计

FOCUS 聚焦图书
中国最值得信赖的考研品牌

2011版考研数学

高分 题型精讲精练

囊括了考研成功不可不知的105个题型及其定位训练

陈文灯 黄先开 编著

（经济类）

（附赠60元文登网校课程）

世界图书出版公司

聚焦考研

文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计

FOCUS 聚焦图书
中国最值得信赖的考研品牌

-55

2011版考研数学

图书在版编目(CIP)数据

考研数学高分题型精讲精练．经济类／陈文灯，黄先开编著．—13版．—北京：世界图书出版公司北京公司，2004.1(2010.2 修订)

ISBN 978-7-5062-5210-2

Ⅰ．数…　Ⅱ．①陈…　②黄…　Ⅲ．高等数学－研究生－入学考试－习题　Ⅳ．O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 014884 号

考研数学高分题型精讲精练(经济类)

(2011 版)

主　　编：陈文灯　黄先开
责任编辑：张中兴
装帧设计：余曙敏

出　　版：世界图书出版公司北京公司
发　　行：世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号　电话 88861708　邮编 100089)
销　　售：各地新华书店
印　　刷：三河市文昌印刷装订厂

开　　本：787×1092 毫米　1/16
印　　张：25.5
字　　数：442 千字
版　　次：2010 年 2 月第 13 版　2010 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-5210-2/O·335　　**定价**:38.80 元

服务热线：010—88861708

前　言

《考研数学高分题型精讲精练》旨在强化同学们对考研数学中知识点的理解和运用，将知识点与考试中考查的题型结合起来，系统地帮助同学们学习考研数学，锻炼同学们的实际解题能力。本书是作者多年评阅试卷和在考研辅导教学一线的经验之作，所讲例题及所选习题都是从多年教学中总结出来的具有代表性的试题，并且难易适中真正地讲透考研数学出题规律。希望同学们通过本书的学习和训练，能吃透考研数学题型规律，在考试中能举一反三，最终取得优异成绩。

本书特点以及使用建议：

题型归纳和精讲：

本书将考研数学所要求的知识点按题型进行归类。针对每种题型，详细地给出命题分析，抓住此类题型的出题规律，给出最适合的解题方法，同时通过若干道典型例题的精讲，帮助同学们理解具体的解题技巧，达到触类旁通的效果。我们在题型之后相应的增添了习题演练环节，以强化同学们的理解，锻炼同学们实际答题能力。建议同学们仔细体会“方法和规律”部分，在做题的过程中有意识地对解题方法和规律加以应用。

阶梯化训练题：

根据考研试题难度及考研数学命题的综合性，我们把习题分为基础能力题和综合提高题。选题的科学性加上适中的题量，有利于同学们在复习的过程中进行强化训练，逐步提高解题能力。建议同学们独立去解答这些习题，有意识地应用例题中学到的方法去解题，并且总结相应的解题规律，养成独立思考的习惯会让你在考研途中受益匪浅。尽量不要从一开始就依赖答案详解。

三套模拟试题加一套 2010 年考研真题

依据考研大纲的难度要求，我们为同学们精编了三套模拟试卷。每套试卷都给出了详细的分析、解答和评注，建议同学们严格按照考试要求完成试卷并及时查漏补缺，以达到模拟演练的目的。

另外，我们还为同学们提供了一套 2010 年真题，同学们做完后可以参照后面的真题详解自我检验复习效果。

本书在编写过程中得到了部分老师和同学的热情帮助，在此表示感谢。由于时间和能力所限，错误之处难免，如有不当和错误之处，恳请广大同学们、数学界同仁批评指正。

编者

目　　录

第1篇　微积分

第2篇 线性代数

第 3 篇　概率论与数理统计初步

第①篇　微积分

第1章　函数·极限·连续

命题特点：

函数部分一般和其他考点联合出题，如求函数的表达式；关于函数的性质出单项选择题的可能性较大；极限部分一般出填空题或与其他部分联合出题，函数的连续部分一般出单项选择题或计算题.

题型归纳与精讲

题型1　函数奇偶性的判别

方法和规律： 判别函数奇偶性的方法：

(1) 主要依据奇偶性的定义，有时也用其运算性质（奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数；偶函数之积为偶函数；偶数个奇函数之积为偶函数；一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数）

(2) $f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

(3) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，若函数的定义域关于原点不对称，则函数就无奇偶性可言.

典例精析 判别函数的奇偶性：

$G(x)=\int_0^x g^2(t)\mathrm{d}t$，其中 $g(x)$ 为连续的偶函数.

【分析】利用变量代换求出 $G(-x)$，然后比较 $G(x)$ 与 $G(-x)$ 的关系.

【解】$G(-x)=\int_0^{-x} g^2(t)\mathrm{d}t \xlongequal{令 t=-u} \int_0^x g^2(-u)(-\mathrm{d}u) \xlongequal[偶函数]{g(x)为} -\int_0^x g^2(u)\mathrm{d}u$，

因为 $G(x)+G(-x)=\int_0^x g^2(t)\mathrm{d}t-\int_0^x g^2(t)\mathrm{d}t=0$，

所以 $G(x)$ 为奇函数.

※ **题型演练1**　判别函数的奇偶性：

$F(x)=f(x)+\int_0^x\left[\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$，其中 $f(x)$ 是连续的奇函数.

题型2 函数有界性的判别

方法和规律：证明或判别函数有界性的思路：

(1) 利用有界性定义.

(2) 闭区间上连续函数的有界性.

(3) 有极限数列必有界.

(4) $x \to x_0$ 时有极限的函数 $f(x)$ 在 x_0 的充分小邻域中必有界.

典例精析 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$（$l$ 为有限数），试证：$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

【分析】本题运用闭区间上的连续函数必有界，即可得证.

【证】因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$，所以对于取 $\varepsilon=\dfrac{|l|}{2}$，$\exists X>a$，

当 $x>X$ 时，恒有 $|f(x)-l|<\dfrac{|l|}{2}$，

又 $|f(x)-l|\geqslant|f(x)|-|l|$，所以 $|f(x)|-|l|<\dfrac{|l|}{2}$，

即 $|f(x)|<\dfrac{3}{2}|l|$.

因为 $f(x)$ 在 $[a,X]$ 上连续，由闭区间上连续函数有界性，可知 $\exists S$，使 $\forall x\in[a,X]$，恒有 $|f(x)|<S$.

取 $M=\max\left\{S,\dfrac{3}{2}|l|\right\}$，则对 $\forall x\in[a,+\infty)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，

即 函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

※ **题型演练2** 试证 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

题型3 求复合函数表达式

方法和规律：将两个或两个以上函数进行复合，通常有三种方法：

(1) 代入法（适用于初等函数的复合）；

(2) 分析法（适用于初等函数与分段函数的复合，或两个分段函数的复合）；

(3) 图示法（适用于两个分段函数的复合）.

典例精析 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$，求 $f[f(x)]$，$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

【分析】本题为初等函数复合，可采用代入法.

【解】$f[f(x)]=\dfrac{1}{1-f^2(x)}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{(1-x^2)^2}}=\dfrac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)}$，

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{1}{1-\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)^2}=\frac{f^2(x)}{f^2(x)-1}=\frac{\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^2-1}=\frac{1}{x^2(2-x^2)}.$$

【评注】如果是初等函数与分段函数的复合，或两个分段函数的复合，可采用分析法；如果

是两个分段函数的复合,可采用图示法.

※ **题型演练3** 设 $f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f(x))\cdots)}_{n次}$,若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin[f_n(x)]$.

题型4 已知数列的前几项数值及通项的表达式,求数列的极限

方法和规律:利用"单调有界数列必有极限"求解(求解程序:① 判断极限的存在性 $\begin{cases}单调性\\有界性\end{cases}$,方法可用数学归纳法或不等式的放缩法;② 先令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,然后通过解关于 l 的方程,求得 l 的值,从而得极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$).或者利用数列极限的定义求解(先令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,然后在通项的两边取极限得出 l 的数值,再证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的存在性.此步通常是利用 $|x_n-l|$ 的逐步放大而得出其小于一个无穷小量).

典例精析 设 $x_1=2,x_2=2-\dfrac{1}{x_1},\cdots,x_{n+1}=2-\dfrac{1}{x_n}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【分析】 利用数列的单调有界性判断数列极限的存在性,然后通过解方程求出极限.

【解】 先证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的存在性:

$x_1=2>1$,若 $x_n>1$,则 $0<\dfrac{1}{x_n}<1$,从而 $x_{n+1}=2-\dfrac{1}{x_n}>1$,因此 $x_{n+1}>1$.

$x_2-x_1=-\dfrac{1}{x_1}=-\dfrac{1}{2}<0$,设 $x_n-x_{n-1}<0$,那么

$$x_{n+1}-x_n=2-\frac{1}{x_n}-2+\frac{1}{x_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{x_{n-1}\cdot x_n}<0,$$

因此 $x_{n+1}<x_n$,

即 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界,故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,在 $x_{n+1}=2-\dfrac{1}{x_n}$ 的两边取 $n\to\infty$ 时的极限得

$l=2-\dfrac{1}{l}$,即 $l^2-2l+1=0,l=1$,　　故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

【评注】 该类题目通常是先用数学归纳法证明数列极限的存在性.

※ **题型演练4** 设 $x_1=1,x_2=1+\dfrac{x_1}{1+x_1},\cdots,x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

题型5 求解 $n\to\infty$ 时,n 项和的极限

方法和规律:方法有:

(1) 特殊级数求和法.

(2) 利用幂级数求和法.

(3) 利用定积分定义求极限.

(4) 利用夹逼定理.

若数列的每一项可提出一个因子 $\dfrac{1}{n}$,剩余的可用一个通项表示,则用定积分定义求解数列

的极限；若数列的各项虽可提出一个因子$\frac{1}{n}$，而剩余的不能用一个通项表示，但其各项是按递增或递减排列的，则用夹逼定理求极限.

典例精析 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}$.

【分析】本题直接求解比较不便，利用夹逼定理转换函数形式，然后利用定积分的定义求解.

【解】 因为$\sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}=\frac{1}{n}\sqrt{(1+\frac{k}{n})(1+\frac{k+1}{n})}$.

所以$\frac{1}{n}(1+\frac{k}{n})<\sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}<\frac{1}{n}(1+\frac{k+1}{n})$，

于是 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}(1+\frac{k}{n})<\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}(1+\frac{k}{n})+\frac{1}{n}$，

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}(1+\frac{k}{n})+\frac{1}{n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}(1+\frac{k}{n})=\int_0^1(1+x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}=\frac{3}{2}$.

※ **题型演练5** 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

题型6 求 $n\to\infty$ 时，n 项乘积的极限

方法和规律：解法有：

(1) 分子，分母同乘以一个因子，使之出现连锁反应；

(2) 拆通项、分解因式使之成为两因子乘积形式，在整个相乘过程中中间项相消，从而化繁为简求极限形式；

(3) 利用夹逼定理；

(4) 利用对数恒等式化为 n 项和的形式.

典例精析 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}$.

【分析】本题利用夹逼定理即可求解.

【解】

$$\left.\begin{array}{l}\text{因为}1\cdot 3<2^2\\ \quad 3\cdot 5<4^2\\ \quad \cdots\cdots\\ \quad (2n-1)(2n+1)<(2n)^2\end{array}\right\}\begin{array}{l}\Rightarrow 1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n-1)^2(2n+1)<2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n)^2\\ \Rightarrow 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\sqrt{2n+1}<2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\\ \cdots\cdots\\ \Rightarrow 0<\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\end{array}$$

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$， 故 由夹逼定理，原极限 $=0$.

【评注】对于 n 项乘积的幂的极限运算，有时也可利用对数恒等式化为 n 项和的形式.

※ 题型演练 6　求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\dfrac{n^3-1}{n^3+1}$.

题型 7　通项为积分形式的数列的极限

方法和规律：一般地 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\neq\int_a^b[\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)]\mathrm{d}x$，求解 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 的方法：

(1) 利用不等式放缩法对 $I_n=\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 进行估值，再用夹逼定理求极限.

(2) 利用积分中值定理求极限.

典例精析 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.

【分析】 本题可利用放缩法对 $I_n=\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 进行估值.

【 解 】 因为在 $[0,1]$ 上，$x^n\geqslant 0$，且 $\dfrac{1}{1+x}$ 连续，

所以 $0\leqslant\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1+\xi}\cdot\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\dfrac{1}{1+\xi}\cdot\dfrac{1}{n+1}$,

其中 $0\leqslant\xi\leqslant 1$，故　$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\xi}\cdot\dfrac{1}{n+1}=0$.

【评注】 一般地 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\neq\int_a^b[\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)]\mathrm{d}x$.

※ 题型演练 7　求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$.

题型 8　求 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式的极限

方法和规律：求解 $\dfrac{0}{0}$ 型极限的方法：

(1) 通过因式分解或根式有理化消去零因子，然后用连续函数的性质求极限；

(2) 利用等价无穷小和泰勒公式求极限；

(3) 利用洛必达法则求极限（这是求 $\dfrac{0}{0}$ 型极限最有效的方法）；

(4) 利用变量替换（通常是令 $x=\dfrac{1}{t}$ 或 $x=\dfrac{1}{t^2}$）求极限.

典例精析 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\mathrm{e}^x-1}$.

【分析】 本题可利用等价无穷小量的代换求解.

【 解 】 将根式有理化，于是有

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x}{(\mathrm{e}^x-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}$$

$$\xlongequal[\text{代换}]{\text{由等价无穷小}}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}=1.$$

※ 题型演练 8　求极限：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

题型 9　求 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限

方法和规律： 求解 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限的方法：(1) 洛必达法则；(2) 变量替换.

典例精析 求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^{2x}e^{t^2}dt\right)^2}{\int_{3x}^{0}e^{2t^2}dt}$.

【分析】本题可利用洛必达法则求解.

【解】原极限 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\int_0^{2x}e^{t^2}dt\cdot2e^{4x^2}}{-3e^{18x^2}}=-\dfrac{4}{3}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^{2x}e^{t^2}dt}{e^{14x^2}}=-\dfrac{4}{3}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{4x^2}}{28xe^{14x^2}}$

$=-\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{14}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{xe^{10x^2}}=0.$

【评注】求 $x\to+\infty$ 时的极限，通常以"抓大头"的办法解决为好(所谓抓大头就是取分子、分母中趋向于 $+\infty$ 最快的项).

※ 题型演练 9　求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}dt}{x}$.

题型 10　求 $\infty-\infty$ 型未定式的极限

方法和规律： $\infty-\infty\xrightarrow[\text{或倒代换 }x=\frac{1}{t}]{\text{根式有理化或通分}}\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$，再用洛必达法则求解，或"抓大头"法求解.

典例精析 求极限：$\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2x)$.

【分析】本题可转化为 $\dfrac{0}{0}$ 型极限.

【解】原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cos^2x}{\sin^2x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sin x+x\cos x)}{x}\cdot\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}$

$=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{3x^2}=\dfrac{2}{3}.$

※ 题型演练 10　求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})\right]$.

题型 11　求 $0\cdot\infty$ 型未定式的极限

方法和规律：$0\cdot\infty\Rightarrow\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 再用法则求解.

设　$\lim f(x)=0,\lim g(x)=\infty$，则

$$\lim f(x)g(x)\quad(0\cdot\infty)=\lim\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\quad\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

注意：一般讲，对数函数和反三角函数一般不“下放”，因为下放后的导数比原来的复杂，违背数学运算的原则.

典例精析 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{\sin^2x}}$.

【分析】本题可通过等价无穷小量代换后，转成 $\frac{\infty}{\infty}$.

【 解 】原极限 $\xlongequal{x\sim\sin x}\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}$

$$\xlongequal{\frac{1}{x^2}=u}\lim_{u\to+\infty}\frac{e^u}{u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{e^u}{1}=+\infty.$$

※ 题型演练 11　求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{1+x}\right)$.

题型 12　求 $1^\infty,0^0,\infty^0$ 型未定式的极限

方法和规律：基本思路是通过对数恒等式将其化为 $0\cdot\infty\Rightarrow\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$，再用法则.

关于 1^∞ 型极限有两种求法：

(1) 利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$（适用于底为 $1\pm f(x)$ 或易化为 $1\pm f(x)$ 形式的幂指函数的极限. 其解法：设 $\lim f(x)=0,\lim g(x)=\infty$，则 $\lim[1\pm f(x)]^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim g(x)\ln[1\pm f(x)]}=\mathrm{e}^{\lim g(x)[\pm f(x)]}$.

用语言叙述为：括号中 1 后的变量（包括符号）与幂乘积的极限就是 1^∞ 这种未定式极限的幂，其底为 e.

(2) 利用对数恒等式 $\Rightarrow\mathrm{e}^{\infty\cdot\ln 1}=\mathrm{e}^{\infty\cdot 0}\Rightarrow\mathrm{e}^{(\frac{\infty}{\infty}\text{或}\frac{0}{0})}$.

设　$\lim f(x)=1,\lim g(x)=\infty$，则

$\lim[f(x)]^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim\ln[f(x)]^{g(x)}}=\mathrm{e}^{\lim g(x)\ln f(x)}$.

（适用于底为单因子的呈 1^∞ 型幂指函数的极限的求法.）

典例精析 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

【分析】本题是 $\frac{0}{0}$ 型极限，若直接用洛必达法则，可知所得结果比没用法则前还复杂，这违背了运算的原则. 因此只有变量替换法可用了.

【解】原极限 $\xlongequal{令 u=\frac{1}{x^2}} \lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u^{50}}{e^u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{50u^{49}}{e^u}=\cdots=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{50!}{e^u}=0.$

※ 题型演练 12　求极限：$\lim\limits_{x\to0^+}(\arctan x)^{\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}}$.

题型 13　无穷小量的比较

方法和规律：一般试题以两种形式出现：(1) 单项选择题；(2) 利用 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^n}$ 为有限数，确定 n（n 可为任何正数），确定 n 时，常用洛必达法则和等价无穷小代换两种方法.

典例精析 设 $g(x)=\int_0^1 e^{tx}dt-1$，$f(x)=\int_0^x\sin(t^2)dt$，则当 $x\to0$ 时，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的

(A) 同阶而非等价无穷小　　(B) 等价无穷小

(C) 高阶无穷小　　(D) 低阶无穷小

【分析】本题运用洛必达法则即可求解.

【解】$g(x)=\int_0^1 e^{tx}dt-1 \xlongequal{令 u=tx} \int_0^x e^u\dfrac{du}{x}-1=\dfrac{\int_0^x e^u du-x}{x}$

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x e^u du-x}{x\int_0^x\sin(t^2)dt}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{\int_0^x\sin(t^2)dt+x\sin(x^2)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{\sin(x^2)+\sin(x^2)+2x^2\cos(x^2)}=\infty.$$

故　$g(x)$ 是 $f(x)$ 低阶无穷小.

※ 题型演练 13　确定如下无穷小的阶 n：

(1) 当　$x\to0$ 时，$3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 与 x^n 为同阶无穷小，则 $n=$ ________；

(2) 当　$x\to1^+$ 时，$\sqrt{3x^2-2x-1}\cdot\ln x$ 与 $(x-1)^n$ 为同阶无穷小，则 $n=$ ________.

题型 14　极限式中常数值的确定

方法和规律：求极限式中的常数值，主要根据极限存在这一前提，利用等价无穷小，洛必达法则及如下公式：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & 当\ n=m,\\ 0, & 当\ n<m,\\ \infty, & 当\ n>m.\end{cases}$$

有时也用到根式有理化，函数连续的充要条件.