



文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计



中国最值得信赖的考研品牌

2011版考研数学

高分 | 题型精讲精练

囊括了考研成功不可不知的105个题型及其定位训练

陈文灯 黄先开 编著

(经济类)

(附赠60元文登网校课程)

世界图书出版公司



文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计



中国最值得信赖的考研品牌

2011版考研数学



图书在版编目(CIP)数据

考研数学高分题型精讲精练. 经济类 / 陈文灯, 黄先开编著. —13版. —北京: 世界图书出版公司北京公司, 2004. 1(2010. 2 修订)

ISBN 978-7-5062-5210-2

I. 数... II. ①陈... ②黄... III. 高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 习题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002) 第 014884 号

考研数学高分题型精讲精练(经济类) (2011 版)

主 编: 陈文灯 黄先开

责任编辑: 张中兴

装帧设计: 余曙敏

出 版: 世界图书出版公司北京公司

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街 137 号 电话 88861708 邮编 100089)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 三河市文昌印刷装订厂

开 本: 787×1092 毫米 1/16

印 张: 25.5

字 数: 442 千字

版 次: 2010 年 2 月第 13 版 2010 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-5210-2/O · 335

定价: 38.80 元

服务热线: 010 - 88861708

前 言

《考研数学高分题型精讲精练》旨在强化同学们对考研数学中知识点的理解和运用,将知识点与考试中考查的题型结合起来,系统地帮助同学们学习考研数学,锻炼同学们的实际解题能力。本书是作者多年评阅试卷和在考研辅导教学一线的经验之作,所讲例题及所选习题都是从多年教学中总结出来的具有代表性的试题,并且难易适中真正地讲透考研数学出题规律。希望同学们通过本书的学习和训练,能吃透考研数学题型规律,在考试中能举一反三,最终取得优异成绩。

本书特点以及使用建议:

题型归纳和精讲:

本书将考研数学所要求的知识点按题型进行归类。针对每种题型,详细地给出命题分析,抓住此类题型的出题规律,给出最适合的解题方法,同时通过若干道典型例题的精讲,帮助同学们理解具体的解题技巧,达到触类旁通的效果。我们在题型之后相应的增添了习题演练环节,以强化同学们的理解,锻炼同学们实际答题能力。建议同学们仔细体会“方法和规律”部分,在做题的过程中有意识地对解题方法和规律加以应用。

阶梯化训练题:

根据考研试题难度及考研数学命题的综合性,我们把习题分为基础能力题和综合提高题。选题的科学性加上适中的题量,有利于同学们在复习的过程中进行强化训练,逐步提高解题能力。建议同学们独立去解答这些习题,有意识地应用例题中学到的方法去解题,并且总结相应的解题规律,养成独立思考的习惯会让你在考研途中受益匪浅。尽量不要从一开始就依赖答案详解。

三套模拟试题加一套 2010 年考研真题

依据考研大纲的难度要求,我们为同学们精编了三套模拟试卷。每套试卷都给出了详细的分析、解答和评注,建议同学们严格按照考试要求完成试卷并及时查漏补缺,以达到模拟演练的目的。

另外,我们还为同学们提供了一套 2010 年真题,同学们做完后可以参照后面的真题详解自我检验复习效果。

本书在编写过程中得到了部分老师和同学的热情帮助,在此表示感谢。由于时间和能力所限,错误之处难免,如有不当和错误之处,恳请广大同学们、数学界同仁批评指正。

编者

目 录

第1篇 微积分

第1章 函数·极限·连续 1

题型归纳与精讲 1

题型1 函数奇偶性的判别 1

题型2 函数有界性的判别 2

题型3 求复合函数表达式 2

题型4 已知数列的前几项数值及通项的表达式,
求数列的极限 3

题型5 求解 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项和的极限 3

题型6 求 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项乘积的极限 4

题型7 通项为积分形式的数列的极限 5

题型8 求 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限 5

题型9 求 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限 6

题型10 求 $\infty - \infty$ 型未定式的极限 6

题型11 求 $0 \cdot \infty$ 型未定式的极限 7

题型12 求 $1^\infty, 0^0, \infty^0$ 型未定式的极限 7

题型13 无穷小量的比较 8

题型14 极限式中常数值的确定 8

题型15 函数连续性的讨论(重点) 9

题型16 确定函数的间断点及其类型 9

题型17 分段函数式中参数的确定(重点)
..... 10

阶梯化训练题 11

基础能力题 11

综合提高题 14

参考答案 16

题型演练答案 16

基础能力题答案 19

综合提高题答案 24

第2章 导数与微分 31

题型归纳与精讲 31

题型1 求函数在某点处的导数 31

题型2 求函数方程 31

题型3 求复合函数的导数 32

题型4 隐函数求微分 33

题型5 分段函数求导 33

题型6 高阶导数的计算 35

阶梯化训练题 35

基础能力题 35

综合提高题 39

参考答案 40

题型演练答案 40

基础能力题答案 42

综合提高题答案 46

第3章 不定积分 52

题型归纳与精讲 52

题型1 分式有理函数的积分 52

题型2 简单无理函数的积分 52

题型3 三角有理式的积分 53

阶梯化训练题 54

基础能力题 54

综合提高题 54

参考答案 55

题型演练答案 55

基础能力题答案 56

综合提高题答案 57

第4章 定积分 62

题型归纳与精讲 62

题型1 含变上限积分的题型求解 62

题型2 含有绝对值符号的定积分的计算 63

题型3 含奇偶函数与周期函数的定积分计算
..... 63

题型4 含三角有理式的定积分计算 64

题型5 分母为两项,而分子为分母中其中一项的
积分 64

题型 6 含定积分等式的证明	65
题型 7 定积分不等式的证明	66
题型 8 反常积分的计算	68
阶梯化训练题	70
基础能力题	70
综合提高题	71
参考答案	74
题型演练答案	74
基础能力题答案	76
综合提高题答案	79
第 5 章 中值定理	87
题型归纳与精讲	87
题型 1 结论为 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的命题的证明	87
题型 2 含 $f^{(n)}(\xi)$ 等式的证明	88
题型 3 区间 (a,b) 内 $\exists \xi, \eta$ 满足某种关系式的命题的证明	89
阶梯化训练题	90
基础能力题	90
综合提高题	90
参考答案	91
题型演练答案	91
基础能力题答案	92
综合提高题答案	94
第 6 章 一元微积分的应用	98
题型归纳与精讲	98
题型 1 函数不等式的证明	98
题型 2 求函数的极值与最值	99
题型 3 关于方程根的讨论	99
题型 4 函数图形在区间 I 上凹凸性的判别	101
题型 5 渐近线的计算	101
题型 6 求平面图形的面积	102
题型 7 求立体体积	103
阶梯化训练题	104
基础能力题	104
综合提高题	104
参考答案	106
题型演练答案	106

基础能力题答案	108
综合提高题答案	110
第 7 章 多元函数微分学	117
题型归纳与精讲	117
题型 1 求抽象的复合函数的偏导数	117
题型 2 多元微分学的有关证明题	118
题型 3 多元函数的极值	118
阶梯化训练题	119
基础能力题	119
综合提高题	120
参考答案	121
题型演练答案	121
基础能力题答案	121
综合提高题答案	123
第 8 章 二重积分	127
题型归纳与精讲	127
题型 1 更换积分次序	127
题型 2 积分域为圆环或扇域的二重积分	127
题型 3 分段函数的二重积分	128
题型 4 二重积分不等式的证明	129
阶梯化训练题	130
基础能力题	130
综合提高题	132
参考答案	133
题型演练答案	133
基础能力题答案	134
综合提高题答案	137
第 9 章 无穷级数	140
题型归纳与精讲	140
题型 1 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \geq 0)$ 的判敛	140
题型 2 任意项级数收敛性的判断	141
题型 3 有关数项级数的命题的证明	142
题型 4 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 求收敛域, 幂级数求收敛域, 收敛半径 R	143
题型 5 求函数幂级数展开式	144
题型 6 级数求和	145
阶梯化训练题	146

基础能力题	146
综合提高题	148
参考答案	149
题型演练答案	149
基础能力题答案	150
综合提高题答案	152

第10章 常微分方程与差分方程

.....	156
题型归纳与精讲	156
题型1 一阶微分方程求解	156
题型2 可降阶的高阶微分方程的求解	157
题型3 二阶常系数线性微分方程的求解	158
.....	158
题型4 差分方程求解	160
阶梯化训练题	160
基础能力题	160
综合提高题	161
参考答案	162
题型演练答案	162
基础能力题答案	163
综合提高题答案	164

第2篇 线性代数

第1章 行列式

.....	169
题型归纳与精讲	170
题型1 确定用行列式表示的多项式 $f(x)$ 中 x 的最高次数及 x 的各次幂的系数	170
.....	170
题型2 3~5 阶行列式的计算	170
题型3 证明抽象行列式等于零	172
题型4 n 阶行列式的计算	172
阶梯化训练题	173
基础能力题	173
综合提高题	174
参考答案	176
题型演练答案	176
基础能力题答案	177
综合提高题答案	178

第2章 矩阵

.....	183
题型归纳与精讲	183
题型1 关于矩阵的基本性质及初等变换的命题	183
.....	184
题型2 有关 $\alpha^T \alpha$, 与 $\alpha \alpha^T$ 命题的求解与论证	184
.....	185
题型3 求 n 阶方阵 A 的 k 次幂 A^k	185
题型4 求满秩矩阵的逆矩阵	186
题型5 求解矩阵方程	187
题型6 关于矩阵 A 存在逆矩阵的证明	188
题型7 与方阵 A 的伴随矩阵 A^* 有关的命题的计算与证明	188
题型8 矩阵秩的求法及有关矩阵秩的等式与不等式的证明	189
阶梯化训练题	190
基础能力题	190
综合提高题	192
参考答案	193
题型演练答案	193
基础能力题答案	196
综合提高题答案	198

第3章 向量

.....	204
题型归纳与精讲	204
题型1 有关向量的概念及其性质的命题	204
.....	205
题型2 有关线性表出判别的命题	205
题型3 向量线性相关性的证明	206
题型4 向量组的极大线性无关组及向量组秩的相关命题	207
题型5 有关正交矩阵命题的证明	208
阶梯化训练题	209
基础能力题	209
综合提高题	210
参考答案	212
题型演练答案	212
基础能力题答案	214
综合提高题答案	217

第4章 线性方程组

.....	226
题型归纳与精讲	226

题型 1 含有参数的线性方程组解的讨论	226
题型 2 有关基础解系的命题证明	227
题型 3 涉及两个方程组解之间关系的命题的讨论	228
阶梯化训练题	229
基础能力题	229
综合提高题	230
参考答案	232
题型演练答案	232
基础能力题答案	234
综合提高题答案	236
第 5 章 矩阵的特征值与特征向量	243
题型归纳与精讲	244
题型 1 特征值的计算与相关证明	244
题型 2 矩阵 $(kE - A)$ 是否可逆的证明	245
题型 3 矩阵相似的证明	246
题型 4 已知 $P^{-1}AP = \Lambda$ 中两者求第三者	247
阶梯化训练题	248
基础能力题	248
综合提高题	249
参考答案	252
题型演练答案	252
基础能力题答案	253
综合提高题答案	257
第 6 章 二次型	266
题型归纳与精讲	267
题型 1 有关二次型概念及性质的命题	267
题型 2 将二次型化为标准形	268
题型 3 二次型与其标准形中参数的确定及正交变换	269
题型 4 有关正定矩阵命题的证明	270
阶梯化训练题	271
基础能力题	271
综合提高题	271
参考答案	272
题型演练答案	272

基础能力题答案	274
综合提高题答案	276

第 3 篇 概率论与数理统计初步

第 1 章 事件的概率

题型归纳与精讲

题型 1 利用条件概率与乘法公式概率计算	280
----------------------------	-----

题型 2 利用全概公式和逆概公式(贝叶斯公式)计算概率	281
-----------------------------------	-----

阶梯化训练题

基础能力题	282
综合提高题	283

参考答案

题型演练答案	284
基础能力题答案	285
综合提高题答案	287

第 2 章 随机变量及其分布

题型归纳与精讲

题型 1 求一维随机变量的分布函数及分布密度	290
------------------------------	-----

题型 2 求二维随机变量 (X, Y) 的分布函数及其密度	291
---------------------------------------	-----

题型 3 求一维随机变量函数 $Y = g(X)$ 分布律(分布密度)	293
---	-----

题型 4 求二维随机变量 (X, Y) 函数 $g(X, Y)$ 的分布律(分布密度)	294
---	-----

阶梯化训练题

基础能力题	295
综合提高题	298

参考答案

题型演练答案	300
基础能力题答案	301
综合提高题答案	304

第 3 章 随机变量的数字特征

题型归纳与精讲

题型 1 求一维随机变量的数字特征	311
题型 2 求一维随机变量函数的数字特征	311

.....	312
题型 3 求二维随机变量的数字特征	313
题型 4 求二维随机变量 (X, Y) 函数 $Z=g(X, Y)$ 的数字特征	315
题型 5 求多维随机变量的数字特征	316
阶梯化训练题	317
基础能力题	317
综合提高题	319
参考答案	320
题型演练答案	320
基础能力题答案	322
综合提高题答案	324
第 4 章 大数定律和中心极限定理	330
题型归纳与精讲	330
题型 1 估算随机事件的概率	330
题型 2 试验次数 n 的确定	331
阶梯化训练题	333
基础能力题	333
综合提高题	333
参考答案	334
题型演练答案	334
基础能力题答案	335

综合提高题答案	335
第 5 章 数理统计初步	338
题型归纳与精讲	338
题型 1 样本容量 n , 样本均值 $\bar{X}$ 及样本方差 S^2 的数字特征和概率的计算	338
题型 2 求抽样分布	340
题型 3 统计量的点估计	340
阶梯化训练题	341
基础能力题	341
综合提高题	342
参考答案	343
题型演练答案	343
基础能力题答案	343
综合提高题答案	345

第 4 篇 模拟演练及 2010 年真题详解

数学三 模拟试卷(一)及参考答案	347
数学三 模拟试卷(二)及参考答案	360
数学三 模拟试卷(三)及参考答案	372
附录:2010 年考研数学(三)试题及参考答案	383

第 1 篇 微积分

第 1 章 函数 · 极限 · 连续

命题特点:

函数部分一般和其他考点联合出题,如求函数的表达式;关于函数的性质出单项选择题的可能性较大;极限部分一般出填空题或与其他部分联合出题,函数的连续部分一般出单项选择题或计算题.

题型归纳与精讲

题型 1 函数奇偶性的判别

方法和规律: 判别函数奇偶性的方法:

(1) 主要依据奇偶性的定义,有时也用其运算性质(奇函数的代数和仍为奇函数;偶函数的代数和仍为偶函数;偶函数之积为偶函数;偶数个奇函数之积为偶函数;一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数)

(2) $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

(3) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,若函数的定义域关于原点不对称,则函数就无奇偶性可言.

典例精析

判别函数的奇偶性:

$$G(x) = \int_0^x g^2(t) dt, \text{ 其中 } g(x) \text{ 为连续的偶函数.}$$

【分析】 利用变量代换求出 $G(-x)$, 然后比较 $G(x)$ 与 $G(-x)$ 的关系.

$$\text{【解】 } G(-x) = \int_0^{-x} g^2(t) dt \xrightarrow{\text{令 } t = -u} \int_0^x g^2(-u) (-du) \xrightarrow{\substack{g(x) \text{ 为} \\ \text{偶函数}}} \int_0^x g^2(u) du,$$

$$\text{因为 } G(x) + G(-x) = \int_0^x g^2(t) dt - \int_0^x g^2(t) dt = 0,$$

所以 $G(x)$ 为奇函数.

※ 题型演练 1 判别函数的奇偶性:

$$F(x) = f(x) + \int_0^x \left[\int_0^u f(t) dt \right] du, \text{ 其中 } f(x) \text{ 是连续的奇函数.}$$

题型2 函数有界性的判别

方法和规律: 证明或判别函数有界性的思路:

- (1) 利用有界性定义.
- (2) 闭区间上连续函数的有界性.
- (3) 有极限数列必有界.
- (4) $x \rightarrow x_0$ 时有极限的函数 $f(x)$ 在 x_0 的充分小邻域中必有界.

典例精析 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (l 为有限数), 试证: $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

【分析】 本题运用闭区间上的连续函数必有界, 即可得证.

【证】 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, 所以对于取 $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$, $\exists X > a$,

当 $x > X$ 时, 恒有 $|f(x) - l| < \frac{|l|}{2}$,

又 $|f(x) - l| \geq |f(x)| - |l|$, 所以 $|f(x)| - |l| < \frac{|l|}{2}$,

即 $|f(x)| < \frac{3}{2}|l|$.

因为 $f(x)$ 在 $[a, X]$ 上连续, 由闭区间上连续函数有界性, 可知 $\exists S$, 使 $\forall x \in [a, X]$, 恒有 $|f(x)| < S$.

取 $M = \max\left\{S, \frac{3}{2}|l|\right\}$, 则对 $\forall x \in [a, +\infty)$, 恒有 $|f(x)| \leq M$,

即 函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

※ 题型演练2 试证 $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x te^t dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

题型3 求复合函数表达式

方法和规律: 将两个或两个以上函数进行复合, 通常有三种方法:

- (1) 代入法(适用于初等函数的复合);
- (2) 分析法(适用于初等函数与分段函数的复合, 或两个分段函数的复合);
- (3) 图示法(适用于两个分段函数的复合).

典例精析 设 $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, 求 $f[f(x)]$, $f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$.

【分析】 本题为初等函数复合, 可采用代入法.

【解】 $f[f(x)] = \frac{1}{1-f^2(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{(1-x^2)^2}} = \frac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)}$,

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right] = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2} = \frac{f^2(x)}{f^2(x)-1} = \frac{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2-1} = \frac{1}{x^2(2-x^2)}.$$

【评注】 如果是初等函数与分段函数的复合, 或两个分段函数的复合, 可采用分析法; 如果

是两个分段函数的复合,可采用图示法.

※ 题型演练 3 设 $f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n \text{次}}$, 若 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin[f_n(x)]$.

题型 4 已知数列的前几项数值及通项的表达式,求数列的极限

方法和规律: 利用“单调有界数列必有极限”求解(求解程序:①判断极限的存在性
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{单调性} \\ \text{有界性} \end{array} \right.$, 方法可用数学归纳法或不等式的放缩法;②先令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 然后通过解关于 l 的方程, 求得 l 的值, 从而得极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$). 或者利用数列极限的定义求解(先令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 然后在通项的两边取极限得出 l 的数值, 再证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的存在性. 此步通常是利用 $|x_n - l|$ 的逐步放大而得出其小于一个无穷小量).

典例精析 设 $x_1 = 2, x_2 = 2 - \frac{1}{x_1}, \cdots, x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【分析】 利用数列的单调有界性判断数列极限的存在性, 然后通过解方程求出极限.

【解】 先证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的存在性:

$x_1 = 2 > 1$, 若 $x_n > 1$, 则 $0 < \frac{1}{x_n} < 1$, 从而 $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n} > 1$, 因此 $x_{n+1} > 1$.

$x_2 - x_1 = -\frac{1}{x_1} = -\frac{1}{2} < 0$, 设 $x_n - x_{n-1} < 0$, 那么

$$x_{n+1} - x_n = 2 - \frac{1}{x_n} - 2 + \frac{1}{x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} \cdot x_n} < 0,$$

因此 $x_{n+1} < x_n$,

即 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 在 $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$ 的两边取 $n \rightarrow \infty$ 时的极限得

$$l = 2 - \frac{1}{l}, \text{ 即 } l^2 - 2l + 1 = 0, l = 1, \quad \text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

【评注】 该类题目通常是先用数学归纳法证明数列极限的存在性.

※ 题型演练 4 设 $x_1 = 1, x_2 = 1 + \frac{x_1}{1+x_1}, \cdots, x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

题型 5 求解 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项和的极限

方法和规律: 方法有:

- (1) 特殊级数求和法.
- (2) 利用幂级数求和法.
- (3) 利用定积分定义求极限.
- (4) 利用夹逼定理.

若数列的每一项可提出一个因子 $\frac{1}{n}$, 剩余的可用一个通项表示, 则用定积分定义求解数列

的极限;若数列的各项虽可提出一个因子 $\frac{1}{n}$,而剩余的不能用一个通项表示,但其各项是按递增或递减排列的,则用夹逼定理求极限.

典例精析 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}$.

【分析】 本题直接求解比较不便,利用夹逼定理转换函数形式,然后利用定积分的定义求解.

【解】 因为 $\sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}} = \frac{1}{n} \sqrt{(1+\frac{k}{n})(1+\frac{k+1}{n})}$.

$$\text{所以 } \frac{1}{n}(1+\frac{k}{n}) < \sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}} < \frac{1}{n}(1+\frac{k+1}{n}),$$

$$\text{于是 } \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}(1+\frac{k}{n}) < \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}(1+\frac{k+1}{n}),$$

$$\text{又因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{n}(1+\frac{k}{n}) + \frac{1}{n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}(1+\frac{k}{n}) = \int_0^1 (1+x) dx = \frac{3}{2},$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}} = \frac{3}{2}.$$

※ 题型演练 5 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$.

题型 6 求 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项乘积的极限

方法和规律: 解法有:

- (1) 分子,分母同乘以一个因子,使之出现连锁反应;
- (2) 拆通项、分解因式使之成为两因子乘积形式,在整个相乘过程中中间项相消,从而化繁为简求极限形式;
- (3) 利用夹逼定理;
- (4) 利用对数恒等式化为 n 项和的形式.

典例精析 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$.

【分析】 本题利用夹逼定理即可求解.

【解】

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & \text{因为 } 1 \cdot 3 < 2^2 \\ & 3 \cdot 5 < 4^2 \\ & \cdots \cdots \cdots \\ & (2n-1)(2n+1) < (2n)^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \Rightarrow 1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-1)^2 (2n+1) < 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n)^2 \\ & \Rightarrow 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \sqrt{2n+1} < 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n \\ & \cdots \cdots \cdots \\ & \Rightarrow 0 < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\text{又因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0, \quad \text{故 由夹逼定理, 原极限} = 0.$$

【评注】 对于 n 项乘积的幂的极限运算,有时也可利用对数恒等式化为 n 项和的形式.

※ 题型演练 6 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdots \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$.

题型 7 通项为积分形式的数列的极限

方法和规律: 一般地 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \neq \int_a^b [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx$, 求解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$ 的方法:

(1) 利用不等式放缩法对 $I_n = \int_a^b f_n(x) dx$ 进行估值, 再用夹逼定理求极限.

(2) 利用积分中值定理求极限.

典例精析 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

【分析】本题可利用放缩法对 $I_n = \int_a^b f_n(x) dx$ 进行估值.

【解】因为在 $[0, 1]$ 上, $x^n \geq 0$, 且 $\frac{1}{1+x}$ 连续,

$$\text{所以 } 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{1}{1+\xi} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{1}{n+1},$$

$$\text{其中 } 0 \leq \xi \leq 1, \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{1}{n+1} = 0.$$

【评注】一般地 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \neq \int_a^b [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx$.

※ 题型演练 7 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

题型 8 求 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限

方法和规律: 求解 $\frac{0}{0}$ 型极限的方法:

(1) 通过因式分解或根式有理化消去零因子, 然后用连续函数的性质求极限;

(2) 利用等价无穷小和泰勒公式求极限;

(3) 利用洛必达法则求极限(这是求 $\frac{0}{0}$ 型极限最有效的方法);

(4) 利用变量替换(通常是令 $x = \frac{1}{t}$ 或 $x = \frac{1}{t^2}$) 求极限.

典例精析 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{e^x - 1}$.

【分析】本题可利用等价无穷小量的代换求解.

【解】将根式有理化, 于是有

$$\begin{aligned} \text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x}{(e^x - 1)(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\tan x})} \\ &\stackrel{\text{由等价无穷小}}{\underset{\text{代换}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\tan x})} = 1. \end{aligned}$$

※ 题型演练 8 求极限: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \cdots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

题型 9 求 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限

方法和规律: 求解 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限的方法: (1) 洛必达法则; (2) 变量替换.

典例精析

求极限: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\int_0^{2x} e^{t^2} dt)^2}{\int_{3x}^0 e^{2t^2} dt}$.

【分析】本题可利用洛必达法则求解.

$$\begin{aligned} \text{【解】原极限} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \int_0^{2x} e^{t^2} dt \cdot 2e^{4x^2}}{-3e^{18x^2}} = -\frac{4}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{2x} e^{t^2} dt}{e^{14x^2}} = -\frac{4}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{4x^2}}{28xe^{14x^2}} \\ &= -\frac{4}{3} \times \frac{1}{14} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^{10x^2}} = 0. \end{aligned}$$

【评注】求 $x \rightarrow +\infty$ 时的极限, 通常以“抓大头”的办法解决为好(所谓抓大头就是取分子、分母中趋向于 $+\infty$ 最快的项).

※ 题型演练 9 求极限: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (1+t^2)e^{t^2-x^2} dt}{x}$.

题型 10 求 $\infty - \infty$ 型未定式的极限

方法和规律: $\infty - \infty$ $\xrightarrow{\text{根式有理化或通分}}$ $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$, 再用洛必达法则求解, 或“抓大头”法求解.
或倒代换 $x = \frac{1}{t}$

典例精析

求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \cot^2 x)$.

【分析】本题可转化为 $\frac{0}{0}$ 型极限.

$$\begin{aligned} \text{【解】原极限} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x + x \cos x)}{x} \cdot \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{3x^2} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

※ 题型演练 10 求极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$.

题型 11 求 $0 \cdot \infty$ 型未定式的极限

方法和规律: $0 \cdot \infty \Rightarrow \frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 再用法则求解.

设 $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = \infty$, 则

$$\lim f(x)g(x) \quad (0 \cdot \infty) = \lim \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

注意:一般讲,对数函数和反三角函数一般不“下放”,因为下放后的导数比原来的复杂,违背数学运算的原则.

典例精析 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

【分析】本题可通过等价无穷小量代换后,转成 $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\begin{aligned} \text{【解】原极限} & \stackrel{x \sim \sin x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} \\ & \stackrel{\frac{1}{x^2} = u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{1} = +\infty. \end{aligned}$$

※ 题型演练 11 求极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{1+x} \right)$.

题型 12 求 $1^\infty, 0^0, \infty^0$ 型未定式的极限

方法和规律:基本思路是通过恒等式将其化为 $0 \cdot \infty \Rightarrow \frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$,再用法则.

关于 1^∞ 型极限有两种求法:

(1) 利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 或 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$ (适用于底为 $1 \pm f(x)$ 或易化为 $1 \pm f(x)$ 形式的幂指函数的极限.其解法:设 $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = \infty$, 则 $\lim [1 \pm f(x)]^{g(x)} = e^{\lim g(x) \ln [1 \pm f(x)]} = e^{\lim g(x) [\pm f(x)]}$.

用语言叙述为:括号中1后的变量(包括符号)与幂乘积的极限就是 1^∞ 这种未定式极限的幂,其底为 e .

(2) 利用对数恒等式 $\Rightarrow e^{\infty \cdot \ln 1} = e^{\infty \cdot 0} \Rightarrow e^{(\frac{\infty}{\infty} \text{ 或 } \frac{0}{0})}$.

设 $\lim f(x) = 1, \lim g(x) = \infty$, 则

$$\lim [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim \ln [f(x)]^{g(x)}} = e^{\lim g(x) \ln f(x)}.$$

(适用于底为单因子的呈 1^∞ 型幂指函数的极限的求法.)

典例精析 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

【分析】本题是 $\frac{0}{0}$ 型极限,若直接用洛必达法则,可知所得结果比没用法则前还复杂,这违背了运算的原则.因此只有变量替换法可用了.

【解】原极限 $\xrightarrow{\text{令 } u = \frac{1}{x^2}} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^{50}}{e^u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{50u^{49}}{e^u} = \cdots = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{50!}{e^u} = 0.$

※ 题型演练 12 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\arctan x)^{\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}}.$

题型 13 无穷小量的比较

方法和规律: 一般试题以两种形式出现: (1) 单项选择题; (2) 利用 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n}$ 为有限数, 确定 n (n 可为任何正数), 确定 n 时, 常用洛必达法则和等价无穷小代换两种方法.

典例精析

设 $g(x) = \int_0^1 e^{tx} dt - 1$, $f(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x)$ 是 $f(x)$ 的

- (A) 同阶而非等价无穷小 (B) 等价无穷小
(C) 高阶无穷小 (D) 低阶无穷小

【分析】本题运用洛必达法则即可求解.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } g(x) &= \int_0^1 e^{tx} dt - 1 \xrightarrow{\text{令 } u = tx} \int_0^x e^u \frac{du}{x} - 1 = \frac{\int_0^x e^u du - x}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^u du - x}{x \int_0^x \sin(t^2) dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x \int_0^x \sin(t^2) dt + x \sin(x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\sin(x^2) + \sin(x^2) + 2x^2 \cos(x^2)} = \infty. \end{aligned}$$

故 $g(x)$ 是 $f(x)$ 低阶无穷小.

※ 题型演练 13 确定如下无穷小的阶 n :

- (1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $3x - 4\sin x + \sin x \cos x$ 与 x^n 为同阶无穷小, 则 $n =$ _____;
(2) 当 $x \rightarrow 1^+$ 时, $\sqrt{3x^2 - 2x - 1} \cdot \ln x$ 与 $(x-1)^n$ 为同阶无穷小, 则 $n =$ _____.

题型 14 极限式中常数值确定

方法和规律: 求极限式中的常数值, 主要根据极限存在这一前提, 利用等价无穷小, 洛必达法则及如下公式:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n = m, \\ 0, & \text{当 } n < m, \\ \infty, & \text{当 } n > m. \end{cases}$$

有时也用到根式有理化, 函数连续的充要条件.