S H I B I A N H A N S H U L U N

面向21世纪普通高等教育规划教材

实变函数论

徐新亚 编著

[redacted]

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

面向21世纪普通高等教育规划教

实变函数论

徐新亚 编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是作者在多年从事实变函数教学实践所积累的大量实际教学经验的基础上编写而成的.全书对实变函数中的主要概念和定理作了细致的解释和比较直观的描述,叙述深入浅出,易学好懂.内容包括集合、点集、可测集合、可测函数、Lebesgue 积分、微分与不定积分和函数空间.在有关定理的证明时,尽可能地对其证题思路进行分析和引导,从而极大地降低了理解难度.在例题的选取方面,注意到了难度上的阶梯配置,由浅入深,循序渐进.另外每一章末还配备了一定数量的习题,为学生课后的学习巩固提供了有益的帮助.

本书可用作普通高等院校数学类本专科学生的教材或考研复习参考书,也可用作理工科有关专业的研究生教材,还可供有关教师及研究人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

实变函数论/徐新亚编著.--上海:同济大学出版社,2010.3

面向21世纪普通高等教育规划教材

ISBN 978-7-5608-4246-2

Ⅰ.①实… Ⅱ.①徐… Ⅲ.①实变函数—高等学校—教材 Ⅳ.①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 012136 号

面向21世纪普通高等教育规划教材

实变函数论

徐新亚　编著

责任编辑　曹　建　　责任校对　杨江淮　　封面设计　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　　www.tongjipress.com.cn

(地址:上海市四平路1239号　邮编:200092　电话:021-65985622)

经　　销　全国各地新华书店

印　　刷　同济大学印刷厂

开　　本　787 mm×960 mm　1/16

印　　张　14

印　　数　1—3 100

字　　数　280 000

版　　次　2010年3月第1版　2010年3月第1次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5608-4246-2

定　　价　32.00 元

前　言

众所周知，作为现代数学标志之一的微积分产生于17世纪，经过几代数学家的不懈探索，到了18世纪末19世纪初，微积分学已经基本上成熟，与微积分有关的许多分支随之产生，很快就形成了现代数学中的一大部门，这就是数学分析. 但是，几乎在数学分析逐渐成熟的过程中，数学家们也逐渐发现了分析基础本身还存在着许多问题. 比如，对于什么是函数这个看上去简单却十分重要的问题，在很长一段时间内，数学界都没有形成一致的见解. 再如，对于什么是函数的连续性和连续函数的性质是什么，也曾经争论了很久.

19世纪初，曾经有人试图证明连续函数除个别点外总是可微的. 后来，德国数学家维尔斯特拉斯提出了一个由级数定义的函数，这个函数是连续函数，但是维尔斯特拉斯证明了这个函数在任何点上都没有导数. 这个证明使许多数学家大为吃惊. 此后，人们又陆续发现了一些处处不可微的连续函数，还有一些函数的有限导数并不黎曼可积，还发现了不分段单调的连续函数，等等. 这就促使数学家思考：我们所处理的函数，仅仅依靠直观经验和猜测是不行的，必须深入研究函数的各种性质. 比如，连续函数必定可积，但是具有什么性质的不连续函数也可积呢？如果改变积分的定义，可积分的条件又是什么样的？连续函数不一定可导，那么，可导的充分必要条件又是什么？对上面这些函数性质问题的研究，逐渐形成了一门新的学科，这就是实变函数.

以实数作为自变量的函数就叫做实变函数，以实变函数作为研究对象的数学分支就叫做实变函数论，也叫做实分析. 它是微积分学的进一步发展，它的主要内容包括以下几项内容：

点集理论. 专门研究由点所成集合的性质的理论. 可以说，实变函数论是建立在点集基础上的研究数学分析中的一些最基本概念和性质的力量（或者说工具）. 比如，点集函数、序列、极限、连续性、可微性、积分等都是很好的研究工具. 实变函数论还要研究实变函数的分类问题和结构问题.

测度论. 简单地说，一条线段的长度就是它的测度. 具有测度的集合被称为可测集. 测度和可测集的概念对于实变函数论来说十分重要. 集合的测度这个概念是由法国数学家勒贝格首先提出来的.

可测函数. 它是比连续函数更为广泛的一类函数，是实变函数所研究的对象. 从这个意义上讲，实变函数比数学分析研究的函数要广泛得多.

勒贝格积分. 这是一种与我们所熟悉的积分——黎曼积分完全不同的积分. 以

一元积分为例，勒贝格积分定义的基础是将一个可测集分成若干个两两不相交的可测子集之并，而黎曼积分则是将一个区间分成若干个小区间之并.

微分理论.在一元黎曼积分情形，当被积函数连续时，其“变上限积分”具有可导性，将这个性质加以推广，就形成了勒贝格积分定义下的微分理论.

因此，实变函数是数学分析的继续和深入，是数学分析的后继数学分支.由于实变函数理论严密，应用广泛，国内高等院校的数学专业都将实变函数列为专业必修课程.但是，本门课程涉及的许多概念比较抽象，对初学者而言，理解起来有一定的难度，学生普遍感觉不易掌握.在高等院校招生规模扩大的背景下，这个矛盾显得尤其突出，我们迫切需要一部比较实用、易教好学的实变函数教材.

笔者长期从事实变函数教学，积累了一定的教学经验和体会，对国内这方面的各种教材也比较了解，本教材就是在此基础上编写而成的，其主要特点如下：①注重实变函数与数学分析的联系及区别，让学生随时将所学内容与自己所熟悉的数学分析相关内容加以比较，从而降低了接受的难度，便于理解和掌握.②适当增加例题，在例题的选取上注意梯度的递进，由浅入深，由易到难.为了便于学生掌握，我们突破了同类教材的一些习惯，对有些例题，先给出分析过程和解题思路，再对例题本身详细解答.③在内容的编写方面，尽可能通俗易懂.时间早已步入21世纪，五六十年前流行的一些语言习惯，已不能为今天的大学生所接受，需要我们与时俱进地采用时代语言习惯讲述教材内容.④适度介绍一些相关知识的历史背景和趣闻佚事，增强了教材的可读性.⑤在每一章结束时，选取了适量的习题，供学生课后复习巩固之用，其中有些习题是近年来有关高校数学专业硕士研究生入学考试的试题.⑥我们将教材中的有些内容列为选学内容，主要是考虑到知识体系的完整性，不同的院校使用时，可视教学进度情况决定取舍.

本教材可作为高等院校数学系本专科学生的教材或考研复习参考书，也可用作理工科有关专业的研究生教材，还可供有关教师及研究人员参考.

由于笔者水平有限，书中难免存在疏漏和不足之处，恳请各位专家、同行和读者指正，以便在今后的教学中加以改正.

徐新亚

2010年2月

目　　录

1　可数集合与不可数集合

在科学技术高速发展的 21 世纪，集合思想已经渗透到数学的所有分支，它是信息社会不可或缺的元素之一. 实变函数就是建立在集合论基础之上的一门数学学科. 在本章中，我们主要讨论集合与映射、可数集合与不可数集合等内容.

1.1　集合及其运算

1.1.1　集合与元素

集合简称集，是数学中最原始的基本概念之一，它不能用其他更为简单的概念来定义. 为了理解集合这个重要概念，我们通常采用描述性的语言：**集合**是具有某种共同性质的对象的全体，并将集合中的每一个“对象”称为该集合的一个**元素**. 例如，可以将一个班级看作是由这个班所有同学组成的集合，而其中每一个同学则可以看作是该集合的一个元素. 我们通常用大写的英文字母 A, B, C, … 表示集合，用小写的英文字母 a, b, c, … 表示一个集合中的元素. 当 x 是集合 A 的元素时，记为 $x \in A$（读作“x 属于 A”）；当 x 不是集合 A 的元素时，记为 $x \overline{\in} A$ 或 $x \notin A$（读作“x 不属于 A”）. 当一个集合的元素都是数时，我们称该集合为数集. 例如，全体正整数构成了正整数集 **N**，还有有理数集 **Q**、实数集 **R**、复数集 **C** 以及正偶数集、负实数集、区间 $[a, b]$，等等. 在本课程中，我们所讨论的集合都是数集.

表示一个集合元素构成的方法通常有以下三种：

(1) **列举法**——将该集合的元素一个一个列举出来. 例如

$$A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\},$$

$$N = \{1, 2, 3, \cdots\}.$$

(2) **描述法**——将该集合中的元素所具备的特征描述出来. 例如

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\},$$

$$Q = \{p/q \mid p, q \text{ 都是整数，且 } p, q \text{ 互质}, q > 0\}.$$

(3) **图示法**——用欧氏空间（通常是平面）中的一个图形来表示一个集合，这种图形被称为维恩（Venn）图或文氏图. 例如，图 1-1 就是用 Venn 图表示集合的例子.

集合的三种表示方法各有所长，互相补充.

不包含任何元素的集合被称为**空集**，记为$\varnothing$. 例如，二维平面中的集合

$$\{(x,\ y) \mid x^2 + y^2 = -1\}$$

就是一个空集.

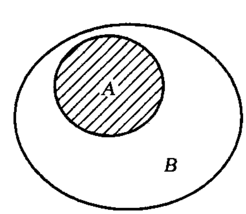


图 1-1

1.1.2 集合的包含与相等

设 A, B 为两个集合，如果对任意的 $x \in A$，都有 $x \in B$，则称集合 A 是 B 的**子集**，记为 $A \subset B$（读作 A 含于 B 或 B 包含 A）. 如图 1-1 所示. 若 $A \subset B$，且 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的**真子集**. 我们约定，空集是任何集合的子集，即对任意的集合 A，都有 $\varnothing \subset A$；如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A 与 B **相等**，记为 $A = B$（读作 A 等于 B）.

显然，$A \subset B$ 的等价叙述为：对任意的 $x \notin B$，都有 $x \notin A$.

集合的包含关系具有下述性质：

定理 1 集合的“$\subset$”关系满足：

(1) 对任何集合 A，都有 $A \subset A$；

(2) 若 $A \subset B$, $B \subset A$，则 $A = B$；

(3) 若 $A \subset B$, $B \subset C$，则 $A \subset C$.

对于集合概念，我们需要明确有关符号的含义，例如，“$\in$”与“$\subset$”的区别：“$\in$”只能用来表示元素与集合的隶属关系，这是一种“上下级”的关系；而“$\subset$”则表示集合之间的“大小”关系，这是同级关系. 例如，“$x \in A$”不能写成“$x \subset A$”，但写成 $\{x\} \subset A$ 是正确的，因为“x”代表一个元素，而“$\{x\}$”代表仅含一个元素“x”的集合（称为单元素集）. 同样，“$\varnothing$”与“$\{\varnothing\}$”的含义也完全不同. “$\varnothing$”表示一个空集合，“$\{\varnothing\}$”则表示只含空集“$\varnothing$”这个唯一元素的单元素集合，它是比集合更高一级的集合，称为二级集合. 相应地，普通集合被称为一级集合. 换言之，二级集合是以一级集合作为元素的集合. 同理，以二级集合作为元素的集合称为三级集合，以三级集合作为元素的集合称为四级集合，……，以 $n-1$ 级集合作为元素的集合称为 n 级集合. 习惯上，我们通常所说的集合都是指**一级集合**，而把二级集合及二级以上的集合统称**高级集合**，通常称为**集族**或**集类**.

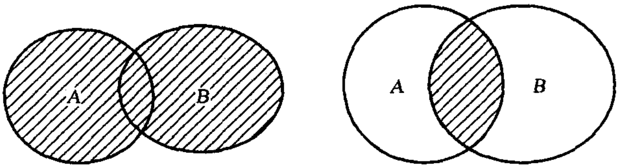
1.1.3 集合的运算

1. 集合的并

设 A, B 为两个集合，我们将这两个集合的所有元素放到一起组成的新集合称为 A 与 B 的**并集**或**和集**，简称**并**或**和**，记为 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

如图 1-2(a)所示. 集合的并运算也被称为集合的加法运算.



(a) $A \cup B$　　(b) $A \cap B$

图 1-2

例如, $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$, 则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$.

一般地, 设 Λ 是一个集合(称为**指标集**), 对于每一个 $\lambda \in \Lambda$, 都确定了一个集合 A_λ. 这样, 我们就得到了一个集族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. 以 Λ 为指标集的一族集合的并集定义为

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \mid \text{存在 } \lambda \in \Lambda, \text{使 } x \in A_\lambda\}.$$

例如, $\Lambda = \{1, 2, 3, \cdots n\}$, 有 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \text{存在某个 } 1 \leqslant i \leqslant n, \text{使 } x \in A_i\}$. 再设 $\Lambda = \{1, 2, 3, \cdots\}$, 有 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \text{存在某个正整数 } n, \text{使 } x \in A_n\}$.

例 1　设 $A_n = \{x \mid n-1 \leqslant x < n\}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = (-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$.

例 2　设 $A_\alpha = \{x \mid \alpha - 1 \leqslant x < \alpha\}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, 则 $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathbf{R}} A_\alpha = \mathbf{R}$.

例 3　设 $A_n = \left\{x \,\middle|\, \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}\right\} = \left[\dfrac{1}{n}, 2 - \dfrac{1}{n}\right]$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, 则

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left[\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right], \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 2).$$

2. 集合的交

设 A, B 为两个集合, 我们将这两个集合的所有相同的元素组成的新集合称为 A 与 B 的**交集**, 也称**交**或**积**, 记为 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

如图 1-2(b)所示. 集合的交运算也被称为集合的乘法运算.

例如, $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$, 则 $A \cap B = \{2, 3, 5, 7\}$.

以 Λ 为指标集的一族集合的并集定义为

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x \mid 对所有的 \lambda \in \Lambda, 都有 x \in A_\lambda\}.$$

当 $A \cap B = \varnothing$ 即 A 与 B 没有共同元素时，我们称 A 与 B 不相交. 对于集族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$，若对任意的 $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda(\lambda_1 \neq \lambda_2)$，都有 $A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2} = \varnothing$，则称集族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 为**两两不相交或互不相交**.

例 4 设 $A_n = \{x \mid n-1 \leqslant x < n\}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$.

例 5 设 $A_\alpha = \{x \mid \alpha - 1 \leqslant x < \alpha\}$, $\alpha \in \mathbf{R}$，则 $\bigcap_{\alpha\in\mathbf{R}} A_\alpha = \varnothing$.

例 6 设 $A_n = \left\{x \,\middle|\, \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 2 - \frac{1}{n}\right\} = \left[\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right]$, $n = 1, 2, 3, \cdots$，则 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{1\}$.

例 7 设 $A_n = \left(\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right)$, $n = 2, 3, \cdots$，则 $\bigcap_{n=2}^{\infty} A_n = \bigcap_{i=2}^{n} A_i = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

例 8 设 $A_n = \left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{n} < x < 2 + \frac{1}{n}\right\} = \left(-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, 3, \cdots$，则

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left(-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right), \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [0, 2].$$

从上述例子不难看出，无限多个开区间的交有可能不再是开区间，无限多个闭区间的交有可能不再是闭区间.

集合的并与交具有下列性质：

定理 2 (1) 交换律 $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(3) 分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$$A \cap \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A \cap B_\lambda),\ A \cup \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A \cup B_\lambda).$$

定理 3 (1) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;

(2) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$;

(3) 若对任意的 $\lambda \in \Lambda$，都有 $A_\lambda \subset B_\lambda$，则 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$.

以上定理均可利用集合相等的定义加以证明，这里从略.

3. 集合的差与余

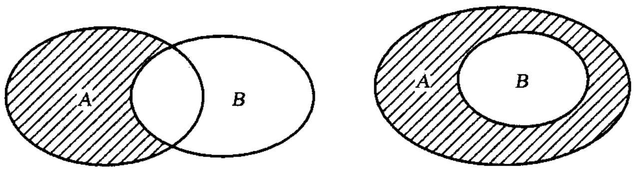
设 A, B 为两个集合，我们将所有属于 A 但不属于 B 的元素组成的新集合称为 A 与 B 的**差集**，或集合 A 与 B 的差，记为 $A - B$，即

$$A - B = \{x \mid x \in A 且 x \notin B\}.$$

如图 1-3(a)所示. A 与 B 的差集运算也叫做集合的减法运算，这里并不要求 $B\subset A$. 当要求 $B\subset A$ 时，A 与 B 的差集被称为集合 B 关于集合 A 的**余集**，记为 B_A^C，即

$$B_A^C = \{x \mid x \in A,\ x \notin B,\ B \subset A\}.$$

如图 1-3(b)所示. 当不会引起误解时，我们常将 B_A^C 简记为 B^C.



(a) $A-B$　　(b) B_A^C

图 1-3

例 9　设 $A=\{1,2,3,5,7,9\}$，$B=\{2,3,6,8\}$，则 $A-B=\{1,5,7,9\}$.

例 10　设 A 是实数集，B 是有理数集，则 B_A^C 是无理数集.

余集运算具有下述性质(其中，A，B，A_α 都是集合 S 的子集)：

定理 4　(1) $S_S^C=\varnothing$，$S_\varnothing^C=S$；

(2) $A\cup A_S^C=S$，$A\cap A_S^C=\varnothing$；

(3) $(A_S^C)_S^C=A$；

(4) $A-B=A\cap B_S^C$；

(5) 若 $A\subset B$；则 $A_S^C\supset B_S^C$；

(6) **(棣·摩根(De Morgan)公式)**

$$(A\cup B)_S^C=A_S^C\cap B_S^C,\ (A\cap B)_S^C=A_S^C\cup B_S^C,$$

$$\Big(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\Big)_S^C=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha)_S^C,\ \Big(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\Big)_S^C=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha)_S^C.$$

证明　(1) 显然，(2) ~ (5) 易证，因此，我们仅证(6) 中的 $\Big(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\Big)_S^C=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha)_S^C$，至于 $\Big(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\Big)_S^C=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha)_S^C$ 的证明，则完全类似.

设 $x\in\Big(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\Big)_S^C$，则 $x\in S$，且 $x\notin\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$，因此，对任意的 $\alpha\in\Lambda$，都有 $x\notin A_\alpha$，即对任意的 $\alpha\in\Lambda$，都有 $x\in(A_\alpha)_S^C$，即 $x\in\bigcap_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha)_S^C$. 所以，$\Big(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\Big)_S^C\subset\bigcap_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha)_S^C$. 再设 $x\in\bigcap_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha)_S^C$，即对任意的 $\alpha\in\Lambda$，都有 $x\in(A_\alpha)_S^C$，于是，对任意的 $\alpha\in\Lambda$，都有 $x\in S$，且 $x\notin A_\alpha$，故 $x\notin\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$，从而 $x\in\Big(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\Big)_S^C$. 故 $\bigcap_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha)_S^C\subset\Big(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\Big)_S^C$.

由集合相等的定义知，$\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\right)_S^C=\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha)_S^C$ 成立. 证毕.

4. 幂集

设 A 是一个集合，由 A 的所有子集构成的集合称为 A 的**幂集**，记为 2^A. 即

$$2^A=\{X\mid X\subset A\}.$$

幂集是比集合高一级的集合（即通常所说的集族或集类）.

例 11 设 $A=\{1,2,3\}$，则

$$2^A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}.$$

很容易证明：若 A 是 n 元集，则 A 的幂集就是 2^n 元集，这正是我们把 A 的幂集记为 2^A 的缘故.

5. 集合的极限

设 $\{A_n\}$：$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是一个集列，我们把属于其中无限多个集合的元素的全体构成的集合称为这个集列的**上限集**或**上极限**；把属于其中几乎所有集合（即除有限个集合外的一切集合）的元素的全体构成的集合称为这个集列的**下限集**或**下极限**. 集列 $\{A_n\}$ 的上限集记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 或 $\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$；集列 $\{A_n\}$ 的下限集记为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 或 $\liminf\limits_{n\to\infty}A_n$. 按照定义，集列 $\{A_n\}$ 的上限集和下限集可以如下叙述：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{x\mid \text{存在无穷多个正整数}\, n\text{，使}\, x\in A_n\};$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{x\mid \text{当正整数}\, n\, \text{充分大以后，都有}\, x\in A_n\}.$$

由于“几乎所有”一定是“无穷多”，因此，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$. 当 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 时，我们称集列 $\{A_n\}$ 收敛，并称其上限集（也是下限集）为集列 $\{A_n\}$ 的**极限集**，简称**极限**，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

例 12 设 $\{A_n\}$ 的定义如下：

$$A_{2m-1}=\left[0,\ 2-\frac{1}{2m-1}\right],\quad A_{2m}=\left[0,\ 1+\frac{1}{2m}\right],\quad m=1,2,\cdots.$$

试求集列 $\{A_n\}$ 的上极限与下极限.

分析 我们注意到集列 $\{A_n\}$ 的特征：$A_{2m-1}\subset A_{2m+1}$，$A_{2m+2}\supset A_{2m}$，$m=1, 2, \cdots$. 即它的奇子列随着正整数 n 的增大而增大，偶子列随着 n 的增大而减少，因此，当一个元素属于某一个 A_{2m-1} 时，这个元素一定属于 A_{2m-1} 后的一切 $\{A_n\}$ 的奇数项. 同理，当一个元素不属于某一个 A_{2m} 时，这个元素一定不属于 A_{2m} 后的一切 $\{A_n\}$ 的偶数项. 这说明，只要有一个 A_{2m-1} 含有 x，则 $x\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$；只要有一个 A_{2m} 不含 x，则 $x\notin\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

解 显然，$[0, 2) \supset A_n$，$n = 1, 2, \cdots$. 既然 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 由 $\{A_n\}$ 中无穷多个集合的公共元素构成，故 $[0, 2) \supset \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$. 注意到 $\lim\limits_{m\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{2m-1}\right)=2$，设 $x \in [0, 2)$，因 $x < \lim\limits_{m\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{2m-1}\right)$，由极限的保号性知，当 m 充分大时，恒有 $x < 2-\dfrac{1}{2m-1}$，即存在正整数 M，对一切的 $m > M$，都有 $x < 2-\dfrac{1}{2m-1}$，即

$$x \in A_{2m-1}, \quad m = M+1, M+2, \cdots.$$

由上限集的定义知 $x \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$. 再由 $x \in [0, 2)$ 的任意性，得 $[0, 2) \subset \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$. 综上所述，根据集合相等的定义，得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = [0, 2)$.

现在讨论下极限. 显然，$[0, 1] \subset A_n$，$n = 1, 2, \cdots$. 既然 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 由 $\{A_n\}$ 中几乎所有集合的公共元素构成，故 $[0, 1] \subset \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$. 注意到 $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2m}\right)=1$，设 $x > 1$，因 $x > \lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2m}\right)$，由极限的保号性知，当 m 充分大时，恒有 $x > 1+\dfrac{1}{2m}$，即存在正整数 M，对一切的 $m > M$，都有 $x > 1+\dfrac{1}{2m}$，即

$$x \notin A_{2m}, \quad m = M+1, M+2, \cdots$$

由下限集的定义知 $x \notin \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$. 这表明 $[0, 1] \supset \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$，从而 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = [0, 1]$.

定理 5 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty} A_m$.

证明 设 $x \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$，则存在无穷多个正整数 n，使 $x \in A_n$，即对于任意的正整数 n，存在正整数 $m > n$，使 $x \in A_m$. 故对于任意的正整数 n，$x \in \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$，有 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$. 这就证明了 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$. 反之，设 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$，则对任意的正整数 n，$x \in \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$，即对于任意的正整数 n，存在正整数 $m > n$，使 $x \in A_m$. 故由上限集定义，有 $x \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$. 这就证明了 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m \subset \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$. 所以，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$.

同理可证 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty} A_m$. 证毕.

例 13 设 $A_n = \left[\dfrac{1}{n}, 3+(-1)^n\right]$，$n = 1, 2, \cdots$. 试求集列 $\{A_n\}$ 的上极限与下极限.

解 用与例 12 相同的讨论方法可得：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = (0,\ 4],\quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = (0,\ 2].$$

例 14　设 $A_n = \left[0,\ 1+\dfrac{1}{n}\right]$，$n = 1, 2, \cdots$. 求集列 $\{A_n\}$ 的上极限与下极限.

解　与上面两例同理可得：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = [0,\ 1]$. 因此，本例中的集列 $\{A_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = [0,\ 1]$.

例 15　设 $\{A_n\}$ 的定义如下：

$$\left.\begin{aligned} A_{2m-1} &= \left\{(x,\ y)\,\middle|\, 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2m-1},\ 0 \leqslant y \leqslant 2m-1\right\}, \\ A_{2m} &= \left\{(x,\ y)\,\middle|\, 0 \leqslant x \leqslant 2m,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2m}\right\}, \end{aligned}\right. \quad m = 1, 2, \cdots.$$

试求集列 $\{A_n\}$ 的上极限与下极限.

解　$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \{(x,\ 0) \mid x \geqslant 0\} \cup \{(0,\ y) \mid y \geqslant 0\}$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \{(0,\ 0)\}$.

以上的例 12、例 13、例 14 的解法与例 15 相同，故解题过程从简.

若集列 $\{A_n\}$ 满足 $A_n \supset A_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，则称 $\{A_n\}$ 为单调减少集列；若集列 $\{A_n\}$ 满足 $A_n \subset A_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，则称 $\{A_n\}$ 为单调增加集列. 单调减少集列与单调增加集列统称单调集列.

定理 6　单调集列是收敛集列.

证明　由于 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$，所以我们只需证明 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \subset \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 即可. 若 $\{A_n\}$ 为单调增加集列，设 $x \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$，则存在无穷多个正整数 n，使 $x \in A_n$，即对一切的正整数 n，存在正整数 $m > n$，使 $x \in A_m$. 因 $A_m \subset A_{m+1} \subset A_{m+2} \subset \cdots$，有 $x \in A_{m+k}$，$k = 1, 2, \cdots$. 因此，至多除 $A_1, A_2, \cdots, A_{m-1}$ 外，x 是其余所有 A_n 的公共元素，即 $x \in \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$，故 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \subset \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$. 所以 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$.

若 $\{A_n\}$ 为单调减少集列，设 $x \notin \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$，则存在无穷多个正整数 n，使 $x \notin A_n$，即对一切的正整数 n，存在正整数 $m > n$，使 $x \notin A_m$. 因 $A_m \supset A_{m+1} \supset A_{m+2} \supset \cdots$，有 $x \notin A_{m+k}$，$k = 1, 2, \cdots$. 因此，至多除 $A_1, A_2, \cdots, A_{m-1}$ 外，x 不是其余所有 A_n 的元素，即 $x \notin \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$，故 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \subset \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$. 所以，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$.

所以，单调集列是收敛集列. 证毕.

6. 集合的特征函数

设 X 是一个固定的非空集合，$A \subset X$，令

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

函数 $\varphi_A(x)$ 称为集合 A 的**特征函数**.

显然,子集 A 完全由它的特征函数所确定,即 $A=B$,当且仅当 $\varphi_A(x)=\varphi_B(x)$.

定理 7 设 X 是一个固定的非空集合,A, B, $A_\alpha(\alpha\in\Lambda)$, $A_n(n=1, 2, \cdots)$ 都是 X 的子集,则有

(1) $A=X\Longleftrightarrow\varphi_A(x)\equiv 1$, $\quad A=\varnothing\Longleftrightarrow\varphi_A(x)\equiv 0$;

(2) $A\subset B\Longleftrightarrow\varphi_A(x)\leqslant\varphi_B(x)$, $A=B\Longleftrightarrow\varphi_A(x)=\varphi_B(x)$;

(3) $\varphi_{\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha}(x)=\max\limits_{\alpha\in\Lambda}\varphi_{A_\alpha}(x)$, $\quad\varphi_{\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha}(x)=\min\limits_{\alpha\in\Lambda}\varphi_{A_\alpha}(x)$;

(4) $\varphi_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n}(x)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\varphi_{A_n}(x)$, $\quad\varphi_{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n}(x)=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\varphi_{A_n}(x)$;

(5) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在的充分必要条件为 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_{A_n}(x)$ 存在,且当极限存在时,有

$$\varphi_{\lim\limits_{n\to\infty}A_n}(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_{A_n}(x).$$

证明 按特征函数的定义验证即可,这里从略.

7. 集合的乘积

设 A, B 是两个集合,称集合

$$\{(x, y)\mid x\in A, y\in B\}$$

为集合 A 与 B 的**乘积**,也称**叉积**或**笛卡儿**(Descartes)**积**,记为 $A\times B$. n 个集合 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 的乘积定义为

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mid x_i\in A_i, i=1, 2, \cdots, n\},$$

$A\times A\times\cdots\times A$ 简记为 A^n.

例如,二维平面 $R^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$,立体空间 $R^3=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 等.

集合 $A\times B$ 的一个子集 R 称为 $A\times B$ 上的一个**二元关系**,$A\times A$ 上的一个二元关系简称为集合 A 上的一个二元关系. 对 $A\times B$ 上的一个二元关系 R,若 $x\in A$, $y\in B$,且 $(x, y)\in R$,则称 x, y 具有关系 R,记为 xRy.

例如,A 表示某高校学生的集合,B 表示该校图书馆藏书的集合. 若学生 x 读过图书 y,记为 xRy,这个 R 就是 $A\times B$ 上的一个二元关系.

设 R 是集合 A 上的一个二元关系,若 R 满足下列三个条件:

(1) 自反性 对任何集合 $x\in A$,都有 xRx;

(2) 对称性 若 xRy,则 yRx;

(3) 传递性 若 xRy, yRz,则 xRz,

则称 R 是集合 A 上的一个等价关系.

例如,集合的相等"$=$"是一个等价关系,但集合的包含关系"$\subset$"就不是一个等价关系,因为它不满足对称性.

1.2 集合的对等与基数

当一个集合中的元素为有限个时，我们称之为有限元集或有限集，空集可以看作一个有限集. 不是有限集的集合被称为无限集. 对任意两个非空的有限集，我们习惯上总是要区分它们的大小：当集合 A 的元素个数比集合 B 的元素个数多时，我们认为集合 A 比集合 B 大；当集合 A 的元素个数与集合 B 的元素个数一样多时，我们认为集合 A 与集合 B 一样大. 这种思想在无穷集合的情形无法应用，因为当两个无穷集合 A 和 B 的元素个数都是无穷多时，我们根本不能简单区分究竟是 A 的"无穷多"大，还是 B 的"无穷多"大，当然也不能一概认为 A 和 B 一样大. 例如，集合 A 表示闭区间 $[0, 1]$ 中的一切实数，集合 B 表示闭区间 $[0, 1]$ 中的一切无理数，由于 $B \subset A$，当然可以认为 A 的元素个数比 B 的多，但这两个集合的元素的个数可都是"无穷多"啊. 或许有人会认为这好办，只要两个无穷集合中的一个是另一个的子集，就可以断言子集的元素个数少. 这自然是对的. 可是如果两个无穷集合之间根本不存在包含关系，例如，集合 A 表示全体实数，集合 B 表示闭区间 $[0, 1]$ 上的一切连续函数，这两个集合中，应该是谁大？因此，简单通过比较两个集合所含元素的多少或是否有包含关系来确定它们大小的做法在无穷集合的情形是完全行不通的. 这说明，若想比较两个无穷集之间的大小，必须另外寻找可靠的途径.

我们还是从日常生活经验入手，例如，我们想知道一个舞厅里某天晚上来跳舞的人中究竟是男的多还是女的多，聪明的做法当然是在舞曲响起时看一下坐在沙发里没去跳舞的是男的少还是女的少就行了. 这里我们用到了对等的思想，即当两个集合之间存在着一种一对一的关系时，我们就认为这两个的元素个数是一样的，否则就认为是不一样的. 下面我们对此进行详细讨论.

若 A 是一个非空的有限集，则 A 的元素就可以编号. 例如，$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$n$ 是 A 中元素的个数. 这样，集合 A 的每一个元素都确定了唯一的序号，即 A 中任一元素都有序号，且不同的元素有不同的序号. 正像我们的一个班级中的每一个同学都有唯一的学号一样. 这个实例说明，一个有 n 个元素的集合 A 一定可以和正整数中的前 n 个数构成的 n 元集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 实现元素之间的一种一一对应的关系，或者说集合 A 与集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 具有对等关系. 显然，两个有限集之间具有对等关系的充分必要条件是它们有相同个数的元素. 我们本节的任务就是在无穷集合中建立这种对等的思想.

定义 1 设 A，B 是两个非空集合，φ 是 A，B 间的一个对应关系，如果对每一个 $x \in A$，通过对应关系 φ，都可确定唯一的元素 $y \in B$；反之，对每一个 $y \in B$，通过对应关系 φ，也可确定唯一的元素 $x \in A$，我们称 φ 是 A，B 间的一个一一对应关系，并称集合 A 与 B **对等**. 记为 $A \overset{\varphi}{\sim} B$ 或 $A \sim B$. 此时也称集合 A 与 B 有相同的基