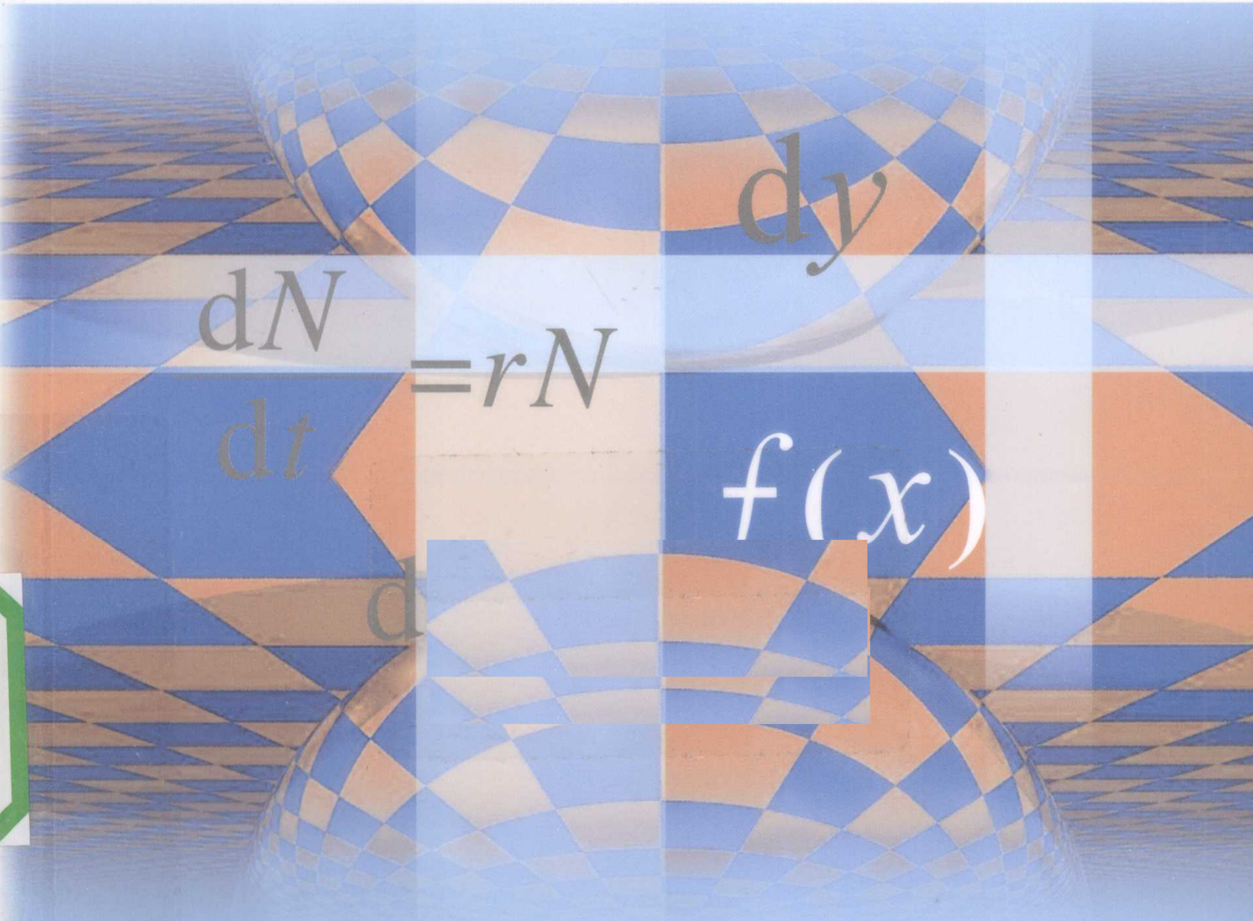
21世纪高等学校经济数学教材

常微分方程

◆ 张晓梅　张振宇　迟东璇　主编

◆ 陈启宏　主审



復旦大學出版社

21世纪高等学校经济数学教材

常微分方程

主编 张晓梅 张振宇 迟东璇
主审 陈启宏

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/张晓梅,张振宇,迟东璇主编.—上海:复旦大学出版社,2010.8
21 世纪高等学校经济数学教材
ISBN 978-7-309-07444-4

Ⅰ.常… Ⅱ.①张…②张…③迟… Ⅲ.常微分方程-高等学校-教材
Ⅳ.0175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 136550 号

常微分方程
张晓梅 张振宇 迟东璇 主编
出品人/贺圣遂 责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
上海崇明南海印刷厂

开本 787×960 1/16 印张 15.75 字数 268 千
2010 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-07444-4/O·454
定价:28.00 元

内 容 提 要

本书是“21世纪高等学校经济数学教材”丛书之一. 全书共8章,内容分别为:绪论、初等积分法、一阶常微分方程解的存在唯一性、高阶微分方程、一阶线性微分方程组、稳定性理论简介、一阶线性偏微分方程和差分方程. 书末附有习题参考答案及提示. 全书详细介绍了常微分方程的基本理论和常用解法,理论严谨,叙述深入浅出;注重思想方法的阐述、概念实质的揭示和近代数学观念的渗透;强调微分方程的实际应用(几乎每章都有应用实例),尤其是在社会、经济、生态领域中的应用,体现了财经类专业的教育特色.

本书可作为高等院校数学与应用数学、信息与计算科学、数量经济、金融工程等专业本科生的教学用书,也可供经济类各专业的教师与研究生参考.

21世纪高等学校经济数学教材
编　委　会

（以姓氏笔画为序）

前言

常微分方程是高等院校数学类专业的一门应用性较强的基础课，对训练学生的逻辑思维能力、计算推导能力、分析与解决实际问题的能力有着极其重要的作用.

本书是“21世纪高等学校经济数学教材”丛书之一．全书共分8章，依次介绍了常微分方程的基本概念、初等积分法、解的存在唯一性定理、线性微分方程与方程组的一般理论和求解方法、微分方程的稳定性理论、一阶线性偏微分方程及差分方程等内容.

本书的主要特点为：

(1) 注重思想方法的梳理．在阐述各种微分方程(组)的解法时，遵循研究的意义、求解的方法和实际的应用这种分析思路，强调基本方法的科学性、系统性．力求结构完整、叙述清晰、深入浅出.

(2) 注重微分方程的实际应用，体现财经类专业的教育特色．选用了很多微分方程在经济、社会、生态、金融领域中的应用实例，目的是对学生加强应用意识的培养，提高学生提出、解决实际问题的能力.

(3) 注重基本理论的拓展．在第三章中，在原有经典证明方法的基础上，又介绍了利用不动点原理证明一阶方程初值问题解的存在唯一性的方法，并讨论了边值问题解的存在唯一性条件．通过拓展这些理论，希望对学生开阔思路有所帮助.

(4) 注重例题、习题的多样性．本书的例题、习题可分3类．第一类是帮助读者理解基本概念、验证基本理论、掌握基本方法的基本题；第二类是要求读者在深入理解各种方程(组)的求解方法和基本理论的基础上，灵活运用所学知识、需要一定技巧的提高题；第三类是具有丰富实际背景的应用题．全书的计算题在书末都给出了相应的答案或提示.

本书由上海财经大学应用数学系与上海金融学院应用数学系教师合作编写．编者分别是上海财经大学应用数学系张晓梅副教授(第一、第二、第四、第五

章)、张振宇副教授(第三、第七、第八章)、上海金融学院应用数学系迟东璇教授(第六章).上海财经大学应用数学系陈启宏教授在编写过程中,对本书的结构体系、内容安排提出了许多宝贵的意见,并主审了初稿和修改稿,在此表示衷心的感谢.本书得到了上海财经大学重点课程建设项目资助,复旦大学出版社范仁梅老师对本书的出版提供了大量帮助,在此一并表示衷心的谢意.

限于编者水平,书中难免有缺点和不妥之处,敬请读者批评指正.

编者

2010年5月

目 录

第一章 绪 论

方程对于我们来说是比较熟悉的，在初等数学中就接触过各种各样的方程，比如线性方程、二次方程、高次方程、指数方程、对数方程、三角方程和方程组，等等. 但是对更复杂的实际问题，我们常常不能直接得出上述方程，只能够得出包含变量导数或微分的关系式，这就是微分方程. 微分方程可以描述物理、化学、生物、工程、航空航天、医学、经济和金融领域中的许多原理和规律，如牛顿运动定律、能量守恒定律、人口发展规律、生态种群竞争、疾病传染、遗传基因变异、股票的涨伏趋势、利率的浮动、市场均衡价格的变化等. 因此，微分方程是解决各种实际问题的最基本的数学理论和方法. 本章首先列举导出微分方程的一些例子，然后结合这些例子，介绍常微分方程的一些基本概念.

1.1 微分方程模型

例 1 **人口预测模型**. 影响人口增长的因素很多，如人口的自然出生率、人口的自然死亡率、人口的迁移、自然灾害、战争等诸多因素. 英国人口统计学家 Malthus(1766—1834)根据百余年的统计资料，于 1798 年提出了闻名于世的 Malthus 人口模型：在单位时间内人口的增长量与人口成正比. 在此假设下，试推导人口随时间变化的数学模型.

解 设时刻 t 的人口数量为 $N(t)$，r 为比例系数. 根据 Malthus 的理论，在 t 到 $t+\Delta t$ 时间段内，人口的增长量为

$$N(t+\Delta t)-N(t)=rN(t)\Delta t,$$

从而

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}=rN(t).$$

令 $\Delta t\to 0$ 得到

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

再假设 $t = t_0$ 时刻的人口为 N_0，于是得到

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = rN, \\ N(t_0) = N_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

这就是 Malthus 人口模型. 实际上(1.1)式就是一个微分方程的定解问题，如果能够求出满足该方程的函数 $N(t)$，那么我们就了解了人口随时间的增长规律. ■

例 2 **市场价格模型.** 对于纯粹的市场经济来说，商品市场价格取决于市场供需之间的关系，市场价格能促使商品的供给与需求相等(这样的价格称为(静态)均衡价格). 也就是说，如果不考虑商品价格形成的动态过程，那么商品的市场价格应能保证市场的供需平衡，但是，实际的市场价格不会恰好等于均衡价格，而且价格也不会是静态的，应是随时间不断变化的动态过程. 试建立描述市场价格形成的动态过程的数学模型.

解 假设在某一时刻 t，商品的价格为 $p(t)$，其变化率 $\frac{dp}{dt}$ 与需求和供给之差成正比. 记 $f(p, r)$ 为需求函数，$g(p)$ 为供给函数(r 为参数)，于是得到如下方程：

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \alpha[f(p, r) - g(p)], \\ p(0) = p_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 p_0 为商品在 $t = 0$ 时刻的价格，α 为正常数. (1.2)式就是描述市场价格形成的动态过程的数学模型. 如果能够求出满足该方程的函数 $p(t)$，那么我们也就了解了商品价格的动态变化规律. ■

例 3 **战争模型.** 影响战争胜负的因素有很多，兵力的多少和战斗力的强弱是两个主要的因素. 士兵的数量会随着战争的进行而减少，这种减少可能是因为阵亡、负伤与被俘，也可能是因为疾病与开小差，分别称为战斗减员与非战斗减员. 士兵的数量也可随着增援部队的到来而增加. 从某种意义上来说，当战争结束时，如果一方的士兵人数为零，那么另一方就取得了胜利. 试建立正规战中相关因素之间关系的数学模型.

解 先给出如下假设：

(1) x, y 双方士兵公开活动. x 方士兵的战斗减员仅与 y 方士兵人数有关. 记双方士兵人数分别为 $x(t)$, $y(t)$，则 x 方士兵战斗减员率为 $ay(t)$，a 表示 y

方每个士兵的杀伤率. 又 $a = r_y p_y$，r_y 为 y 方每个士兵的射击率(每个士兵单位时间的射击次数)，p_y 为每次射击的命中率. 同理，用 b 表示 x 方士兵对 y 方士兵的杀伤率，即 $b = r_x p_x$.

(2) 双方的非战斗减员率仅与本方兵力成正比，减员率系数分别为 α，β.

(3) 设双方的兵力增援率为 $u(t)$，$v(t)$.

根据假设，可以得到如下方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -ay - \alpha x + u(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -bx - \beta y + v(t). \end{cases} \tag{1.3}$$

这就是正规战中相关因素之间关系的数学模型. (1.3)式是由两个微分方程构成的微分方程组. 如果能够求出满足该方程组的两个函数 $x(t)$，$y(t)$，那么就可以讨论每一方的兵力随时间的变化关系，以及双方之间兵力的变化关系等. ■

例 4 **减肥模型**. 随着社会的进步和发展，人们的生活水平不断提高，“肥胖”已经成为全社会关注的一个重要的问题. 如何正确对待减肥是我们必须考虑的问题. 试建立减肥的数学模型.

解 先给出如下假设：

(1) 以人体脂肪的重量作为体重的标志. 假设脂肪的能量转换率为 100%，每 1 kg 脂肪可以转换为 D J 的能量；

(2) 假设人体的体重只是时间 t 的函数 $w(t)$，且随时间连续变化；

(3) 假设人体每天摄入的能量是一定的，记为 A；

(4) 假设在单位时间(1 日)内，人体所消耗的能量和人体活动所消耗的能量都正比于人的体重，记 C 为 1 kg 体重每天消耗的能量，B 为 1 kg 体重每天因活动所消耗的能量.

于是，体重改变的能量变化为 $D[w(t+\Delta t) - w(t)]$，摄入与消耗的能量之差为 $A\Delta t - (B+C)w(t)\Delta t$.

根据能量的平衡原理：任何时间段内由于体重的改变所引起的人体内能量的变化应该等于这段时间内摄入的能量与消耗的能量的差. 于是在时间区间 $[t, t+\Delta t]$ 内能量的改变为

$$D[w(t+\Delta t) - w(t)] = A\Delta t - (B+C)w(t)\Delta t.$$

两边同时除以 Δt 并令 $\Delta t \to 0$，得以下方程：

$$\frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t}=a-bw(t),\ t>0, \tag{1.4}$$

其中 $a=\dfrac{A}{D}$, $b=\dfrac{B+C}{D}$. 这就是一个简化了的减肥模型. 它也是一个微分方程，如果能够求出满足该方程的函数 $w(t)$，那么我们就可以了解饮食和活动这两个主要因素与减肥之间的一些关系. ■

例 5 **打假模型.** 随着经济的发展，制造与销售假冒伪劣品等违法犯罪活动(以下简称为造假)越来越引起人们的广泛关注. 如何采取有效措施以减少甚至杜绝造假活动，是一项长期而艰巨的任务. 试建立打假模型.

解　先给出如下假设：

(1) $I(t)$为 t 时刻的假冒伪劣商品(以下简称为假品)数(单位：件)，并将 $I(t)$看作 t 的连续函数，且初始时刻 $t=0$ 时，假品数为 $I_0>0$；

(2) 单位时间内造假产生的假冒伪劣商品数为常数 A；

(3) 单位时间内维持正常的社会经济秩序打掉的假品数为常数 B；

(4) 单位时间内因政府部门开展某种打假活动所打掉的假品数与 t 时刻的假品数成正比，即 $CI(t)$，其中 C 为打假强度系数；

(5) 假品单位时间内应控制在一定数量以内，设小于 D, D 称为临界值.

考虑$[t, t+\Delta t]$时间间隔，根据微观模式的守恒原理：净变化率＝输入率－输出率，有

$$I(t+\Delta t)-I(t)=(A-B-CI(t))\Delta t.$$

两边同时除以 Δt 并令 $\Delta t\to 0$ 得以下方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=A-B-CI(t),\\ I(0)=I_0.\end{cases} \tag{1.5}$$

这就是一个简化了的打假模型. 如果能够求出满足该方程的函数 $I(t)$，那么我们就可以了解假冒伪劣商品数的变化趋势，并进一步可探讨减少假品数量的办法. ■

例 6 **传染病的传播模型.** 尽管社会经济在快速发展，人民生活水平在不断提高，但影响人类健康的传染病仍然是威胁人类健康的第一大杀手. 传染病传播所涉及的因素很多，如传染病人的多少、易受传染者的多少、传染率的大小、排除率的大小、人口的出生和死亡等. 试通过传染病传播过程中若干重要因素之间的联系，建立传染病的传播模型.

解 先给出如下假设：

(1) 设总人数为 n，$I(t)$，$s(t)$表示 t 时刻传染病人数和未被传染人数，$I(0)=I_0$；

(2) 每个病人单位时间内传染的人数与这时未被传染的人数成正比，记为 $Ks(t)$；

(3) 一人得病后，经久不愈，并在传染期内不会死亡；

则在 Δt 时间内增加的病人数为

$$I(t+\Delta t)-I(t)=Ks(t)I(t)\Delta t.$$

两边同时除以 Δt 并令 $\Delta t\to 0$，得以下方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=Ks(t)I(t),\\ s(t)+I(t)=n,\ I(0)=I_0.\end{cases}\tag{1.6}$$

这就是一个简化了的传染病传播的数学模型. 如果能够求出满足该方程的函数，那么我们就可以初步了解传染病传播的形式，以及随时间的变化趋势，这对于防治传染病是有益处的. ■

从以上几个例子，我们大致了解了怎样从一个实际问题导出数学模型，即建立微分方程的过程. 求解相应的微分方程(组)，就可以用得到的结果去解释实际现象，或对实际问题的发展变化趋势进行判断. 但一般来说，建立准确描述实际问题的微分方程(组)的过程是比较复杂和困难的，需要具备相关学科的丰富知识以及深厚的数学基础知识，如数学建模知识、普通物理学知识等，这超出了本课程的教学范畴，需要另外学习专门的课程.

微分方程一般可分为常微分方程和偏微分方程两类. 本课程将重点讨论常微分方程，学习其基本理论和求解方法，为今后在生产、生活中解决一些实际问题打下必要的数学基础，这也正是我们开设这门课的目的所在.

习 题 1.1

1. 设某曲线，它上面的任何一点的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积总等于 2，试建立这条曲线所满足的数学模型.

2. 一曲线通过点(1, 2)，且该曲线上任意点 $P(x, y)$处的切线斜率等于该点的横坐标平方的 3 倍，试建立这条曲线所满足的数学模型.

3. 一个质量为 m 的质点在水中由静止开始下沉，设下沉时水的阻力与速度成正比. 试建立质点运动规律所满足的数学模型.

4. 酵母繁殖的速率与它在该时刻的量成正比，比例系数 $k>0$. 试建立酵母在繁殖过程中酵母的量所满足的数学模型.

5. 一物质 A 经化学反应，全部生成另一物质 B，设 A 的初始质量为 10 kg，在 1 h 内生成 B 物质 3 kg，试建立物质 B 的质量所满足的数学模型(提示：物质的化学反应遵循质量作用定律，即化学反应的速度跟参与反应的物质的有效质量或浓度成正比).

6. 物体的冷却速度正比于物体温度与环境温度之差. 用开水泡速溶咖啡，3 min 后咖啡的温度是 85 ℃，若房间温度是 20 ℃，试建立咖啡温度所满足的数学模型.

7. 有一房间容积为 100 m^3，CO_2 的浓度为 0.12%，现在用一台风量为 10 m^3/min 的排风机向房间通入含 0.04%浓度 CO_2 的空气，同时以相同的风量将混合均匀的空气排出. 试建立房间中 CO_2 浓度所满足的数学模型.

8. 某人的食量是每天 2 500 cal，其中 1 200 cal 用于基本的新陈代谢(即自动消耗). 在每天的健身训练中，他所消耗的大约是 16 cal/kg. 假设以脂肪形式储藏的热量 100%地有效，而每 1 kg 脂肪含热量 10 000 cal. 试建立此人的体重随时间变化的数学模型.

1.2 常微分方程的基本概念

在这一节，我们要介绍本课程涉及的一些基本概念.

定义 1.1 联系自变量、未知函数以及未知函数的导数(或微分)的方程称为**微分方程**.

考察以下几个方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x+3y, \tag{1.7}$$

$$(x^2+y)\mathrm{d}x+(x-2y)\mathrm{d}y=0, \tag{1.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+tx\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^3+x=0, \tag{1.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}+2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+5y=\cos x, \tag{1.10}$$